Pi Matematikai, Fizikai és Informatikai Folyóirat
Miskolci Egyetem

2. kötet, Mat. füzet, 1-18. oldal, 2026.

Animációk készítése a Desmos grafikus számológéppel szívgörbéhez kapcsolódó feladatok megoldásának szemléltetésére

Szilágyi Szilvia
Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Matematikai Intézet
szilvia.szilagyi@uni-miskolc.hu

Körei Attila
Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Matematikai Intézet

attila.korei@uni-miskolc.hu

2026. február 16.

Kivonat

Cikkünkben a Desmos grafikus számológéppel megoldható érdekes, a szívgörbe változatos geometriai tulajdonságaihoz kapcsolódó feladatokat gyűjtöttünk össze. Közös ezekben a feladatokban, hogy a szívgörbét burkológörbeként hozzuk létre kör- vagy egyenesseregek felhasználásával. Ez a megadás lehetővé teszi a görbeseregek különböző vizuális kialakítását. A megjelenítés során többféle animációs módszer alkalmazható, ezek közül az egyik, amikor a görbesereg tagjai egymás után, egyesével rajzolódnak ki. Az animációs összhatás kiépítésében fontos szerepet kap a listaalapú megközelítés. Cikkünkben ismertetjük, miként valósítható meg dinamikus ábrázolás a Desmos eszközeinek segítségével, valamint hogyan érhetők el különböző paraméterek használatával animációs effektek. A feladatokhoz készített részletes megoldások az animációra mutató linket is tartalmazzák.

1. Bevezetés

Az animációkkal történő szemléltetés napjainkban már nem számít új módszernek sem a vizuális kommunikációban, sem a matematikaoktatásban. Az utóbbi évtizedekben jelentős fejlődésen mentek keresztül a dinamikus geometriai szoftverek, széles spektrumon jelentek meg felhasználóbarát lehetőségek szinte valamennyi, a matematikaoktatást támogató

Kulcsszavak: dinamikus geometriai szoftver, Desmos grafikus számológép, burkológörbe, szívgörbe, animáció. AMS Subject Classification: 97I20, 97U70, 97G99

szoftvertermék esetén. Ezzel párhuzamosan a vizualizáción alapuló, interaktív szemléltetés is egyre inkább elfogadott és elterjedt módszerré vált a matematika oktatásában [20]. Új alkalmazások is megjelentek a folyamatosan fejlesztett népszerű dinamikus geometriai szoftverek mellett, ezek egyike a Desmos grafikus számológép. A Desmos-t a fejlesztők azért hozták létre 2011-ben, hogy egy könnyen hozzáférhető, interaktív és vizuálisan vonzó matematikai eszközt biztosítsanak diákoknak és tanároknak egyaránt. A cél az volt, hogy lehetőséget teremtsenek a valós idejű rajzolásra, valamint animációs és interaktív megoldások megvalósítására könnyen kezelhető platformon. Mára a Desmos a matematikaoktatás egyik gyakran használt eszközévé vált világszerte [3, 6, 13, 15, 19]. A Desmos többféle platformot kínál, ezek egyike a Desmos grafikus számológép (Desmos Graphing Calculator).

A Desmos, illetve más dinamikus geometriai szoftverek egyik innovatív alkalmazási lehetősége az animációk készítése. A szemléltetés során az animáció több szempontból is előnyösebb lehet, mint egy statikus ábra. A dinamikus megjelenítés gördülékenyen és érthetőbben szemléltet, könnyebben felismerhetők az összefüggések, és a változásokhoz tartozó lépések, így mélyebb megértést biztosít a tanulóknak [11]. Emellett az animációk vonzóak és figyelemfelkeltőek, ami növeli az érdeklődést és a motivációt. Interaktív elemek hozzáadásával lehetőség nyílhat arra is, hogy a felhasználók saját maguk kísérletezzenek a paraméterekkel, így aktívabb tanulási folyamat valósulhat meg, szemben a statikus ábrák passzív megfigyelésével [7].

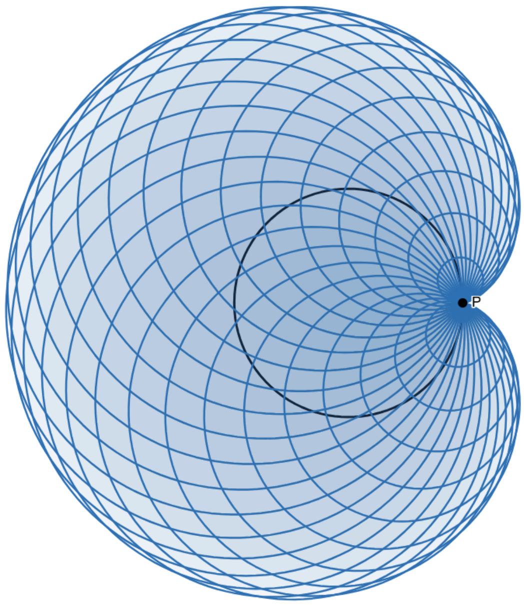
Szívgörbéhez kapcsolódó, számítógéppel megoldható feladatokat Hraskó András 2004-ben középiskolásoknak írt [10] szakköri jegyzete szép számmal tartalmaz. A szerző a Cabri és az Euklides szoftvereket használta, így a bemutatott megoldások ezen szoftverek menürendszeréhez kötődnek. A Cabri és az Euklides lehetővé tették geometriai problémák megoldását anélkül, hogy a megoldáshoz szükséges matematikai összefüggések felírásra kerülnének. Ez megkönnyítette a problémák megértését és számítógéppel való megoldását, mert az analitikus megoldás elkészítését meg lehetett kerülni a beépített parancsikonok használatával. Hasonló megoldások a GeoGebrával és a Desmos Geometry Tool felhasználásával készíthetők. A Desmos geometriai eszköze 2023 májusától érhető el. A felhasználók egyszerűen rajzolhatnak, szerkeszthetnek és próbálgathatnak különböző geometriai alakzatokat a felületen, a rendszer automatikusan kezeli az összekapcsolódó matematikai adatokat.

2024-ben, a [17] és [18] cikkekben a szívgörbe projekt alapú tanulásának egy oktatási robotikát integráló módszertani innovációját mutattuk be. STEAM alapú megközelítést alkalmaztunk, amely a frontális oktatást, a probléma-alapú tanulást, az oktatási robotikát és a dinamikus geometriai szoftverek alkalmazását kombinálja. A projekt során a résztvevők rajzoló robotokat építettek és programoztak a szívgörbe megrajzolására, majd animációkat készítettek a Desmos szoftverrel a görbe tulajdonságainak szemléltetésére. A cikk bemutatja a módszertan részleteit, a rajzoló LEGO robot működési elvét és programozását, valamint a hallgatók számára kitűzött feladatokat az elméleti háttérrel együtt, azonban a feladatok részletes megoldását, az animációk elkészítésének lépéseit nem tartalmazza. A Desmos grafikus számológépnek nincs a Cabri-hoz, illetve az Euklides-hez hasonló menürendszere. A megfelelő matematikai összefüggések ismeretén, az analitikus összefüggések felírásán, valamint a paraméterek kezelésén alapul a használata. Úgy gondoljuk, hogy a [17] cikkben kitűzött, számítógéppel megoldandó feladatok animációinak létrehozását érdemes részletesen, lépésenként bemutatni, mert alkalmas feladattípusok a dinamikus szemléltetés lehetőségeinek bemutatására a Desmosban.

