Pi Matematikai, Fizikai és Informatikai Folyóirat
Miskolci Egyetem

1. kötet, Mat. füzet, 6-18. oldal, 2025.

A Van Hiele-szintek és a geometriai ábraértelmezés kapcsolata

Győry Ákos
Miskolci Egyetem, Gazdaságtudományi Kar, Matematikai Intézet
Nyíregyházi Egyetem, Matematika és Informatika Intézet
akos.gyory@uni-miskolc.hu
gyory.akos@nye.hu

2025. december 29.

Kivonat

Elsőéves matematika szakos egyetemi hallgatók geometriai szemléletének fejlettségét vizsgáltuk. Kutatásunk célja egyrészt annak feltárása volt, hogy a hallgatók átlagos Van Hiele-szintje megfelel-e az érettségi követelmények által implikált elvárásoknak, másrészt annak vizsgálata, hogy kimutatható-e kapcsolat a Van Hiele-szintek és a helyes geometriai ábraértelmezés között. A méréshez az Usiskin-féle Van Hiele-tesztet, az ábraértelmezés vizsgálatához pedig Usiskin bizonyítási tesztjének egy feladatát használtuk. Az eredmények azt mutatták, hogy a hallgatók jelentős része nem éri el az érettségi követelmények által feltételezett szintet, és statisztikailag szignifikáns kapcsolat sem mutatható ki a Van Hiele-szintek és a geometriai ábraértelmezés pontossága között.

1. Bevezető

A geometria tanítása és tanulása évtizedek óta a a matematikaoktatás egyik legtöbbet vizsgált területe. Számos vizsgálat igazolta, hogy a tanulók a geometriai problémák megoldásakor rendszeresen nehézségekbe ütköznek [8, 10, 11].

A középszintű érettségi feladatok jelentős része valamilyen geometriai ábrához kapcsolódik, amely a szöveg értelmezését támogatja [15].

Noha a részletes vizsgakövetelmények előírják, hogy a vizsgázó „Tudjon a feladatok megoldásához megfelelő ábrát készíteni”, a geometriai ábrák megfelelő értelmezése explicit módon nem jelenik meg elvárásként. Ugyanakkor az implicit követelményrendszer alapján elvárás, hogy a tanulók képesek legyenek az ábra vizuális információit helyesen értelmezni,

Kulcsszavak: Van Hiele-szintek; Usiskin-féle Van Hiele-teszt; geometriai ábraértelmezés; Usiskin-féle bizonyítási teszt. AMS Subject Classification: 97D20.

és azokat a formális dedukció során felhasználni [16]. Korábbi doktori kutatásaink során azt tapasztaltuk, hogy egyes geometriai problémák esetén a tanulók többsége az ábrát helytelenül értelmezve hibás következtetésekre jutott [9]. E tapasztalatok hívták fel a figyelmemet arra, hogy a geometriai ábraértelmezés képessége szorosan összefügghet a geometriai gondolkodás fejlettségével.

Kutatásunk célja annak feltárása volt, hogy elsőéves matematikatanár szakos hallgatók geometriai szemlélete és ábraértelmezési képessége megfelel-e annak a szintnek, amely elvárható a középszintű érettségire felkészítő tanári szerepkörből fakadóan. A vizsgálat középpontjában egyrészt a hallgatók Van Hiele-szintjének feltérképezése, másrészt a geometriai ábrák félreértelmezésére érzékeny feladatokban alkalmazott megoldási stratégiák elemzése állt.

2. Elméleti háttér

2.1. A Van Hiele-elmélet

A geometriai gondolkodásmód leírásának egyik széles körben elfogadott modellje a Van Hiele-elmélet, amelyet Dina van Hiele-Geldof (1957) és Pierre van Hiele (1959) holland kutatók az 1950-es években publikált doktori disszertációikban dolgoztak ki [20, 21]. Kutatásaik során a tanulók geometriai bizonyítási nehézségeire fókuszáltak, és megfigyeléseik alapján arra a következtetésre jutottak, hogy a geometriai szemlélet fejlődése egymásra épülő szinteken megy végbe.

Az elmélet szerint a geometriai gondolkodás egymást követő szinteken keresztül jut el az alakzatok globális felismerésétől a formális geometriai bizonyításokig [19]. A szintek hierarchikusak, vagyis egy adott szint elérése feltételezi az előző szintek elsajátítását. Minden szint rá jellemző matematikai nyelvvel rendelkezik, ezért a hatékony tanítás megköveteli, hogy a tanár a tanulók aktuális Van Hiele-szintjének megfelelő fogalmi szinten kommunikáljon. A kutatók vizsgálataik kezdetén feltételezték, hogy a geometriaoktatás sikertelenségeinek egyik fő oka az, hogy az oktatás gyakran nem a tanulóknak megfelelő Van Hiele-szinten folyik.

2.1.1. A Van Hiele-szintek bemutatása

Az elmélet öt egymást követő szinttel írja le a geometriai szemlélet fokozatos fejlődését.

