Pi Matematikai, Fizikai és Informatikai Folyóirat
Miskolci Egyetem

2. kötet, Mat. füzet, 19-30. oldal, 2026.

Kereskedés utáni elszámolási ár (PTCP) alapú árképzés automatikus kripto-váltókban

Karácsony Zsolt
Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Matematikai Intézet
zsolt.karacsony@uni-miskolc.hu

Robert Pausic
Bloxico Software Solutions DOO, Belgrad
robert.pausic@bloxico.com

2026. április 16.

Kivonat

A konstans szorzat alapú automatikus piacképzőkben (Constant Product Market Maker CPMM) a swap elszámolása az árfolyamgörbe mentén történik, ezért a kereskedő által fizetett effektív egységár eltér a tranzakció utáni (post-trade) spot ártól. A tanulmány bevezeti a Post-Trade Clearing Price (PTCP) szabályt, amelyben a kereskedő egységára definíció szerint megegyezik a saját tranzakciója által kialakított post-trade árral.

Zárt alakú, közvetlenül implementálható elszámolási képletet vezetünk le, és összevetjük azt a CPMM standard gyakorlati formuláival és integrális értelmezésével. Az elemzés rávilágít a két elszámolási logika közötti koncepcionális különbségre és az ebből fakadó árhatásokra.

1. Bevezetés

Az automatikus piacképzők (Automated Market Makers, AMM-ek) a decentralizált tőzsdék (DEX-ek) alapvető infrastruktúra-elemei. Működésük központi eleme a liquidity pool, amely két (vagy több) eszköz előre meghatározott szabály szerinti közös készletét jelenti. A poolban tárolt eszközállomány - például (x, y), $x, y \in \mathbb{R}^+$, ahol x és y a két eszköz aktuális készlet mennyisége - határozza meg a kereskedési árfolyamot egy előírt invariáns vagy árképzési szabály segítségével. A felhasználók a poollal szemben kereskednek, nem pedig

Kulcsszavak: Kripto; liqudity-pool; konstans szorzat modell (CPMM); konstans függvényű piacképző (CFMM); Post-Trade Clearing Price (PTCP). AMS Subject Classification: 91B26, 91G80, 90C25.

közvetlenül egymással, így a likviditást nem egy hagyományos ajánlati könyv, hanem egy determinisztikus matematikai függvény biztosítja.

A legismertebb AMM-osztály a konstans függvényű piacképzők (Constant Function Market Makers, $CFMM$-ek) családja, amelybe a konstans szorzat modell (Constant Product Market Maker, CPMM) is tartozik. A $CFMM$-ek mellett léteznek további AMM-architektúrák is, például a konstans összeg modell ($CSMM$), a koncentrált likviditást alkalmazó megoldások (pl. Uniswap v3), valamint a görbület-optimalizált piacképzők, amelyek stabil eszközpárok cseréjére specializálódtak (pl. StableSwap, lásd [6]). A $CFMM$-ek átfogó rendszerezését Xu et al. [10] nyújtják.

A CPMM-ben a liquidity pool állapotát az

$$xy = k, \quad x, y, k \in \mathbb{R}^+$$

invariáns írja le, ahol x és y a két eszköz készlete, k pedig állandó (díjmentes esetben). A modell gyakorlati jelentőségét az adja, hogy ez képezi például a Uniswap $v2$ protokoll alapját [1]. A konstans szorzat mechanizmus tulajdonságait, árhatásait és jóléti következményeit számos elméleti munka vizsgálta (lásd pl. [2, 6, 8]).

A klasszikus CPMM esetén a swap ügyletek elszámolása a liquidity pool árfolyamgörbéje mentén történik. A kereskedő nem egyetlen rögzített áron vásárol, hanem a készletváltozás során folyamatosan változó spot ár mentén halad végig. Ennek következtében az általa fizetett effektív (átlagos) egységár általában eltér a tranzakció után kialakuló végső (marginális, post-trade) ártól. Ez a különbség a modell egyik alapvető strukturális jellemzője, amely közvetlenül a liquidity pool invariánsából fakad.