2. Körök burkológörbéje

Görbesereggel való szemléltetést szép számmal találunk [14]-ben. Lockwood könyvének jellegzetessége, hogy számos görbét mutat be a létrehozásuk módja alapján, gyakran egyenesek vagy körök sorozatának burkolójaként. Ez a megközelítés segít a görbék tulajdonságainak vizuális és intuitív megértésében [2].

Ha rögzítünk a síkon egy kört és ennek egy P pontját, majd tekintjük azokat a köröket, amelyek középpontja a rögzített körön van és átmennek a P ponton, akkor ezeknek a köröknek a burkolója éppen egy szívgörbe [14], ahogy ezt az 1. ábra szemlélteti. A keletkező szívgörbe átmérője kétszerese a rögzített kör átmérőjének és a csúcspontja a P pontban van [17].



1. ábra. Szívgörbe előállítása körök burkolójaként.

2.1. Feladat. Vázoljuk a Desmos grafikus számológépben az $x^2 + y^2 = 1$ kört és a $P(1, 0)$ pontot. Vegyünk fel olyan köröket, amelyek középpontja a megadott körön van és átmennek a P ponton! Készítsünk animációt, ahol legalább 30 lépéses iterációval áll elő körök burkológörbéjeként egy szívgörbe! Adjuk meg a keletkezett szívgörbe paraméteres egyenletrendszerét!

Megoldás. A feladatot a görbék paraméteres vektoregyenletének felírásával oldjuk meg és lista használatával. A megoldás lépései:

1. Az $x^2 + y^2 = 1$ kör paraméteres vektoregyenlete:

$$(\cos t, \sin t) \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

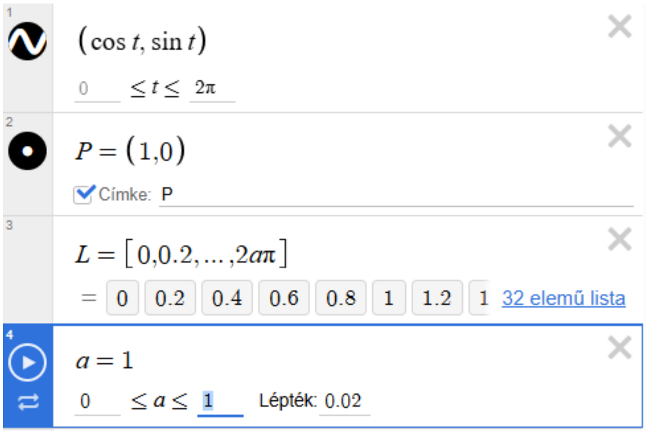
   Ezt a Desmosban is így adjuk meg.

2. Felvesszük a P pontot és címkét adunk hozzá:

$$P = (1, 0)$$

3. Lista segítségével felosztjuk a $[0, 2a\pi]$ intervallumot:
$$L = [0, 0.02, ..., 2a\pi]$$

4. Létrehozzuk a csúszkát az a paraméter számára. Ezt a Desmos felkínálja, de a kezdő- és a végpont értékét meg kell változatani:
$$0 \leq a \leq 1$$
A lépték értéke: 0.02. Ez a megadás $a = 1$ esetén 32 elemű listát ad (2. ábra).



2. ábra. A csúszka kezdő és végpontjának beállítása.

5. Vegyünk fel pontokat a megadott körön az L lista használatával. Ezen pontok első koordinátáját q_x jelölje! Ekkor:
$$q_x = \cos L$$

6. A körvonalon kijelölésre kerülő pontok második koordinátáját q_y-nal jelöljük:
$$q_y = \sin L$$

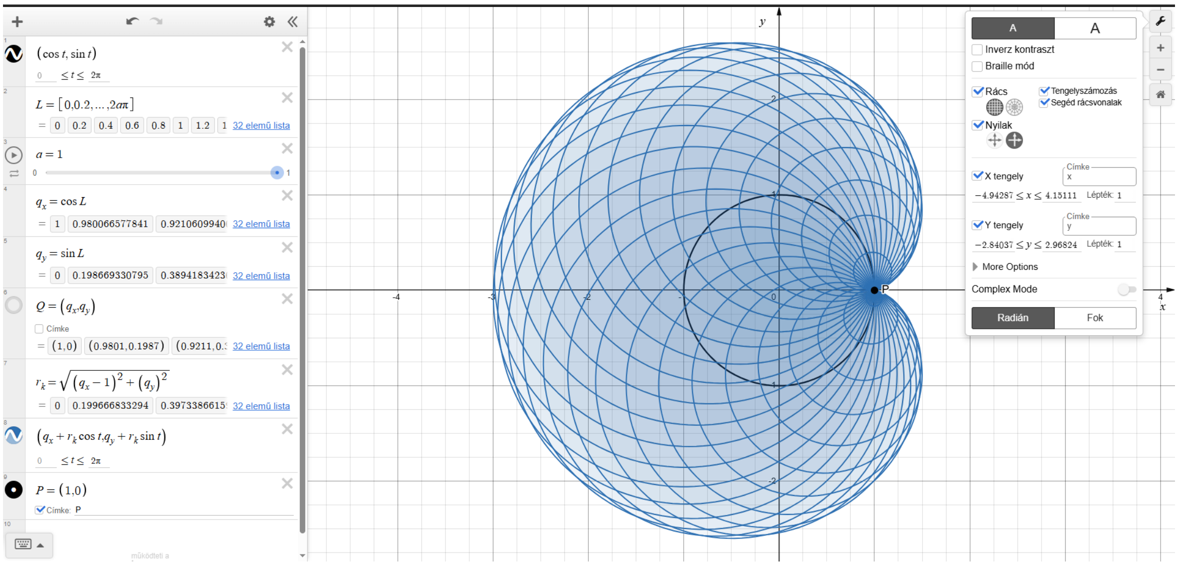
7. q_x és q_y megadása után a pontok felrajzolhatók:
$$Q = (q_x, q_y)$$

8. Olyan köröket kell rajzolni, amelyek középpontja a megadott körön van és átmennek a P ponton, ezért a sugaruk a $\overrightarrow{PQ}$ szakasz hossza:
$$r_k = \sqrt{(q_x - 1)^2 + q_y^2}$$

9. Megadjuk a felrajzolandó körsereg paraméteres vektoregyenletét:
$$(q_x + r_k \cos t, q_y + r_k \sin t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

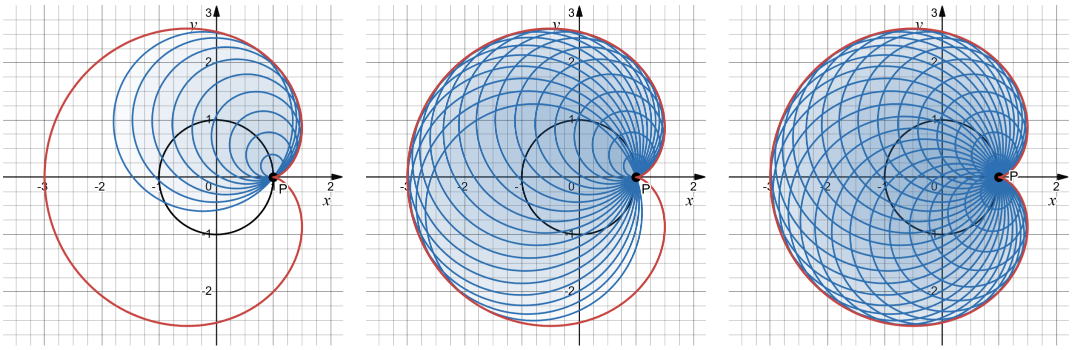
10. Az animáció sebességét és módját az indítás előtt állítsuk be! Ezt mindkét esetben kattintással tudjuk kiválasztani a rendszer által felkínált lehetőségekből. A grafikon beállításait a jobb felső sarokban található ikonra kattintva módosíthatjuk. Az animáció az a paraméter előtti lejátszás gombbal indítható.