1. szint – A globális felismerés szintje. A tanulók az alakzatokat egységes egészként érzékelik, azok összetevőit (oldalak, szögek, átlók) még nem tudják tudatosan azonosítani. Képesek megnevezni az alakzatokat, de nem ismerik fel a köztük lévő kapcsolati összefüggéseket (pl. nem sorolják a négyzetet a téglalapok közé). Indoklásaik elsősorban közvetlen vizuális észlelésre épülnek.

2. szint – Az elemzés szintje. A tanulók már képesek az alakzatokat alkotó elemek elkülönítésére, és felismerik azok tulajdonságait. E jellemzők alapján csoportosítani tudják a geometriai formákat, ugyanakkor még nem látnak összefüggést különböző fogalmak között, és nem alkotnak formális definíciókat. Ok-okozati kapcsolatok megfogalmazása ebben a szakaszban még nem jellemző. A négyzeteket továbbra sem sorolják a téglalapok közé, de például már tudatosan felismerik, hogy a rombusz minden oldala egyenlő hosszúságú.

3. szint – Az informális dedukció szintje. A tanulók rendszerezik az alakzatok tulajdonságait, és felismerik az ezek közötti kapcsolatokat (például minden négyzet egyben

téglalap). Képesek összefüggéseket megérteni a fogalmak között, például felismerik, hogy egy háromszögben a nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög van. Megértik az egyszerűbb következtetési láncokat, indoklásaik már informális deduktív érvelésen alapulnak.

4. szint – A formális dedukció szintje. A tanulók megértik a deduktív rendszer felépítését, és különbséget tudnak tenni definíciók, axiómák, állítások és következmények között. Kialakul bennük az állítások bizonyítása iránti igény, és képesek az euklideszi axiómarendszerben egyszerűbb formális bizonyításokat megalkotni az ismert tényekre támaszkodva. Többféle bizonyítási technikát alkalmaznak (például indirekt bizonyítás, skatulyaelv, teljes indukció), valamint tisztában vannak a szükséges és elégséges feltételek fogalmával. Teljes mértékig axiomatikus érvelésre azonban még nem képesek, a bizonyításra szoruló állításokat gyakran tényként kezelik.

5. szint – A formális logika szintje. Ezen a szinten a tanulók a geometriai tartalomtól függetlenül is képesek deduktív következtetések megértésére és végrehajtására. Felismerik a különböző axiómarendszerek közötti összefüggéseket. Nemcsak az euklideszi, hanem más geometriai rendszerekben is képesek következtetéseket levonni.

A Van Hiele-elmélet empirikus vizsgálatára több kutatás is készült az 1980-as években [19, 14, 1, 3, 7], amelyek megerősítették, hogy a szintek jól jellemzik a geometriai gondolkodás fejlődését. Egyedül az ötödik szint megítélése tekintetében alakult ki vita: több szerző szerint ez a szint nem mérhető egzakt módon, sőt fennáll annak a lehetősége is, hogy egyáltalán nem értelmezhető tanulói kontextusban [19, 2, 22].

A Van Hiele-szintek meghatározására több mérőeszközt is kidolgoztak [19, 14, 12]. Ezek közül jelen kutatás az Usiskin-féle verziót veszi alapul.

2.2. A hibás geometriai ábraértelmezés megjelenése a szakirodalomban

A geometriai problémák megoldása során a tanulók gyakran a megadott ábra perceptuális jegyeire támaszkodva érvelnek. Dreyfus [4] rámutat, hogy ez a fajta „vizuális érvelés” sok esetben megelőzi a formális, deduktív gondolkodást. A szerző szerint a hibás következtetések gyakran abból adódnak, hogy a tanulók az ábrák által sugallt képi benyomásokra hagyatkoznak ahelyett, hogy a feladat feltételeit fogalmilag értelmeznék. E jelenség különösen azoknál figyelhető meg, akiknek a gondolkodása még nem éri el a formális deduktív érvelés szintjét, és a geometriai ábrát elsősorban intuitív, nem pedig logikai alapon értelmezik.

A hibás ábraértelmezés jelenségét empirikus vizsgálatok is megerősítik. Dvora és Dreyfus [5] középiskolai tanulók körében végzett kutatásuk során kimutatták, hogy a hibás megoldások 72%-a olyan feltevésekhez kapcsolódott, amelyeket a tanulók a geometriai ábrából vontak le, jóllehet ezek nem következtek a feladat szövegéből. A tanulók gyakran természetesnek vették például szakaszok egyenlőségét vagy szögek derékszögűségét pusztán azok vizuális megjelenése alapján. E megállapítás összhangban áll Dreyfus [4] eredményeivel. A jelenség arra utal, hogy az ábrák erőteljes szemléleti hatása a formális geometriai gondolkodás hiányában hamis következtetésekhez vezethet.