A CPMM-elszámolás során az effektív ár és a post-trade ár közötti eltérés számos gyakorlati következménnyel jár. A kereskedő szempontjából ez az ún. slippage forrása; a rendszer szintjén pedig a görbe menti szekvenciális elszámolás lehetőséget teremt a tranzakció-sorrendezésből fakadó értékkinyerésre (Maximal Extractable Value, MEV), beleértve a frontrunning és sandwich típusú támadásokat (Daian et al. [5]). Ezek a problémák a decentralizált pénzügyek egyik központi kihívását jelentik, és számos alternatív mechanizmus-tervezési javaslatot motiváltak.

Az egységes elszámolási ár (uniform clearing price) elve régóta jelen van a közgazdaságtanban: Walras (1874) tâtonnement-modellje [9], Friedman (1959) uniform-price aukció javaslata [7], valamint a villamosenergia-piacok egységes piactisztító ára egyaránt erre az elvre épül. A pénzügyi piacok kontextusában Budish, Cramton és Shim [3] a folyamatos tőzsdei kereskedés ($CLOB$) helyett frequent batch aukciókat — uniform áras kettős aukciókat — javasoltak. A DeFi-ben a CoW Protocol batch aukciós rendszere és Canidio és Fritsch [4] $FM - AMM$ modellje alkalmazza ezt az elvet: az $FM - AMM$-ben az átlagár megegyezik a marginális (post-trade) árral. A jelen tanulmány ehhez a vonulathoz csatlakozik.

A jelen munka célja kettős. Egyrészt röviden, de gyakorlatorientált módon rögzíti a CPMM-ben alkalmazott implementációs elszámolási képleteket, valamint azok integrális értelmezését. Másrészt bevezet egy alternatív árképzési szabályt, a Post-Trade Clearing Price (PTCP) megközelítést, amelyben a kereskedő egységára megegyezik a saját tranzakciója által létrehozott post-trade pool-spot árral.

A PTCP-megközelítés így nem a görbe menti átlagárat, hanem a tranzakció utáni egyensúlyi állapot árát tekinti elszámolási alapnak. A dolgozat bemutatja a PTCP-hez tartozó zárt alakú, közvetlenül implementálható képleteket, és koncepcionálisan összeveti azokat a klasszikus CPMM-elszámolással.

2. A konstans szorzat (CPMM) modell: formális leírás és elszámolási képletek

A jelen fejezetben rögzítjük a CPMM-modell formális keretét: az állapotteret és az alapfeltevéseket (2.1), a zárt alakú elszámolási képleteket (2.2), valamint azok integrális értelmezését (2.3).

2.1. Állapottér és alapfeltevések

Tekintsünk egy két-eszközös likviditási poolt, amely X és Y eszközöket tartalmaz.

A kereskedés előtti állapotot az

$$(x_0, y_0), \quad x_0 > 0, \quad y_0 > 0$$

készletpár jellemzi. Itt az x_0, y_0 jelölés az általános X és Y készletváltozók konkrét kezdeti értékét jelenti.

A konstans szorzat modell invariánsa:

$$xy = k, \quad k := x_0 y_0 > 0.$$

A spot ár Y/X értelemben:

$$p_0 := \frac{y_0}{x_0}.$$

A továbbiakban díjmentes (fee nélküli) modellt vizsgálunk; a díj szorzótényezőként egyszerűen beépíthető a modellekbe.

A swap két ekvivalens módon paraméterezhető:

- **Input-alapú forma:** adott $\Delta x > 0$ befizetés mellett számítjuk a kimeneti Δy-t.
- **Output-alapú forma:** adott Δy kivét mellett számítjuk a szükséges Δx-et.

2.2. CPMM-elszámolás: zárt alakú képletek

Az alábbiakban megadjuk a CPMM-elszámolás zárt alakú képleteit mindkét paraméterezésben: először az input-alapú (2.2.1), majd az output-alapú (2.2.2) formát.