A feladat megoldásának lépéseit a 3. ábrán, egy képernyőfotón is megmutatjuk. Az animációhoz vezető link: `https://www.desmos.com/calculator/cll4to3sut`.



3. ábra. A 2.1. feladat megoldása a Desmosban.

A bemutatott animációban a körök egymás után, egyesével jelennek meg, ami jól szemlélteti a burkológörbeként kialakuló szívgörbe keletkezését. A 4. ábrán az előállítás három lépése látható, valamint a burkológörbeként létrejövő szívgörbe.



(a) Az iteráció 10. lépése. (b) Az iteráció 20. lépése. (c) Az iteráció utolsó lépése.

4. ábra. A szívgörbe származtatása körök burkológörbéjeként a Desmosban.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az iteráció során létrejött szívgörbe paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) &= 2\sin t - \sin 2t, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol $t \in [0, 2\pi]$. $\square$

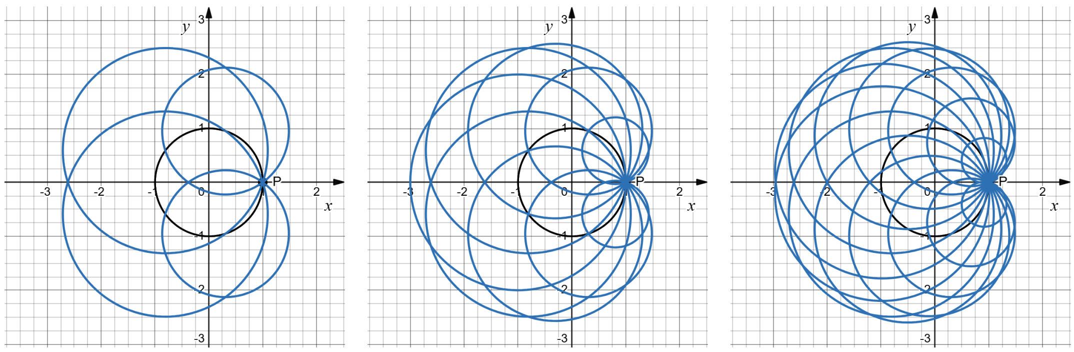
2.2. Megjegyzés. Olyan animációs megoldás is készíthető a 2.1. feladatra, amelynél a megadott körön egymástól egyenlő távolságra egyre több pontot helyezünk el, majd ezekkel a középpontokkal rajzoljuk meg a P ponton áthaladó köröket. Ekkor a lista:

$$L = \left[0, \frac{2\pi}{a}, ..., 2\pi - \frac{2\pi}{a}\right]$$

Az a animációs paraméter pedig:

$$0 \leq a \leq 30$$

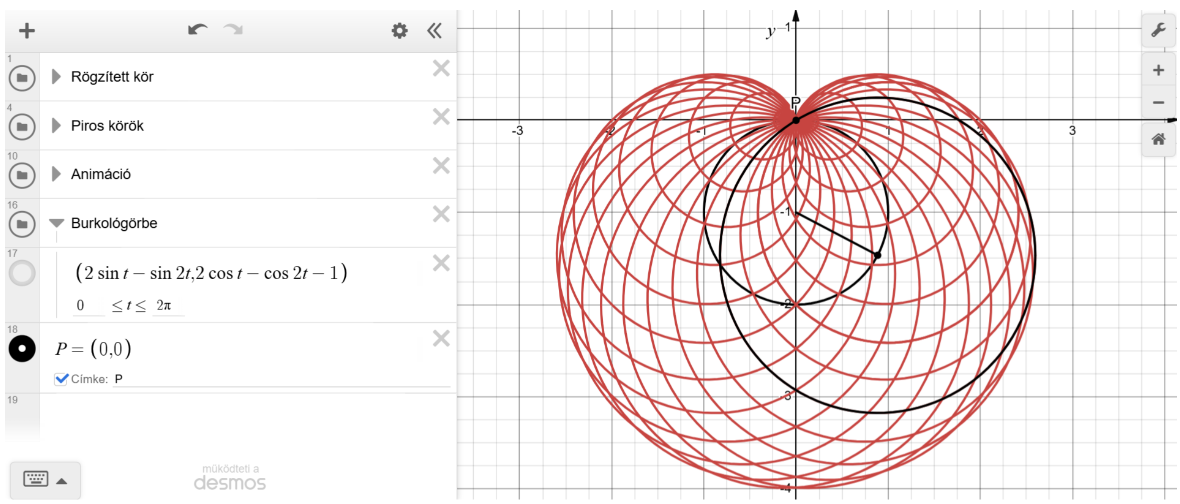
A lépték értéke: 1. Minden más összefüggés megtartható. Az animációhoz vezető link: `https://www.desmos.com/calculator/67cowdu5rv`. Az 5. ábrán az előállítás három lépése látható.



(a) Az iteráció 5. lépése. (b) Az iteráció 10. lépése. (c) Az iteráció 15. lépése.

5. ábra. Szívgörbe származtatása körsereggel a Desmosban.

2.3. Megjegyzés. Az animációs megvalósítások egy további lehetősége, amikor felrajzoljuk a görbesereg tagjait, majd egy jól kiválasztott mozgatott görbével szemléltetjük a görbesereg keletkezését. Egy ilyen megoldás tanulmányozható az alábbi linken: `https://www.desmos.com/calculator/hpdcvh8kma`. Ennél a példánál az $x^2 + (y-1)^2 = 1$ körből indultunk ki, és a $P(0,0)$ ponton átmenő körökkel hoztuk létre a szívgörbét. A megoldásról készült képernyőfotó a 6. ábrán látható.



6. ábra. Szívgörbe létrehozása körök burkológörbéjeként a Desmosban.

3. A szívgörbe érintői

A görbék érintőinek fontossága abban rejlik, hogy képesek ábrázolni a pillanatnyi változás mértékét (a meredekséget) a görbe pontjaiban, lineáris közelítést adva a görbe viselkedéséről. Ez a fogalom alapvető fontosságú a kalkulusban, továbbá fontos gyakorlati alkalmazásai vannak a mérnöki tudományokban és a fizikában a sebességek kiszámításától az utak és hullámvasutak görbéinek tervezéséig.

A szívgörbe érdekes tulajdonsága, hogy a pontjaiba húzott érintők burkolójaként előállítható.

3.1. Feladat. Tekintsük az (1) egyenletrendszerrel megadott szívgörbét és több, különböző pontjában rajzoljuk meg az érintőt! Készítsünk animációt a Desmos grafikus számológéppel, amely a megrajzolt érintőket egymás után, egyesével jeleníti meg!

Megoldás. Lista használatával elkészítjük az érintőket:

1. Osszuk fel a $[0, 2\pi]$ intervallumot!

$$L = [0, 0.1, ..., 2\pi]$$

   Ez a megadás 64 elemű listát ad.