A hibás ábraértelmezés mögött meghúzódó kognitív mechanizmusokat Fischbein [6] a geometriai fogalmak kettős természetével magyarázza. Értelmezése szerint a geometriai fogalmaknak két komponense van:

- *figuratív* vagy *formai*, valamint
- *fogalmi* vagy *konceptuális* komponens.

A formai komponens az egyén perceptuális-intuitív benyomásaihoz kötődik, míg a *fogalmi* komponens a formális, definíciókon alapuló tudáselemeket képviseli. Amennyiben a formai összetevő dominál, a tanulók hajlamosak a geometriai következtetéseiket a vizuális megjelenésre alapozni, még akkor is, ha ez ellentmond a fogalmi meghatározásoknak. Ennek következtében a perceptuális benyomások könnyen felülírják a formális-logikai gondolkodást.

A Fischbein által leírt kettős természetet tovább árnyalja Mariotti [13], aki rámutat, hogy a hibás geometriai következtetések gyakran a formai és a fogalmi jelentés elszakadásából fakadnak. Ilyen esetben az ábra önállósulva, perceptuális benyomásként jelenik meg a képzeletben, nem mint a fogalom pontos vizuális reprezentációja. Ez félrevezető értelmezésekhez vezethet. Mariotti szerint a probléma különösen akkor jelentkezik, amikor a tanulók szemléleten alapuló érvelésről próbálnak áttérni a formális, deduktív bizonyításra. Ilyenkor a formai komponens dominanciája miatt a fogalmi struktúrához való kapcsolódás elmarad, így a deduktív érvelés stabil feltételei hiányoznak. Ez a megközelítés rámutat arra, hogy a geometriai ábrák helyes értelmezésének alapvető feltétele a formai és fogalmi komponensek összefonódása.

3. Kutatási kérdések

Kutatásunk célja annak feltárása volt, hogy elsőéves matematikatanár szakos hallgatók geometriai szemlélete és ábraértelmezési képessége megfelel-e a felsőoktatásban tanuló hallgatókkal szemben implicit módon elvárt szintnek. Ennek vizsgálatához három kutatási kérdést határoztunk meg:

1. Milyen Van Hiele-szinten állnak átlagosan az elsőéves hallgatók?
2. Meg tudnak-e oldani egy ábrával ellátott középszintű geometriafeladatot, és milyen módszereket alkalmaznak a megoldás során?
3. Kimutatható-e összefüggés a hallgatók Van Hiele-szintje és a feladatmegoldás sikeressége között?

4. A kutatás módszertana

4.1. A kutatás körülményei

A vizsgálat a Miskolci Egyetem matematikatanár mesterképzési szakának (osztott MA, levelező munkarend) első évfolyamán zajlott a 2024/2025-ös tanév tavaszi félévében, a Szakmódszertan III. (diszciplináris, matematika) című kurzus keretében. Az adatfelvétel egy egyetemi szemináriumi óra végén, papíralapú formában történt. A hallgatók azonosítók segítségével anonim módon töltötték ki a feladatlapokat. A részvétel a tantárgyi követelmények részeként történt, amiről a hallgatók előzetesen tájékoztatást kaptak.

4.2. A minta

A kutatásba a kurzus teljes hallgatói létszámát bevontuk, összesen 29 főt. A résztvevők mind rendelkeztek korábbi alap- vagy mesterdiplomával, azonban matematikai előképzettségük eltérő volt: csupán két fő rendelkezett matematika alapszakos háttérrel, míg

a többiek más diszciplináris területekről érkeztek. Ez a szakmai heterogenitás lehetőséget teremtett arra, hogy a Van Hiele-szintek szélesebb skálán mozogjanak, ami kedvező feltételeket biztosított annak vizsgálatához, hogy a geometriai ábrák helyes értelmezése összefüggésbe hozható-e a gondolkodási szinttel.

4.3. A mérőeszközök

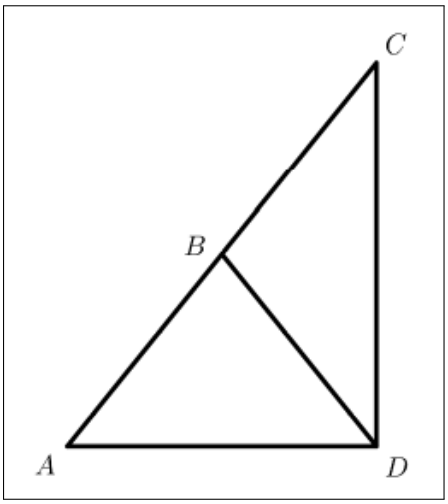
4.3.1. A Van Hiele-teszt

A hallgatók geometriai gondolkodási szintjének meghatározására az Usiskin-féle Van Hiele-teszt [19] magyar nyelvű, 25 itemből álló, feleletválasztós változatát alkalmaztuk. Jelen vizsgálatban kizárólag az 1–20. feladatokat vettük figyelembe, mivel ezek az 1–4. Van Hiele-szinteket mérik (1–5.: 1. szint; 6–10.: 2. szint; 11–15.: 3. szint; 16–20.: 4. szint). A 21–25. feladatok az 5. Van Hiele-szinthez kapcsolódnak, amelynek léte és mérhetősége a szakirodalomban vitatott (lásd 2.1.1 alfejezet), ezért ezeket az elemzésből kihagytuk.

