Pi Matematikai, Fizikai és Informatikai Folyóirat
Miskolci Egyetem

1. kötet, Mat. füzet, 1-5. oldal, 2025.

Szendvics függvénykedvelő ínyenceknek

Bessenyei Mihály
Miskolci Egyetem
mihaly.bessenyei@uni-miskolc.hu

2025. december 29.

Kivonat

Cikkünkben jellemezzük azokat a függvénypárokat, amelyek rendelkeznek affin elválasztó függvénnyel. Bár a fő eredmény az anlízis témakörébe tartozik, a bizonyításban – meglepő módon – a kombinatorikus geometria egyik alaptétele, a Helly-tétel kap kulcsszerepet.

1. Bevezetés

A kombinatorikus geometriában azt vizsgáljuk, hogy „nagyméretű” halmazcsalád milyen feltételek mellett örökli saját „kisméretű” részrendszereinek bizonyos közös tulajdonságait. Ennek az elvnek egyik első és egyik legszemléletesebb képviselője Eduard Helly (1884–1943) nevezetes metszettétele. A síkbeli változat megfogalmazásához emlékeztetünk arra, hogy egy síkbeli halmaz akkor *konvex*, ha bármely két pontjával együtt az azokat összekötő szakaszt is tartalmazza. Helly tétele [5] ezek után a következőképpen szól:

Ha síkbeli konvex halmazoknak egy véges rendszerében bármely három tagnak van közös pontja, akkor van olyan pont is, melyet mindegyik tag tartalmaz.

Az alkalmazások szempontjából (ahogyan azt rövidesen látni fogjuk) a halmazcsaládra szabott végességi feltétel komoly megszorítást jelent. Mint kiderül, e feltétel szerencsére elhagyható, ha a család tagjaira további analitikus feltételeket szabunk. Egy síkbeli halmaz *korlátos*, ha van olyan nyílt körlap, amely lefedi; *zárt*, ha a komplementerének minden pontja körül megadható olyan nyílt körlap, amely a komplementerhez tartozik. E két tulajdonság segítségével fogalmazhatjuk meg Helly tételének másik változatát:

Ha síkbeli zárt konvex halmazoknak egy rendszerében bármely három tagnak van közös pontja, és van olyan véges részrendszer, melynek metszete korlátos, akkor van olyan pont, melyet mindegyik tag tartalmaz.

Kulcsszavak: elválasztási tétel; Helly-tétel; Santaló-tétel. AMS Subject Classification: 39B82; 26A51; 52A35.

A Helly-tétel mindkét alakjának bizonyítása elegáns. Az első változat elemi eszközökkel igazolható. A második változat az elsőre vezethető vissza, komolyabb analízis felhasználásával. Maga az állítás valójában sokkal általánosabb formában érvényes. Mindkét síkbeli változat kiterjeszthető véges dimenziós vektorterekre azzal a módosítással, hogy „három" helyett „dimenzió plusz egy" írandó. Így már érthető, hogy a síkbeli esetben miért épp a „három" szerepel! Az általános eset bizonyítása egyébként semmivel sem bonyolultabb, mint a síkbelié.

A névadó, Eduard Helly, 1913-ban kapta eredményét és beszámolt róla kollégájának, Johann Radonnak. Ezt követően nem sokkal Helly orosz hadifogságba esett és Szibériába került. Mire eredményét 1923-ban publikálta, Radon [8] és Kőnig [6] független bizonyításai már megjelentek. A tudományos etika szép példája, hogy Helly érdemeit egyikük sem vitatta, sőt elismerték és hangsúlyozták azt. Helly szakmai elhivatottságát egyébként jól mutatja, hogy fogsága idején matematikai szemináriumokat szervezett, aktívan kutatott, és alapvető eredményeket ért el.

Helly tételéről és alkalmazásairól további részleteket találhatunk Bárány Imre cikkében [1], Reimann István könyvében [9], vagy Ludwig Danzer, Branko Grünbaum és Victor Klee monográfiájában [4]. Cikkünkben Kazimierz Nikodem és Szymon Wąsowicz elválasztási tételét [7] ismertetjük. A bizonyításban a Helly-tétel egyik következményét, Louís Santaló eredményét [10] használjuk.