2. Vegyünk fel pontokat az (1) szívgörbén az L lista használatával. A pontok első koordinátáját x_P jelölje! Ekkor:

$$x_P = 2\cos L - \cos 2L$$

3. A pontok második koordinátáját y_P-vel jelöljük:

$$y_P = 2\sin L - \sin 2L$$

   A $P(x_P, y_P)$ pontok megrajzolása nem szükséges lépés, csak a koordinátákra van szükségünk.

4. Az érintő egyenesek megrajzolásához szükség van a meredekségekre. Ezt a pontbeli derivált ismeretében meg tudjuk határozni:

$$\dot{x}(t) = -2\sin L + 2\sin 2L \quad \text{és} \quad \dot{y}(t) = 2\cos L - 2\cos 2L,$$

   továbbá

$$m = y' = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

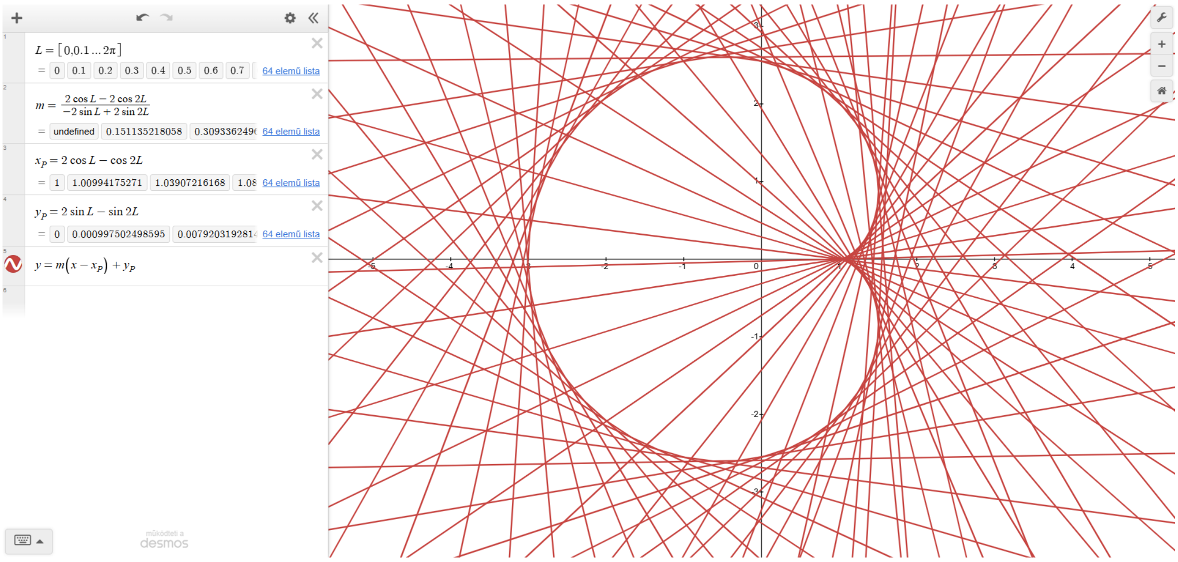
   Így:

$$m = \frac{2\cos L - 2\cos 2L}{-2\sin L + 2\sin 2L}$$

5. Megadjuk az érintőket:

$$y = m(x - x_P) + y_P$$

   A 7. ábrán látható képernyőfotó mutatja, ahogy 64 érintő burkológörbéjeként előállítottuk a szívgörbét. Az érintők színét bordónak választottuk.



7. ábra. Szívgörbe előállítása érintők burkolójaként.

6. Olyan animációt készítünk, ahol a megrajzolt érintőket egymás után kell megjeleníteni, ezért új listát hozunk létre az animációhoz szükséges paraméterrel együtt:

$$L_2 = [0, 0.1, \dots, 2a\pi]$$

7. Hozzuk létre a csúszkát az a paraméter számára! A kezdő- és a végpont értékét be kell állítani:

$$0 \leq a \leq 1$$

   A lépték értéke: 0.01.

8. Az animációban megjelenő érintők meredekségét jelölje M és az L_2 listával adjuk meg őket:

$$m = \frac{2\cos L_2 - 2\cos 2L_2}{-2\sin L_2 + 2\sin 2L_2}$$

9. Az animált érintők egyenlete:

$$y = M(x - x_P) + y_P$$

   Az animált érintők színét válasszuk kéknek! Indítsuk el az animációt!

Az animáció során a korábban megrajzolt érintőket egyesével átrajzoljuk, azaz megváltoztatjuk a színűket bordóról kékre. Az animációhoz vezető link: `https://www.desmos.com/calculator/qghuk3rgzq`. □

3.2. Megjegyzés. Olyan animációt is készíthetünk, ahol megrajzoljuk az érintőket, majd csupán egyetlen érintőt mozgatunk. Erre egy megoldást az alábbi linken lehet tanulmányozni: `https://www.desmos.com/calculator/tolsupef11`.

4. Evolúta és evolvens

Egy síkgörbe görbületi középpontjainak mértani helyét a görbe evolútájának nevezzük. Ez egyben a görbe normálisainak burkológörbéje is [1].

4.1. Feladat. Mutassuk meg, hogy a szívgörbe evolútája ugyancsak szívgörbe! Tekintsük az (1) egyenletrendszerrel megadott szívgörbét és több, különböző pontjában rajzoljuk meg az érintő- és normális egyeneseket! Készítsünk animációt a Desmos grafikus számológéppel az evolúta kialakulásának szemléltetésére! Adjuk meg az (1) szívgörbe normálisainak burkológörbéjeként kapott evolúta paraméteres egyenletrendszerét!

Megoldás. A feladat megoldását a szívgörbe paraméteres vektoregyenletének felírásával kezdjük. A megoldás lépései:

1. Az (1) szívgörbe paraméteres vektoregyenlete:

$$(2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t) \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

   A görbét rejtsük el! Ehhez a parancssor elején a szám alatti területre kell kattintani!

2. Hozzunk létre 60 elemű listát az a animációs paraméter használatával:

$$L = \left[0, \frac{2a\pi}{59}, ..., 2a\pi\right]$$

3. Definiáljuk a csúszkát az a paraméter számára! A kezdő- és a végpont értékét be kell állítani:

$$0 \le a \le 1$$

   A lépték értéke: 0.02. Ez a megadás $a = 1$ esetén 60 elemű listát ad.

4. Vegyünk fel pontokat az (1) szívgörbén az L lista használatával. A pontok első koordinátáját x_P jelölje! Ekkor:

$$x_P = 2\cos L - \cos 2L$$

5. A pontok második koordinátáját y_P-vel jelöljük:

$$y_P = 2\sin L - \sin 2L$$

   A $P(x_P, y_P)$ pontok megrajzolása nem szükséges lépés, csak a koordinátákra van szükségünk.

6. Az érintő egyenesek megrajzolásához megadjuk a meredekségeket:

$$\dot{x}(t) = -2\sin L + 2\sin 2L \quad \text{és} \quad \dot{y}(t) = 2\cos L - 2\cos 2L,$$

   továbbá

$$m = y' = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

   Így:

$$m = \frac{2\cos L - 2\cos 2L}{-2\sin L + 2\sin 2L}$$

7. Megadjuk az érintő egyeneseket:

$$y = m(x - x_P) + y_P$$

8. Végül felírjuk a normális egyenesek egyenletét:

$$y = -\frac{1}{m}(x - x_P) + y_P$$

9. Az animációs mód megadásakor az "Ismétlés egy irányba" lehetőséget válasszuk! Az animáció az a paraméter előtti lejátszás gombbal indítható.