4.3.2. A geometriafeladat és megoldásai

A második mérőeszköz egy középszintű geometriai probléma volt, amely az Usiskin-féle CDASSG Geometry Test egyik feladata [19, 177. o.]. A feladat kiválasztását korábbi doktori kutatásom tapasztalatai is indokolták, ahol megfigyelhető volt, hogy a hallgatók jelentős része az ábrából levont (l. 1. ábra), de a szöveg által nem alátámasztott feltételezések alapján hibás következtetésekre jutott [9]. Emiatt jelen vizsgálatokban is ezt a problémát választottuk, hogy feltárjuk, a félrevezető ábraértelmezés összefüggésben áll-e a hallgatók Van Hiele-szintjével.

A feladat teljes szövege: *Az alábbi ábráról a következőket tudjuk: B az AC szakasz felezőpontja. $AB = BD$. Bizonyítsd be, hogy a CDA szög derékszög!*



1. ábra. A helyes ábraértelmezést vizsgáló feladathoz mellékelt ábra.

Megoldás I. — hatodik osztályos megközelítés: A feladat megoldásához a 6. évfolyamon a kerettanterv szerint előírt alapvető geometriai ismeretek szükségesek: a háromszög belső szögeinek összege 180°, illetve az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeinek egyenlősége [17, 85. o.].

1. Az $AB = BD$ feltétel miatt $\alpha := \angle DAC = \angle DAB = \angle ADB$.
2. Mivel $AB = BD$ és B felezi az AC-t, ezért $CB = AB = BD$, így a CDB háromszög egyenlő szárú.
3. A 2. lépés miatt $\gamma := \angle ACD = \angle BCD = \angle CDB$.
4. Az 1. és 3. lépésekből következik, hogy $\angle ADC = \alpha + \gamma$.
5. Mivel az ADC háromszögben a belső szögek összege 180°, így $2\alpha + 2\gamma = 180°$, ahonnan pedig $\angle CDA = \alpha + \gamma = 90°$. Ezzel beláttuk, hogy $\angle CDA = 90°$.

Megoldás II. — kilencedikes osztályos megközelítés: A feladat megoldásához a 9. évfolyamon a kerettanterv szerint előírt Thalész-tétel ismerete szükséges [18, 40. o.].

1. Rajzoljuk meg az AC szakasz Thalész-körét. Ennek középpontja B.
2. Mivel $BA = BD = BC$, így D illeszkedik erre a körre.
3. A Thalész-tétel értelmében $\angle CDA = 90°$. Ezzel az állítást beláttuk.

4.1. Megjegyzés. A két megoldás közös eleme, hogy *deduktív* érvelés lépései vezetnek el a $\angle CDA$ szög meghatározásához, függetlenül a vizuális benyomásoktól.

4.4. Az adatfeldolgozás módja

A Van Hiele-szintek meghatározásakor a hallgatók eltérő előképzettsége miatt a szakirodalomban elfogadott gyenge kiértékelési eljárást alkalmaztuk. E szerint egy adott szintet teljesítettnek tekintettünk, ha az adott szinthez tartozó öt kérdésből legalább háromra (3/5) helyes válasz született, és az összes alacsonyabb szint is teljesült. Alternatív megközelítésként ismert az erős kiértékelés (4/5) és a vegyes megoldás is, amely szintenként eltérő kritériumokat alkalmaz (pl. 1–2. szint: 3/5; 3–4. szint: 4/5).

A megtévesztő ábrával ellátott geometriai feladatra adott válaszokat helyesség szempontjából kategorizáltuk (*helyes / hibás*), valamint kvalitatív módon elemeztük a megoldási stratégiákat (pl. vizuális következtetés, hatodikos megközelítés, Thalész-tétel alkalmazása). Megvizsgáltuk továbbá, hogy a feladatmegoldás sikeressége összefüggésbe hozható-e a résztvevők Van Hiele-szintjével. Ezt az ábraértelmezés szempontjából is megvizsgáltuk.

5. Eredmények és értelmezésük

5.1. Kutatási kérdés: Milyen Van Hiele-szinten állnak átlagosan az elsőéves hallgatók?

A vizsgálatban résztvevő 29 egyetemi hallgató Van Hiele-szintjét az 1. táblázat szemlélteti.

1. táblázat. A Van Hiele-szintek eloszlása.

Van Hiele-szint	**Létszám (fő)**
0	1
1	1
2	0
3	12
4	15

Az átlagos Van Hiele-szint 3,34 volt. Két főtől eltekintve mindenki elérte az informális dedukció szintjét, a csoport fele pedig teljesítette a formális dedukció kritériumait.