2. Elválasztás affin függvényekkel

Tegyük fel, hogy $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ olyan függvények az I valós intervallumon, melyek affin függvénnyel szeparálhatók, azaz létezik olyan $h(x) = ax + b$ alakú $h\colon I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f \le h \le g$ teljesül. Egyszerű számolással megmutatható, hogy ebben az esetben minden $x, y \in I$ és minden $\lambda \in [0,1]$ választással

$$\begin{aligned} f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &\le \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \\ g\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &\ge \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \end{aligned} \tag{1}$$

érvényes. Valóban, elsőként az $f \le h$ egyenlőtlenséget, majd h affin voltát, végezetül a $h \le g$ egyenlőtlenséget használva,

$$\begin{aligned} f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &\le h\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \\ &= a\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) + b = \lambda(ax+b) + (1-\lambda)(ay+b) \\ &= \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y) \le \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y). \end{aligned}$$

A másik egyenlőtlenség ugyanilyen számolással ellenőrizhető. Meglepő módon az affin szeparátor létezésének (1) nem csupán szükséges, hanem elegendő feltétele is! Ezt fogalmazza meg Kazimierz Nikodem és Szymon Wąsowicz eredménye[7], melyet a spanyol matematikus, Luís Antoni Santaló Sors (1911–2001) alábbi eredménye segítségével fogunk igazolni.

Tétel. Legyen $\mathscr{A}$ véges hosszúságú zárt szakaszok olyan családja a síkon, melynek tagjai párhuzamosak, és bármely két tag különböző egyenesre illeszkedik. Ha a család bármely három tagjának van közös metsző egyenese, akkor van olyan egyenes is, amely $\mathscr{A}$ valamennyi tagját metszi.

Bizonyítás Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy a szakaszok párhuzamosak az ordinátatengellyel. Tekintsük ekkor egy (m, y_1) és (m, y_2) végpontokkal meghatározott szakaszt, és tegyük föl, hogy $y_1 \leq y_2$. Ha az $\ell(x) = ax + b$ egyenes metszi ezt a szakaszt, akkor a metszéspont második koordinátája, vagyis az $am + b$ érték, y_1 és y_2 között van. Tehát,

$$-am + y_1 \leq b \leq -am + y_2.$$

Tekintsük most az $\ell_1(x) = -mx + y_1$ és $\ell_2(x) = -mx + y_2$ módon adott párhuzamos egyenespárt. A fönti egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az (a, b) pont (amely egyértelműen jellemzi az ℓ egyenest) az ℓ_1 és ℓ_2 által közrefogott sávban helyezkedik el.

Észrevételünk a tükrében a tétel feltétele a következőképpen fogalmazható át: Adott sávoknak egy olyan rendszere a síkon, melyben bármely három tagnak van közös pontja. Továbbá, a sávrendszer nem tartalmaz párhuzamos tagokat, hiszen az eredeti szakaszrendszer különböző tagja különböző egyneseken vannak, s ennélfogva a sávokat jelemző m értékek páronként különböznek. Tehát a sávrendszer bármely kéttagú részrendszere összemetsz, a metszet paralelogramma, ami nyilvánvalóan zárt és korlátos. Így a Helly-tétel valamennyi feltétele teljesül: a sávok rendelkeznek közös ponttal, azaz létezik az eredeti szakaszrendszer minden tagján áthaladó egyenes. □

A Nikodem–Wąsowicz-féle elválasztási tétel [7] az úgynevezett *szendvics-tétel*ek jellegzetes képviselője. A szendvics tételek arra vonatkoznak, hogy mikor találhatunk két függvény között valamilyen adott függvényosztályba tartozó elválasztó függvényt. Gasztronómiai olvastban: Van-e sajt (vagy szalámi) a két szelet kenyér között?

Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ pedig adott függvények. Pontosan akkor létezik az $f \leq h \leq g$ egyenlőtlenségnek eleget tevő $h\colon I \to \mathbb{R}$ affin függvény, ha minden $x, y \in I$ és minden $\lambda \in [0, 1]$ esetén teljesülnek az (1) egyenlőtlenségek.

Bizonyítás Csupán az elegendőséget kell igazolnunk. Az (1) egyenlőtlenségekből nyilván $f \leq g$ következik. Rögzített $x \in I$ esetén jelölje $I(x)$ az $\big(x, f(x)\big)$ alsó, illetve $\big(x, g(x)\big)$ fölső végpontok által kifeszített szakaszt, és legyen

$$\mathscr{A} := \{I(x) \mid x \in I\}.$$

Nyilvánvalóan $\mathscr{A}$ véges hosszúságú zárt szakaszok olyan családja a síkon, melynek tagjai párhuzamosak, és bármely kettő különböző egyenesre illeszkedik. Most megmutatjuk, hogy a család bármely három tagja rendelkezik közös metsző egyenessel.