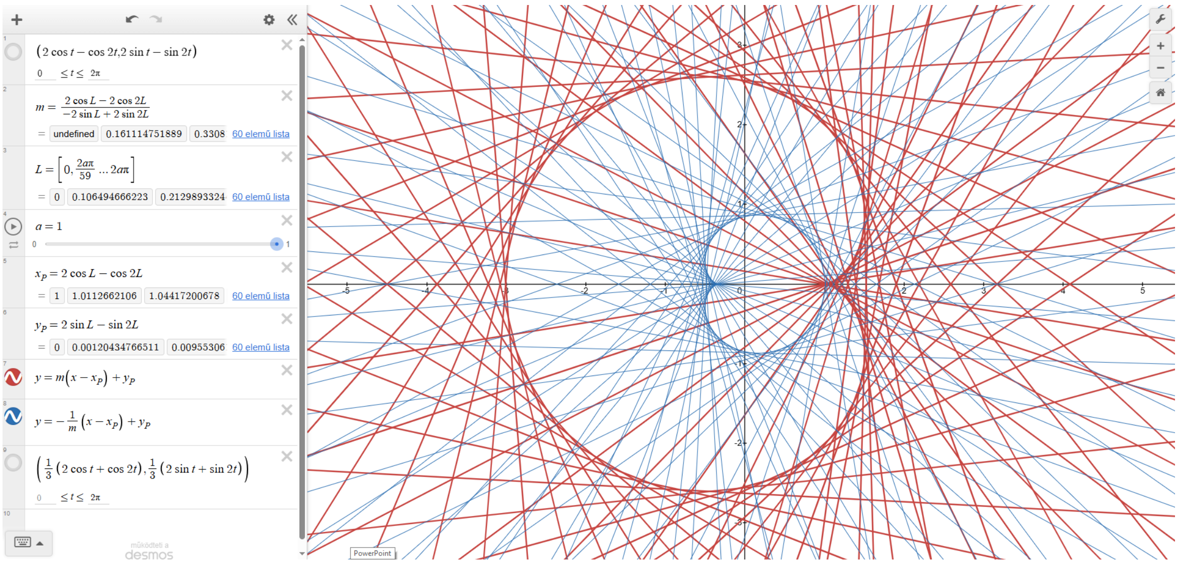
10. A szívgörbe evolútája egy ellentétes állású szívgörbe. Az evolúta paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3}(2\cos t + \cos 2t) \\ y(t) &= \frac{1}{3}(2\sin t + \sin 2t), \end{aligned} \tag{2}$$

ahol $t \in [0, 2\pi]$. Ezt a Desmosban a vektoregyenlet megadásával ellenőrizhetjük:

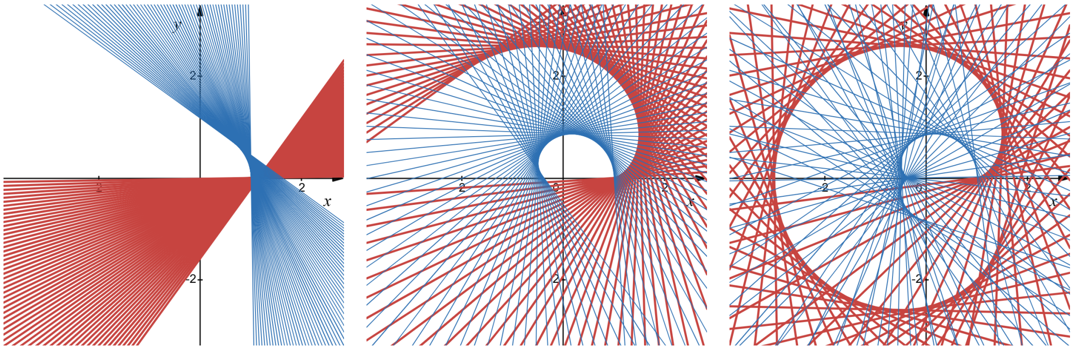
$$\left(\frac{1}{3}(2\cos t + \cos 2t), \frac{1}{3}(2\sin t + \sin 2t)\right)$$

A feladat megoldásának képernyőfotója a 8. ábrán látható. Az animációhoz vezető link: `https://www.desmos.com/calculator/f2fa696158`.



8. ábra. A 4.1. feladat megoldása a Desmosban.

A választott animációs módszerrel minden pillanatban 60 érintő- és normális egyenessel dolgozunk, ami lézershow-jellegű effektust kölcsönöz az animációnak. A 9. ábrán az előállítás három lépése látható.



(a) $a = 0.1$ (b) $a = 0.4$ (c) $a = 0.8$

9. ábra. Szívgörbék származtatása egyenesseregekkel az animációs paraméter különböző értékei mellett.

Ha a 4.1. feladatra olyan animációt szeretnénk készíteni, amelynél az egyenesek sorban, egymás után jelennek meg, akkor a lista megadásán kell változtatni. Például:

$$L = [0, 0.1, ..., 2a\pi]\,,$$

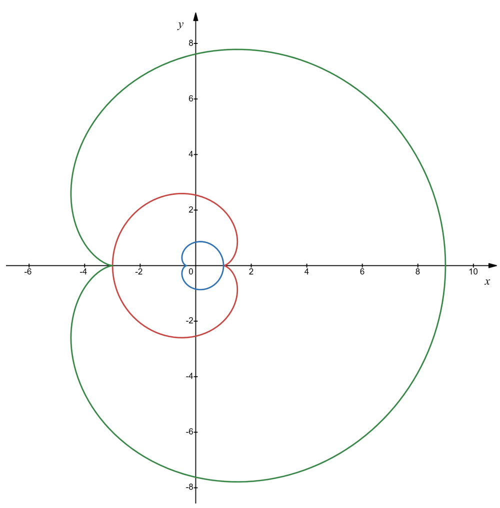
és az a animációs paraméter:

$$0 \leq a \leq 1$$

A lépték értéke: 0.1. Minden más összefüggés megtartható. Az animációhoz vezető link: `https://www.desmos.com/calculator/mdh8kbckdx`. □

Egy síkgörbe reguláris, ha folytonossága mellett van olyan paraméterezése, amelynél a derivált sohasem zérus. Ha g olyan reguláris síkgörbe, amelynek görbülete sehol sem zérus, akkor a g érintőinek tetszőleges ortogonális trajektóriáját g egy evolvensének nevezzük. Az evolvenst származtató g görbe az evolúta. Ha adottak a g_1 és g_2 síkgörbék és a g_2 görbe g_1-nek evolútája, akkor g_1 a g_2-nek evolvense [1, 8].

A szívgörbe evolútája egy kisebb szívgörbe, amely egyharmada az eredeti görbének, és ellenkező irányba néz [5]. Az evolvens szintén szívgörbe, amely ugyanolyan állású, mint az evolúta, azonban háromszorosa az eredeti görbének [17]. A 10. ábrán a három szívgörbe együtt látható. Piros színnel ábrázoltuk az (1) egyenletrendszerű szívgörbét. A kék színű görbe az (1) egyenletrendszerű szívgörbe evolútája, a zöld pedig az evolvense.



10. ábra. Szívgörbe evolútája és evolvense.