A 0. szint eredetileg ugyan nem része a Van Hiele-féle ötszintű modellnek, de a mérések teljessége végett Usiskin bevezette[19]. Ezt a vizsgálataink során megtartottuk.

A vizsgálat eredményei szerint a hallgatók többsége legalább az informális dedukció szintjén gondolkodik, a csoport közel fele nem rendelkezik a középszintű matematikaérettségihez szükséges formális deduktív gondolkodással. Ez a geometriai fogalmak stabil megértésének részleges hiányára utalhat.

5.2. Kutatási kérdés: Meg tudnak-e oldani egy ábrával ellátott középszintű geometriafeladatot, és milyen módszereket alkalmaznak a megoldás során?

A vizsgált feladatban kulcsszerepet játszott az ábra helyes értelmezése, valamint a háromszögre vonatkozó tételek és az ábra közötti kapcsolat felismerése.

2. táblázat. A feladatmegoldások eredménye.

Eredmény	**Létszám (fő)**
Helyes megoldás	16
Hibás megoldás	13

A hallgatók közül tizenhatan jutottak helyes megoldásra, míg tizenhárman hibásan gondolkodtak vagy nem fejezték be a megoldást (l. 2. táblázat). Az eredmények ismeretében megállapítható, hogy a vizsgált csoport alig több mint fele volt képes egy ilyen jellegű, ábrával ellátott geometriafeladat sikeres megoldására. A válaszok jelentős része nem tartalmazott helyes érvelést, ami felveti az ábrák értelmezésének és a megfelelő geometriai módszer kiválasztásának problémáját.

3. táblázat. A hibás megoldások típus szerinti megoszlása.

Hibatípus	**Létszám (fő)**
Helytelen ábraértelmezés	9
Egyéb hibák	4

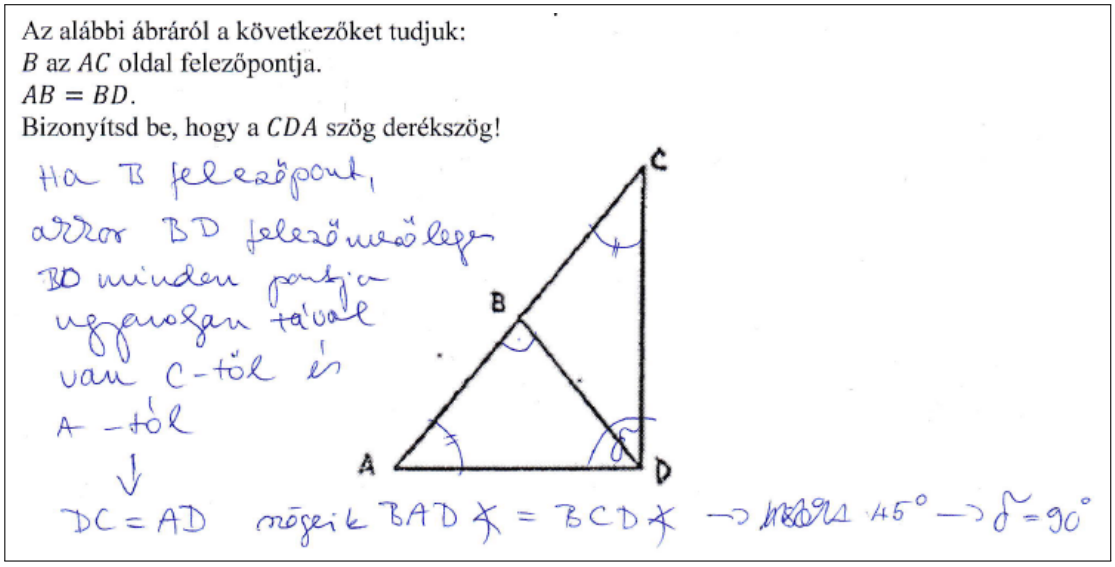
A hibás megoldások részletes elemzése rámutat arra, hogy a sikertelen bizonyítások döntő hányada, tizenháromból kilenc, az ábra félreértelmezésére vezethető vissza (l. 3. táblázat). Ide soroltuk azokat a megoldásokat, amelyekben a hallgatók a DB szakaszt az ABC háromszög magasságának tekintették, az ADB és DCB háromszögeket egybevágónak feltételezték, vagy a DB szakaszt szögfelezőnek értelmezték (l. 4. táblázat).

4. táblázat. A hibás megoldások részletes típus szerinti megoszlása.