2.2.1. Input-alapú paraméterezés

Tegyük fel, hogy a kereskedő $\Delta x > 0$ mennyiségű X-et ad a poolhoz.
Ekkor az új X-készlet:

$$x_1 = x_0 + \Delta x.$$

Az invariáns miatt:

$$y_1 = \frac{k}{x_1} = \frac{k}{x_0 + \Delta x}.$$

A kereskedő által kapott Y mennyiség:

$$\Delta y_{\text{CPMM}} = y_0 - y_1 = y_0 - \frac{k}{x_0 + \Delta x}.$$

Az effektív egységárat — a kereskedő által fizetett X-mennyiséget Y-egységenként — az X/Y hányadossal fejezzük ki (a 2.1-ben definiált Y/X spot ár reciproka).

Az effektív (átlagos) egységár:

$$p_{\text{eff,CPMM}} = \frac{\Delta x}{\Delta y_{\text{CPMM}}}.$$

A tranzakció utáni spot ár:

$$p_{1,\text{CPMM}} = \frac{y_1}{x_1}.$$

2.2.2. Output-alapú paraméterezés

Legyen adott egy kívánt $\Delta y \in (0, y_0)$ kimenet. Ekkor az új Y-készlet:

$$y_1 = y_0 - \Delta y.$$

Az invariáns miatt:

$$x_1 = \frac{k}{y_1} = \frac{k}{y_0 - \Delta y}.$$

A szükséges befizetés:

$$\Delta x_{\text{CPMM}} = x_1 - x_0 = \frac{k}{y_0 - \Delta y} - x_0.$$

A tranzakció utáni spot ár:

$$p_{1,\text{CPMM}} = \frac{y_1}{x_1}.$$

Ez a formula megegyezik a gyakorlatban (pl. smart contract implementációkban) alkalmazott képlettel.

2.3. Integrális értelmezés

A CPMM-modellben a swap az $xy = k$ görbe mentén történő állapotváltozásként értelmezhető.

Mivel a spot ár:

$$p(y) = \frac{x}{y} = \frac{k}{y^2},$$

output-alapú paraméterezés esetén a befizetett összeg a spot ár integráljaként is felírható:

$$\Delta x_{\text{CPMM}} = \int_{y_1}^{y_0} \frac{k}{y^2}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{k}{y}\right]_{y_1}^{y_0} = \frac{k}{y_1} - \frac{k}{y_0}.$$

Mivel $k/y_0 = x_0$, ezért

$$\Delta x_{\text{CPMM}} = \frac{k}{y_0 - \Delta y} - x_0$$

adódik, ami pontosan megegyezik a 2.2.2 szakaszban kapott zárt alakú képlettel.

3. PTCP: Post-Trade Clearing Price alapú elszámolási szabály

Az alábbiakban bevezetjük a Post-Trade Clearing Price (PTCP) elszámolási szabályt, megadjuk formális definícióját (3.1), majd levezetjük a zárt alakú képleteket output-alapú (3.2) és input-alapú (3.3) paraméterezésben.

3.1. A PTCP formális definíciója

A klasszikus CPMM-elszámolás során a kereskedő a konstans szorzat görbe mentén halad, így az ügylet effektív ára a görbe menti átlagárnak felel meg. Ezzel szemben a Post-Trade Clearing Price (PTCP) szabály az elszámolást a tranzakció utáni állapothoz köti.

3.1. Definíció. (Post-Trade Clearing Price, PTCP)
Legyen a kereskedés előtti állapot (x_0, y_0). Egy $\Delta y \in (0, y_0)$ mennyiségű Y-kivét után az új állapot:

$$y_1 = y_0 - \Delta y, \qquad x_1 = x_0 + \Delta x_{\mathrm{PTCP}}.$$

A PTCP-szabály előírja, hogy a kereskedő által fizetett effektív egységár megegyezik a tranzakció utáni spot árral:

$$\frac{\Delta x_{\mathrm{PTCP}}}{\Delta y} = \frac{x_1}{y_1}.$$

Másképpen fogalmazva: a kereskedő pontosan azon az áron számol el, amelyre saját tranzakciója a poolt elmozdítja. Az elszámolási ár tehát nem görbe menti átlag, hanem post-trade egyensúlyi ár.