Összetettebbé tehetjük a 4.1. feladatot, ha azt a szívgörbét is vázoljuk az érintők megadásával, amelynek az (1) egyenletrendszerű szívgörbe az evolútája, vagyis az evolvenst. Ekkor az

$$\begin{aligned} x(t) &= 3(2\cos t + \cos 2t) \\ y(t) &= 3(2\sin t + \sin 2t), \end{aligned} \tag{3}$$

$t \in [0, 2\pi]$ paraméteres egyenletrendszerű szívgörbéhez kell érintőket húzni.

4.2. Feladat. Készítsünk animációt a Desmos grafikus számológéppel, amellyel egyszerre szemléltethető az (1) egyenletrendszerű szívgörbe evolútája és evolvense!

Megoldás. Olyan animációt készítünk, amelynél az egyenessereg tagjai sorban, egymás után jelennek meg, ezért az

$$L = [0, 0.1, ..., 2a\pi],$$

listát használjuk, valamint az a animációs paraméterre az alábbi beállítást adjuk meg:

$$0 \le a \le 1$$

A lépték értéke: 0.1. A lista ezzel a megadással 64 elemű. A 4.1. feladatra adott megoldást bővítjük a következő sorokkal:

- Vegyünk fel pontokat a (3) egyenletrendszerrel megadott szívgörbén az L lista használatával. A pontok első koordinátáját x_Q jelölje! Ekkor:

$$x_Q = 3(2\cos L + \cos 2L)$$

- A pontok második koordinátáját y_Q-val jelöljük:

$$y_Q = 3(2\sin L + \sin 2L)$$

  A $Q(x_Q, y_Q)$ pontok megrajzolása most sem szükséges lépés, csak a koordinátákra van szükség.

- Az érintő egyenesek megrajzolásához meghatározzuk a meredekségeket. Ezt a pontbeli derivált ismeretében tehetjük meg.

$$\dot{x}(t) = 3(-2\sin L - 2\sin 2L) \quad \text{és} \quad \dot{y}(t) = 3(2\cos L + 2\cos 2L),$$

  A meredekségre most az M jelölést alkalmazzuk:

$$M = y' = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

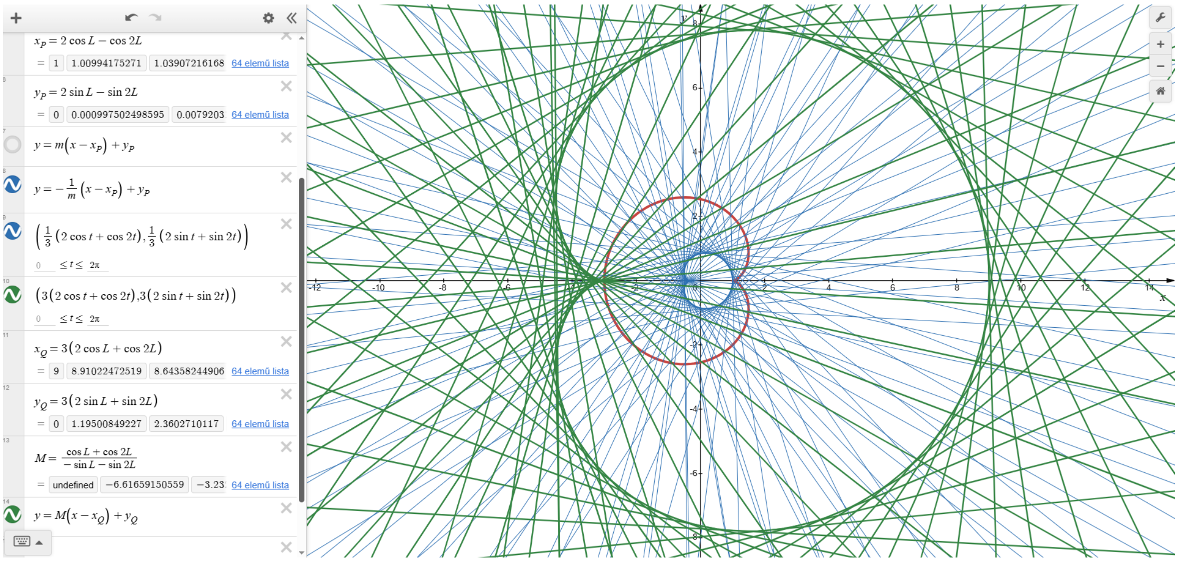
  Így:

$$M = \frac{\cos L + \cos 2L}{\sin L - \sin 2L}$$

- Megadjuk az érintő egyeneseket:

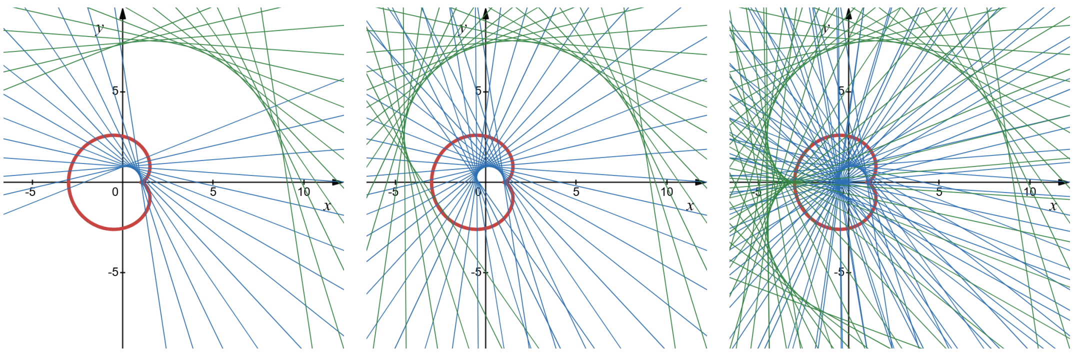
$$y = m(x - x_Q) + y_Q$$

A feladat megoldásához tartozó képernyőfotó a 11. ábrán látható. Az animációhoz vezető link: `https://www.desmos.com/calculator/awqqlha98z`.



11. ábra. A 4.2. feladat megoldása a Desmosban.

A jobb szemléltetés érdekében az (1) egyenletrendszerű görbéhez tartozó érintők megjelenítését kikapcsoltuk, a görbét az egyenletével jelenítettük meg piros színnel. A 12. ábrán az előállítás három lépése látható.



(a) $a = 0.2$ (b) $a = 0.4$ (c) $a = 0.8$

12. ábra. Evolúta és evolvens származtatása egyenesseregekkel az animációs paraméter különböző értékei mellett.

Az egyenesek vonalvastagságát érdemes csökkenteni. Az alapértelmezett érték 2.5. □

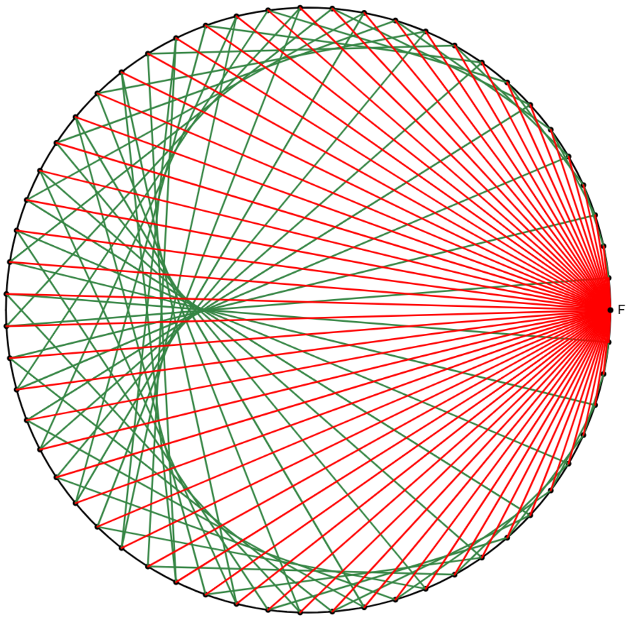
4.3. Megjegyzés. Más animációs lehetőség is választható a 4.2. feladat megoldására. Definiálhatjuk például az L_2 listát az L elemeinek ellentetjeként:

$$L_2 = -L$$

Írjuk át az evolvenshez tartozó összefüggésekben L-t L_2-re. Ekkor az evolvens generálásának iránya megváltozik, az evolútáé változatlan marad. Az animációra mutató link: `https://www.desmos.com/calculator/x8e0pumrc4`.