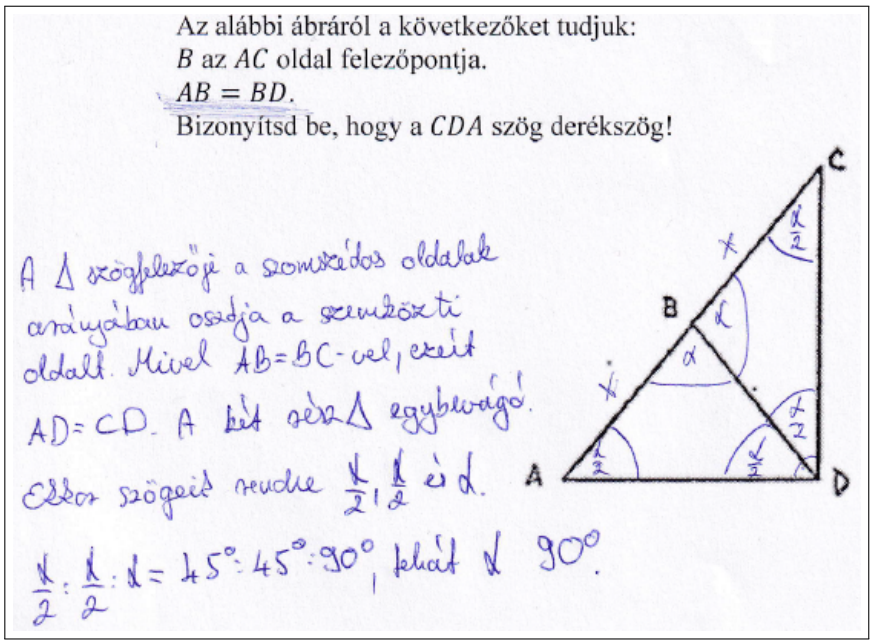
Hibatípus	**Gyakoriság (fő)**
Csak a megadott adatok felvételéig jut.	4
Üresen hagyja a feladatot.	1
A DB szakaszt magasságnak tekinti.	2
Az ADB és DCB háromszögeket egybevágónak feltételezi.	3
A DB szakaszt szögfelezőnek tekinti.	3
Összesen	**13**

Az 4. táblázat adatai azt mutatják, hogy a hibás megoldások között viszonylag csekély azoknak az eseteknek a száma, amikor a hallgatók egyáltalán nem kezdtek neki a feladatnak (1 fő), illetve amikor pusztán az adatok felvételéig jutottak (4 fő). Ezekben az esetekben elsősorban a feladat nehézségének szubjektív megítélése állhat a háttérben. Ezzel szemben a sikertelen megoldások túlnyomó részében (9 fő esetén) a hallgatók aktívan próbálták értelmezni az ábrát, ám közben tévesen azonosítottak bizonyos geometriai viszonyokat (magasság, szögfelező, egybevágóság). Ezekben az esetekben tehát a hallgatók explicit vagy implicit módon olyan tulajdonságokat tulajdonítottak az ábrának, amelyeket a feladat szövege nem támasztott alá, és egyébként nem is igazolhatók. Ez azt jelzi, hogy az ábrák alapján történő vizuális sejtések formalizálása komoly nehézséget jelent a hallgatók számára. Tapasztalataink összhangban állnak Dvora és Dreyfus korábban ismertetett eredményével, nevezetesen a hibás megoldások 72%-a náluk az ábra félreértelmezéséből fakadt [5].

A 2. és 3. ábrák egy-egy jellegzetesen hibás megoldást szemléltetnek.



2. ábra. Egy tipikusan hibás megoldás: a DB szakasz mint magasság.



3. ábra. Egy másik tipikusan hibás megoldás: a DB szakasz mint szögfelező.

A helyes megoldások vizsgálata szintén fontos információval szolgál a hallgatók gondolkodásáról. A helyes megoldások döntő többsége (10 fő) a hatodik osztályos „szögszámításos” megközelítést alkalmazta, míg kisebb hányada (5 fő) explicit módon Thalész tételére hivatkozott. Ez utóbbi megközelítés magasabb fokú geometriai szemlélet meglétére utal: a feladat megoldása nem pusztán lokális szögösszefüggések egymásutánjából áll, hanem egy geometriai tétel tudatos alkalmazásából.

A Van Hiele-szintek szempontjából a szögszámításos megoldások elsősorban az analitikus (2.) szinthez kapcsolhatók, ahol a hallgatók megfelelő tulajdonságokat (szögek, oldalak, arányok) vizsgálnak, és ezekből próbálnak következtetéseket levonni. Ezzel szemben a Thalész-tételre épülő megoldások inkább az informális dedukció szintjére (3. szint) utalnak, ahol az általános tételek már fontos szereppel bírnak.

A helyesen megoldók között 6 fő a 3-as, míg 10 fő a 4-es Van Hiele-szintet érte el. Az ábrát félreértelmezők csoportjában 1 fő az 1-es, 2 fő a 3-as, és 3 fő a 4-es szinten helyezkedett el (5. táblázat).

5. táblázat. A helyes és hibás megoldások megoszlása Van Hiele-szintek szerint.