3.2. Output-alapú zárt alak a szükséges befizetésre

A definícióból következik:

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad y_1 = y_0 - \Delta y.$$

Behelyettesítés után:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x_0 + \Delta x}{y_0 - \Delta y}.$$

Keresztbe szorozva:

$$\Delta x(y_0 - \Delta y) = \Delta y(x_0 + \Delta x).$$

Innen adódik kifejtés és rendezés után:

$$\begin{aligned} \Delta x y_0 - \Delta x \Delta y &= \Delta y x_0 + \Delta y \Delta x, \\ \Delta x y_0 - 2\Delta x \Delta y &= \Delta y x_0, \\ \Delta x(y_0 - 2\Delta y) &= \Delta y x_0. \end{aligned}$$

Tehát a szükséges befizetés zárt alakban:

$$\Delta x_{PTCP} = \frac{\Delta y x_0}{y_0 - 2\Delta y}, \quad \Delta y \in \left(0, \frac{y_0}{2}\right).$$

Ez a képlet zárt alakú, lineáris Δx-ben, numerikus integrálást nem igényel, és közvetlenül implementálható on-chain környezetben is, amennyiben a futtatókörnyezet támogatja a fixpontos vagy egész aritmetikát és a nullával való osztás ellenőrzését ($y_0 - 2\Delta y > 0$).

3.3. Input-alapú zárt alak: a kivehető mennyiség

Amennyiben a befizetett Δx adott, a kivehető Δy az alábbi módon határozható meg. A 3.1. Definícióból:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x_0 + \Delta x}{y_0 - \Delta y}.$$

Rendezve Δy-ra:

$$\Delta x(y_0 - \Delta y) = \Delta y(x_0 + \Delta x),$$

$$\Delta x y_0 = \Delta y(x_0 + \Delta x) + \Delta x \Delta y = \Delta y(x_0 + 2\Delta x).$$

Tehát:

$$\Delta y_{PTCP} = \frac{\Delta x y_0}{x_0 + 2\Delta x}.$$

A modell tehát mind input-, mind output-alapú paraméterezésben zárt, lineáris formában kezelhető.

3.2. Megjegyzés. A PTCP-elszámolás lényegi sajátossága, hogy az ügyletet nem egy folytonos görbe menti tranzakcióként értelmezi (mint a CPMM), hanem egy olyan egyensúlyi állapotváltásként, ahol a teljes mennyiség egyetlen, post-trade áron kerül elszámolásra.

4. Összehasonlítás: CPMM és PTCP elszámolási szabályok

A jelen fejezet célja a konstans szorzat modell (CPMM) és a Post-Trade Clearing Price (PTCP) szabály közötti koncepcionális és matematikai különbségek rendszerezett bemutatása. Az eltérés nem pusztán jelölésbeli vagy technikai, hanem az elszámolási filozófia alapját érinti.

4.1. Az elszámolási mechanizmus szerkezeti különbsége

A két modell közötti alapvető eltérés az elszámolási ár meghatározásának módjában rejlik.

CPMM esetén

- A swap a konstans szorzat-invariáns $xy = k$ által meghatározott görbe mentén történik.
- Az elszámolt összeg a görbe menti integrál eredménye.
- A kereskedő által fizetett effektív egységár a görbe menti átlagárnak felel meg.
- A tranzakció utáni spot ár eltér az effektív ártól.

Formálisan, output-alapú paraméterezésben:

$$\Delta x_{\mathrm{CPMM}} = \int_{y_1}^{y_0} \frac{k}{y^2}\, \mathrm{d}y,$$

amelyből következik:

$$\frac{\Delta x_{\mathrm{CPMM}}}{\Delta y} \neq \frac{x_1}{y_1}.$$

PTCP esetén

- Az elszámolás nem integrál alapú.
- Az effektív egységár definíció szerint megegyezik a tranzakció utáni spot árral.
- Az ügylet egyetlen, post-trade árhoz kötött elszámolásként értelmezett.