5. Kausztikus görbe

A kausztikus görbe a g görbe által egy adott pontszerű F fényforrásról visszavert fénysugarak burkológörbéje. Ha a g görbe kör, akkor a kausztikus görbe lehet szívgörbe, ha az adott pont illeszkedik a körre [9, 14].



13. ábra. Szívgörbe előállítása kausztikus görbeként.

Ez az optikai tulajdonság látható egy csésze alján, ha zseblámpával megvilágítjuk oldalról. A fény visszaverődik a csésze oldaláról és az alján megjelenik a szívgörbe [4, 12, 16]. Tehát, ha a kör egy F pontjából kiinduló egyeneseket rajzolunk és hagyjuk, hogy ezek visszaverődjenek a körvonalról úgy, hogy a beesési szög megegyezik a visszaverődési szöggel, akkor a szívgörbe ezen egyenesek burkológörbéje [9, 17].

5.1. Feladat. Készítsünk animációt a Desmos grafikus számológéppel a szívgörbe kausztikus görbeként való előállítására! Tekintsük az $x^2 + y^2 = 1$ kört és a fényforrás legyen az $F(1, 0)$ pontban! Adjuk meg a keletkező szívgörbe paraméteres egyenletrendszerét!

Megoldás. Vázoljuk a Desmos grafikus számológépben az $x^2 + y^2 = 1$ kört és az $F(1, 0)$ pontot.

1. Az $x^2 + y^2 = 1$ kör paraméteres vektoregyenlete:

$$(\cos t, \sin t) \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

2. Felvesszük az F pontot és címkét adunk hozzá:

$$F = (1, 0)$$

3. Lista segítségével felosztjuk a $[0, 2\pi]$ intervallumot n egyenlő részre:

$$L = \left[0, \frac{2\pi}{n}, ..., 2\pi\right]$$

4. Létrehozzuk a csúszkát az n paraméter számára. A kezdő- és a végpont értékét megadjuk:
$$0 \leq n \leq 50$$
A lépték értéke: 1. Ez a megadás 51 elemű listát eredményez.

5. Vegyünk fel pontokat a megadott körön az L lista használatával!
$$P = (\cos L, \sin L)$$

6. Kössük össze a körvonalon kijelölt pontokat F-fel! A szakaszok a polygon parancs segítségével rajzolhatók meg:
$$\text{polygon}(P, F)$$

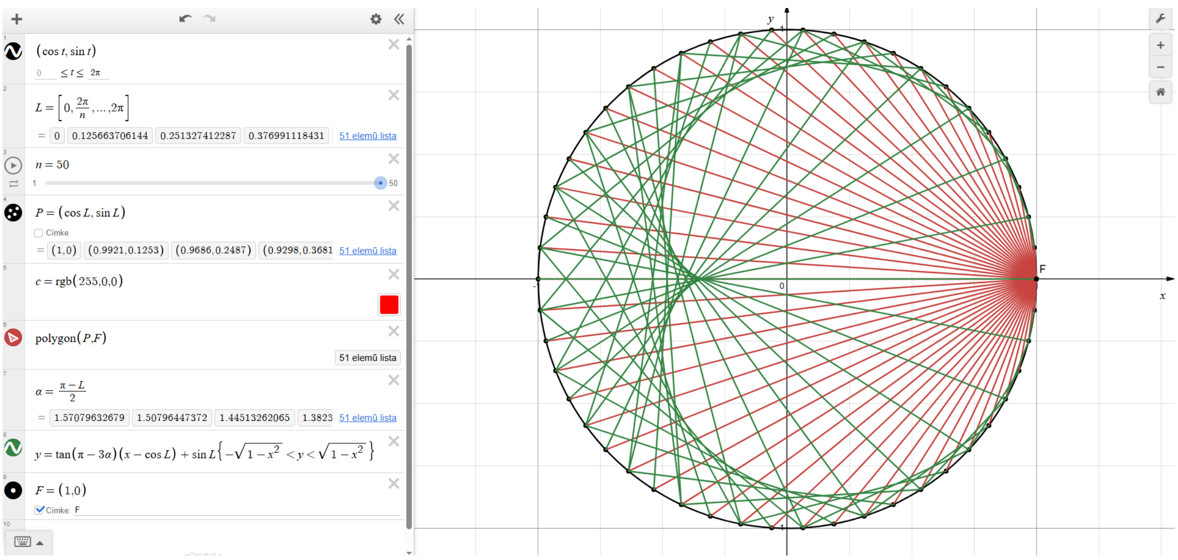
7. A c =rgb(255,0,0) paranccsal definiáljuk a piros színt, és színezzük pirosra a körvonal pontjaiba érkező fénysugarakat!

8. Az OFP háromszög egyenlőszárú, így az α szög radiánban:
$$\alpha = \frac{\pi - L}{2}$$

9. α-val felírható a visszaverődő fénysugarakat reprezentáló egyenessereg. Kapcsos zárójelben korlátozó feltételt adunk meg, tehát csak a körben lévő szakaszokat jelenítjük meg:
$$y = \tan(\pi - 3\alpha)(x - \cos L) + \sin L \left\{-\sqrt{1 - x^2} < y < \sqrt{1 - x^2}\right\}$$

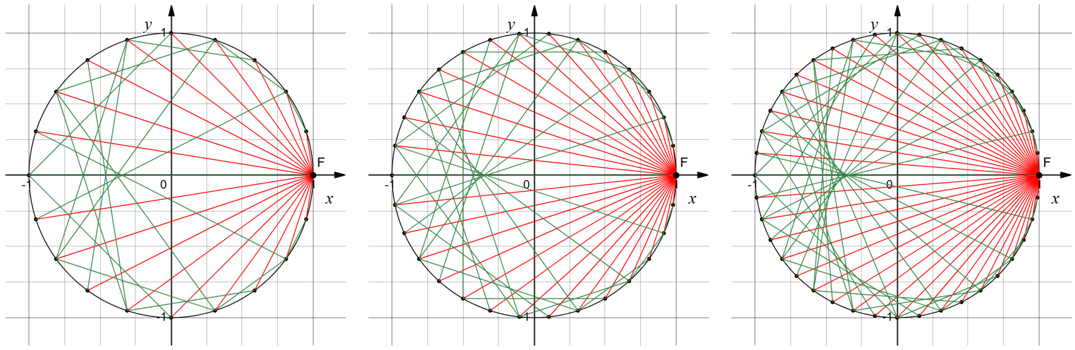
10. Az animáció sebességét és módját az indítás előtt állítsuk be! Az animáció az n paraméter előtti lejátszás gombbal indítható.