Van Hiele-szint	**Helyesen megoldók (fő)**	**Ábrát félreértelmezők (fő)**
1-es szint	0	2
3-as szint	6	3
4-es szint	10	3

Az 5. táblázat adatai alapján nem rajzolódik ki egyértelmű, lineáris kapcsolat a szint és a feladatmegoldás sikeressége között: a helyes megoldások nem koncentrálódnak kizárólag a legmagasabb szinteken, és hibás bizonyítások is előfordulnak magasabb (3–4.) szinten lévő hallgatóknál. Ez a megfigyelés arra utal, hogy a geometriai gondolkodás fejlettsége önmagában nem garantálja az ábra helyes értelmezését és a megfelelő megoldási stratégia megválasztását.

Összességében a második kutatási kérdésre adott válasz kettős. Egyrészt a hallgatók többsége képes volt megoldani a vizsgált középszintű geometriafeladatot, ami azt jelzi,

hogy az alapvető geometriai ismeretek és eljárások rendelkezésükre álltak. Másrészt azonban a hibás megoldások magas aránya, valamint az ábra félreértelmezéséből fakadó tipikus hibák azt mutatják, hogy az ábrák értelmezésének tudatos tanítása továbbra is kiemelt didaktikai feladat. Különösen fontos annak hangsúlyozása, hogy a tanulók ne tulajdonítsanak „látszólagos” tulajdonságokat az ábráknak pusztán vizuális benyomások alapján, hanem minden esetben igazolt tényekkel dolgozzanak az adott geometriai szituációban.

5.3. Kutatási kérdés: Kimutatható-e összefüggés a hallgatók Van Hiele-szintje és a feladatmegoldás sikeressége között?

Erre a kutatási kérdésre azt találtuk, hogy a helyes ábraértelmezés és a Van Hiele-szintek között nem mutatható ki szignifikáns kapcsolat. A fejlettebb geometriai gondolkodási szint tehát *nem garantálja* az ábrák helyes értelmezését, illetve a mélyebb geometriai háttérismeretek önmagukban nem védenek meg az esetleges perceptualitáson alapuló téves ténymegállapításoktól.

6. Következtetések

Összességében a kutatás arra hívja fel a figyelmet, hogy a geometriai ábrák helyes értelmezése nem csupán a gondolkodási szint függvénye, hanem erősen kapcsolódik más, egyelőre fel nem tárt tényezőkhöz is. Az eredmények alapján a hallgatók geometriai gondolkodása jellemzően eléri az informális dedukció szintjét, ugyanakkor az ábrák elemzése során gyakoriak a perceptuális alapú félreértelmezések.

A vizsgálat rámutatott arra is, hogy a hallgatók gyakran a vizuális benyomásokra építik gondolatmenetüket, és ezek sok esetben felülírják a formális geometriai ellenőrzés szükségességét. Ez a tendencia összhangban áll a szakirodalomban korábban dokumentált jelenséggel, miszerint az ábra vizuális ereje képes befolyásolni a logikai kontrollt és a deduktív érvelést [5, 19].

A kutatás egyik legfontosabb implikációja, hogy a tanárképzésben hangsúlyt kell fektetni az ábrákból nyert vizuális információk ellenőrzési igényének a megteremtésére. Ennek eredményeképpen a geometriai fogalmak nemcsak formális, hanem valódi, alkalmazói tudásként jelenhetnek meg a hallgatók ismereteiben.

Köszönetnyilvánítás. Köszönettel tartozom egykori PhD-témavezetőmnek, **Herendiné dr. Kónya Eszternek** a cikk megírása során nyújtott értékes tanácsaiért és szakmai támogatásáért.

Hivatkozások

[1] Burger, W. ; Shaughnessy, J. M.: Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 17 (1986), Nr. 1, S. 31–48. `http://dx.doi.org/10.2307/749317`. – DOI 10.2307/749317. – Access may require subscription (e.g., JSTOR or ERIC)

[2] Clements, D. H. ; Battista, M. T.: Geometry and Spatial Reasoning. Version: 1992. `https://books.google.com/books?id=HdoPAQAAMAAJ`. In: Grouws,

Douglas A. (Hrsg.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York, NY : Macmillan, 1992. – ISBN 0029223814, 420–464

[3] Crowley, M. L.: The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. Version: 1987. https://eric.ed.gov/?id=ED280679. In: Lindquist, Mary M. (Hrsg.): *Learning and Teaching Geometry, K–12.* Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1987. – ISBN 0873532428, 1–16. – 1987 Yearbook of the NCTM

[4] Dreyfus, T.: On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education. In: *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* Bd. 1, PME, 1991, S. 33–48. – Elérhető: https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=f62nQSQAAAAJ&citation_for_view=f62nQSQAAAAJ:qjMakFHDy7sC

[5] Dvora, T. ; Dreyfus, T.: Unjustified Assumptions Based on Diagrams in Geometry. In: *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* Bd. 2, PME, 2004, S. 311–318. – Elérhető: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489734.pdf