Ha $x_1 < x_2 < x_3$ tetszőleges elemei az I intervallumnak, akkor x_2 előállítható az $x = x_1$ és az $y = x_3$ számok konvex kombinációjaként. Azaz, van olyan $\lambda \in [0, 1]$ szám, hogy

$$x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3 = \lambda x + (1 - \lambda)y.$$

Mármost az (1) alatti első egyenlőtlenség pontosan azt fejezi ki, hogy az $I(x_2)$ szakasz alsó végpontja az $I(x_1)$ és $I(x_3)$ szakaszok felső végpontjait összekötő szakasz alatt van. Hasonlóan, az (1) második egyenlőtlensége biztosítja, hogy az $I(x_2)$ szakasz felső végpontja az $I(x_1)$ és $I(x_3)$ szakaszok alsó végpontjait összekötő szakasz fölött van. Így az $I(x_2)$ szakasznak valamely p pontja biztosan az említett két összekötő szakasz között helyezkedik el.

Tekintsük most az $I(x_1)$ és $I(x_3)$ alsó illetve felső végpontjait összekötő egyenespárt! Amennyiben ezek párhuzamosak, úgy a p ponton átmenő, velük párhuzamos egyenes belemetsz az $I(x_1)$, $I(x_2)$, $I(x_3)$ szakaszok mindgyikébe. Ha nem párhuzamosak, akkor a metszéspontjukat és a p pontot összekötő egyenes rendelkezik ugyanezzel a tulajdonsággal.

Ez azt jelenti, hogy teljesülnek a Santaló-tétel feltételei. Tehát van olyan egyenes, amely $\mathscr{A}$ minden tagjába belemetsz, vagyis az f és g grafikonja között halad az I intervallum fölött. A keresett affin elválasztó az a h függvény, melynek grafikonja a most megtalált egyenes. $\square$

A fenti tétel egy érdekes következménye azt állítja, hogy minden „közelítőleg" affin függvény „közel van" egy affin függvényhez. Pontosabban fogalmazva, ha $I \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum és $\varepsilon > 0$, úgy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény pontsan akkor teljesíti az

$$|f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y)| < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget minden $x, y \in I$ és minden $\lambda \in [0,1]$ esetén, ha van olyan $h\colon I \to \mathbb{R}$ affin függvény, amelyre minden $x \in I$ választás mellett $|f(x) - h(x)| < \varepsilon/2$ teljesül.

Az affin elválasztási tételnek számos általánosítása ismert. Kiterjeszthető véges dimenziós alaptartományra [2] vagy intervallumon adott interpolációs családra [3]. Ez utóbbi speciális esete jellemzi azon függvénypárokat, amelyek adott fokszámú polinommal elválaszthatók. Talán nem meglepő, hogy valamennyi általánosítás hátterében a Helly-tétel áll...

Köszönetnyilvánítás. A cikk a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj és az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-21-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Hivatkozások

[1] Bárány, Imre: Helly tételéről. In: *KöMaL* xx (1981), Nr. 2, S. 61–66

[2] Bessenyei, Mihály: The affine separation problem revisited. In: *Indagationes Mathematicae* 29 (2018), Nr. 3, S. 873–877. `http://dx.doi.org/10.1016/j.indag.2018.01.005`. – DOI 10.1016/j.indag.2018.01.005. – ISSN 0019–3577

[3] Bessenyei, Mihály ; Páles, Zsolt: Separation by linear interpolation families. In: *J. Nonlinear Convex Anal.* 13 (2012), Nr. 1, S. 49–56

[4] Danzler, Ludwig ; Grünbaum, Branko ; Klee, Victor: Helly's theorem and its relatives. In: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 7 (1963), S. 101–180

[5] Helly, Eduard: Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkte. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 32 (1923), S. 175–176

[6] König, Dénes: Über konvexe Körper. In: *Mathematische Zeitschrift* 14 (1922), S. 208–210. `http://dx.doi.org/10.1007/BF01215899`. – DOI 10.1007/BF01215899. – ISSN 1432–1823

[7] Nikodem, Kazimierz ; Wąsowicz, Szymon: A sandwich theorem and Hyers—Ulam stability of affine functions. In: *Aequationes Mathematicae* 49 (1995), Nr. 1–2, S. 160–164. `http://dx.doi.org/10.1007/BF01827935`. – DOI 10.1007/BF01827935. – ISSN 1420–8903

[8] Radon, Johann: Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. In: *Mathematische Annalen* 83 (1921), S. 113–115. http://dx.doi.org/10.1007/BF01464231. – DOI 10.1007/BF01464231. – ISSN 1432–1807

[9] Reiman, István: *A geometria és határterületei.* Gondolat Kiadó, Budapest, 1986. – ISBN 963–281–672–2

[10] Santaló, Luis A.: Supplement to the note: A theorem on sets of parallelepipeds with parallel edges. In: *Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral* 3 (1942), S. 202–210