A feladat megoldását mutató képernyőfotó a 14. ábrán látható. Az animációhoz vezető link: `https://www.desmos.com/calculator/ujlculsf1x`.



14. ábra. A 5.1. feladat megoldása a Desmosban.

Az animáció során a pontok száma folyamatosan növekszik, tehát egyre több szakasz jelenik meg. A 15. ábrán az előállítás három lépése látható.



(a) $n = 20$ (b) $n = 30$ (c) $n = 40$

15. ábra. Szívgörbe származtatása kausztikus görbeként az animációs paraméter különböző értékei mellett.

A burkológörbeként előállított szívgörbe paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3}(2\cos t + \cos 2t) \\ y(t) &= \frac{1}{3}(2\sin t + \sin 2t), \end{aligned} \tag{4}$$

ahol $t \in [0, 2\pi]$. A Desmosban a vektoregyenlet megadásával és megjelenítésével ellenőrizhető, hogy a felírt összefüggés helyes. $\square$

6. Záró gondolatok

A cikkben bemutatott animációs technikák a szívgörbével kapcsolatos feladatok szemléltetésére a vizuális megjelenítés támogatásán túl a matematikai összefüggésekbe is betekintést nyújtanak. Az animációk segítségével a diákok nem csupán passzív megfigyelői a matematikai folyamatoknak, hanem aktívan részt vehetnek azok alakításában. Kísérletezhetnek a paraméterekkel, és felfedezhetik a különböző geometriai tulajdonságokat. A bemutatott példákból jól látható, hogy az animációk változatos alternatívát képviselnek a hagyományos tanítási módszerekhez képest. Fontos hangsúlyozni, hogy a Desmos grafikus számológép használata nem korlátozódik a kész megoldások tanulmányozására, mert ösztönzi a diákokat a kreatív problémamegoldásra és a matematikai gondolkodás fejlesztésére. A listaalapú megközelítés és a paraméterekkel való kísérletezés lehetővé teszi, hogy a diákok saját maguk fedezzék fel a matematikai összefüggéseket, és mélyebb megértést szerezzenek a témában.

Reméljük, hogy a bemutatott feladatok és megoldások inspirációt nyújtanak oktatóknak és diákoknak egyaránt a Desmos grafikus számológépben rejlő lehetőségek további feltárására.

Köszönetnyilvánítás. Készült az RRF-2.3.1-21-2022-00013 azonosítószámú "Társadalmi Innovációs Nemzeti Laboratórium" elnevezésű projektben, Magyarország Helyreállítási és Ellenállóképességi Tervének keretében, az Európai Unió Helyreállítási és Ellenállóképességi Eszközének támogatásával.

Hivatkozások

[1] Audin, Michèle: *Geometry.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2002

[2] Barling, Christopher: Lockwood's "curves" on a graphics calculator. In: *Multimedia for the advancement of mathematics, the 7th Asian Technology Conference in Mathematics (ATCM 2002), Melaka, Malaysia, 17-21 December 2002 / Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Tilak de Alwis and Faqir M. Bhatti (eds.)* (2002). https://doi.org/10.25916/sut.26290057.v1

[3] Bhatia, Kanika ; Chakraborty, Pinaki: Teaching algebra to high school students using Desmos Graphing Calculator. In: *IETE Journal of Education* 65 (2024), Nr. 2, 128–138. https://doi.org/10.1080/09747338.2024.2341068

[4] Bossart, Aleksi ; Fleury, Romain ; Apffel, Benjamin: Science of a coffee cup: A physicist walks into a bar.... In: *Physics of Fluids* 37 (2025), Nr. 3. https://doi.org/10.1063/5.0253960. – Article number: 037119

[5] Butchart, John H.: Some properties of the limaçon and cardioid. In: *The American Mathematical Monthly* (1945), Nr. 7, 384–387. https://doi.org/10.2307/2304641

[6] Chechan, Batoul ; Ampadu, Ernest ; Pears, Arnold: Effect of using Desmos on high school students' understanding and learning of functions. In: *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* 19 (2023), Nr. 10. https://doi.org/10.29333/ejmste/13540. – Article number: em2331

[7] Chorney, Sean: Classroom practice and craft knowledge in teaching mathematics using Desmos: Challenges and strategies. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 53 (2022), Nr. 12, 3203–3227. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1931974

[8] Farkas, Miklós ; Sonkoly, Pál: *Differenciálgeometria és vektoranalízis (Matematika VI. kötet).* Műegyetemi Kiadó, 2000

[9] Hoffmann, Miklós: *Topológia és differenciálgeometria.* Educatio Kht., Hallgatói Információs Központ, 2011

[10] Hraskó, András: *Egy szív titkai.* https://matek.fazekas.hu/images/cikkek/20041116_cikkek_hraskoandras_kardoid.pdf. Version: 2004

[11] Kohen, Zehavit ; Amram, Meirav ; Dagan, Miriam ; Miranda, Tali: Self-efficacy and problem-solving skills in mathematics: the effect of instruction-based dynamic versus static visualization. In: *Interactive Learning Environments* 30 (2022), Nr. 4, 759–778. https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1683588

[12] Kovács, Zoltán: Easy (but exact) study of caustics of conics. In: *Electronic Journal of Mathematics & Technology* 17 (2023), Nr. 3, S. 185–205

[13] Liang, Senfeng: Teaching the concept of limit by using conceptual conflict strategy and Desmos Graphing Calculator. In: *International Journal of Research in Education and Science* 2 (2016), Nr. 1, 35–48. https://doi.org/10.21890/ijres.62743

[14] Lockwood, Edward H.: *A book of curves.* Cambridge University Press, 1967

[15] Meto, Rahmia M. ; Paleta, Leonard M.: Students' learning outcomes on circle equations through Desmos Graphing Calculator. In: *Electronic Journal of Mathematics & Technology* 6 (2025), Nr. 1, 570-578. https://doi.org/10.47857/irjms.2025.v06i01.01931

[16] Richeson, David: Folding a cardioid. In: *Math Horizons* 32 (2025), Nr. 4, 10–12. https://doi.org/10.1080/10724117.2025.2461417

[17] Szilágyi, Szilvia ; Körei, Attila: Módszertani innovációk és alkalmazásaik a szívgörbe projekt alapú tanulásában. In: *GRADUS* 11 (2024), Nr. 1, 1–12. https://doi.org/10.47833/2024.1.CSC.006

[18] Szilágyi, Szilvia ; Körei, Attila ; Vaičiulytė, Ingrida: An Innovative STEAM-Based Method for Teaching Cycloidal Curves in Engineering Higher Education. In: *Education Sciences* 14 (2024), Nr. 10. https://doi.org/10.3390/educsci14101087. – Article number: 1087

[19] Yusoff, Farahani ; Wan Mamat Pauzam, Wan S.: Exploring students' understanding of mathematical function through Desmos. In: *International Conference on Advancing and Redesigning Education* (2023), 551–557. https://doi.org/10.1007/978-981-97-4507-4_61

[20] Zhang, Ying ; Wang, Pengjin ; Jia, Wei ; Zhang, Aijun ; Chen, Gaowei: Dynamic visualization by GeoGebra for mathematics learning: a meta-analysis of 20 years of research. In: *Journal of Research on Technology in Education* 57 (2025), Nr. 2, 437–458. https://doi.org/10.1080/15391523.2023.2250886