[6] Fischbein, E.: The Theory of Figural Concepts. In: *Educational Studies in Mathematics* 24 (1993), Nr. 2, S. 139–162. http://dx.doi.org/10.1007/BF01273689. – DOI 10.1007/BF01273689

[7] Fuys, D. ; Geddes, D. ; Tischler, R.: *Journal for Research in Mathematics Education Monograph Series.* Bd. 3: *The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents.* Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1988. http://dx.doi.org/10.5951/jresematheduc.1988.0185. http://dx.doi.org/10.5951/jresematheduc.1988.0185. – ISBN 0–87353–280–5. – Monograph No. 3

[8] Gutierrez, A. ; Jaime, A. ; Fortuny, J.: An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 22 (1991), Nr. 3, S. 237–251. http://dx.doi.org/10.5951/jresematheduc.22.3.0237. – DOI 10.5951/jresematheduc.22.3.0237. – DOI: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.22.3.0237

[9] Győry, Á.: *Matematikából tehetséges középiskolai tanulók geometriai bizonyítási képességének vizsgálata és fejlesztése*, Debreceni Egyetem, Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola, Diss., 2021. https://dea.lib.unideb.hu/items/b8d7e956-b1bb-4913-9e08-6358440f50a3. – Doktori (PhD) értekezés

[10] Halat, E.: Sex-related Differences in the Acquisition of the van Hiele Levels and Motivation in Learning Geometry. In: *Asia Pacific Education Review* 7 (2006), Nr. 2, S. 173–183. http://dx.doi.org/10.1007/BF03031541. – DOI 10.1007/BF03031541. – DOI: https://doi.org/10.1007/BF03031541

[11] Halat, E.: Reform-based Curriculum and Acquisition of the Levels. In: *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* 3 (2007), Nr. 1, 41–49. https://www.ejmste.com/article/reform-based-curriculum-ampacquisition-of-the-levels-4046

[12] Jaime, A. ; Gutiérrez, A.: Relationship Between van Hiele's Levels of Reasoning and 0–1 Standard Scores. In: *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* Bd. 3, PME, 1994, 297–304. – Elérhető: https://eric.ed.gov/?id=ED383537

[13] Mariotti, Maria A.: Justifying and Proving in the Classroom: The Difficult Transition from Empirical Arguments to Formal Proofs. In: *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* Bd. 1, PME, 1997, S. 180–187. – A konferenciakötet elérhető: https://eric.ed.gov/?id=ED416082

[14] Mayberry, J.: The van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 14 (1983), S. 58–69. http://dx.doi.org/10.2307/748797. – DOI 10.2307/748797

[15] Oktatási Hivatal: *Központi írásbeli feladatsorok, javítási-értékelési útmutatók*. https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok. – Letöltve: 2025. október 28.

[16] Oktatási Hivatal: *Matematika részletes érettségi vizsgakövetelmények*. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/vizsgakovetelmenyek2024/matematika_2024_e.pdf. – Letöltve: 2025. október 28.

[17] Parócza, E. ; Tamás, B. ; Wintsche, G.: *Matematika 6. tankönyv*. 1. kiadás. Oktatási Hivatal, 2021 https://www.tankonyvkatalogus.hu/storage/pdf/OH-MAT06TA__teljes.pdf. – Letöltve: 2025. október 28.

[18] Tamásné Kollár, M. and Kelemen-Kiss, I. H.: *Matematika 9. tankönyv II. kötet*. 1. javított kiadás. Oktatási Hivatal, 2025 https://www.tankonyvkatalogus.hu/storage/pdf/OH-MAT09TA_II__teljes.pdf. – Letöltve: 2025. október 28.

[19] Usiskin, Z.: Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry / University of Chicago School Mathematics Project. Version: 1982. https://ucsmp.uchicago.edu/resources/van_hiele_levels.pdf. Chicago, IL : The University of Chicago, 1982 (Technical Report). – Forschungsbericht. – Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project

[20] Van Hiele-Geldof, D.: *The Didactics of Geometry in the Lowest Class of Secondary School*, Utrecht University, Diss., 1957. – Angol fordítás in: Fuys, D., Geddes, D. and Tischler, R. (1984). *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* ERIC Document ED287697. Elérhető: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED287697.pdf

[21] Van Hiele, P. M.: *The Child's Thought and Geometry*, Utrecht University, Diss., 1959. – Angol fordításban elérhető: https://geometryandmeasurement.pbworks.com/f/VanHiele.pdf

[22] Vojkůvková, I. ; Haviger, J.: The van Hiele Geometry Test in Czech Secondary Schools – Evaluation of Results. In: *WDS'13 Proceedings of Contributed Papers, Part I*, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague, 2013. –

ISBN 978–80–7378–237–0, 119–122. – Elérhető: https://physics.mff.cuni.cz/wds/proc/pdf13/WDS13_119_m8_Vojkuvkova.pdf