Formálisan:

$$\frac{\Delta x_{\mathrm{PTCP}}}{\Delta y} = \frac{x_1}{y_1}.$$

4.1. Propozíció. *A CPMM-modell a swapot egy folytonos görbe menti állapotváltozásként értelmezi, míg a PTCP-modell az ügyletet egy post-trade egyensúlyi árhoz kötött diszkrét elszámolásként kezeli.*

Indoklás:

A CPMM esetében az elszámolás az invariáns $xy = k$ fenntartásából következik, amely a készletváltozást teljes egészében meghatározza. A fizetett összeg a görbe menti ár integráljaként jelenik meg.

A PTCP esetében ezzel szemben az elszámolás alapja egy ár-egyenlőségi feltétel, amely a tranzakció utáni állapothoz köti az effektív egységárat. Az invariáns nem az elszámolás kiindulópontja, hanem – ha jelen van – a modell egy lehetséges következménye.

4.2. Az effektív és a végső ár viszonya

A két modell közötti egyik legfontosabb gyakorlati különbség az effektív ár és a post-trade spot ár kapcsolata.

CPMM-ben

$$P_{\mathrm{eff,CPMM}} < P_{\mathrm{final,CPMM}}, \quad \Delta y > 0.$$

Ez a görbe konvexitásából következik: a swap során a kereskedő alacsonyabb árakon kezdi a vásárlást, és egyre magasabb árakon fejezi be, így az átlagár a végső ár alatt marad.

PTCP-ben

$$P_{\mathrm{eff,PTCP}} = P_{\mathrm{final,PTCP}}$$

definíció szerint.

Ez a különbség a slippage értelmezését is módosítja:

- CPMM-ben a slippage az integrált ár és a kezdeti ár különbségéből adódik.
- PTCP-ben az elszámolás teljes mértékben a végső árhoz kötött, így az effektív és a végső ár közötti eltérés megszűnik.

A CPMM implicit módon egy kontinuum kereskedési folyamatot modellez, míg a PTCP inkább egy clearing-mechanizmushoz hasonlítható, ahol az ügylet egyetlen egyensúlyi ár mellett realizálódik.

Fontos hangsúlyozni, hogy a különbség nem pusztán algebrai újraírás kérdése. A CPMM elszámolási képlete az invariáns fenntartásából származik, míg a PTCP-képlet egy ár-egyenlőségi feltételből vezethető le.

A két modell tehát eltérő elsődleges elvből indul ki:

- CPMM: készlet-invariancia $\to$ ár,
- PTCP: ár-egyenlőség $\to$ készletváltozás.

Ez a logikai irány megfordítása jelenti a két elszámolási szabály legmélyebb különbségét.

5. Numerikus példák: CPMM és PTCP összehasonlítása

A jelen fejezet célja a két elszámolási szabály viselkedésének szemléltetése konkrét paraméterek mellett. Mindkét példában díjmentes (fee $= 0$) modellt feltételezünk.

A pool kezdeti állapota:

$$x_0 = 1000, \quad y_0 = 1000, \quad k = x_0 y_0 = 1\,000\,000.$$

Az árakat az alábbi konvenció szerint mérjük:

$$P := \frac{X}{Y}.$$

A kezdeti spot ár:

$$P_0 = \frac{x_0}{y_0} = 1.$$

5.1. Ár-emelkedési eset: Y vásárlása ($\Delta y > 0$)

Tegyük fel, hogy a kereskedő

$$\Delta y = 100$$

mennyiséget vásárol az Y eszközből. Ekkor:

$$y_1 = y_0 - \Delta y = 900.$$

5.1.1. CPMM

A konstans szorzat feltétel:

$$x_1 = \frac{k}{y_1} = \frac{1\,000\,000}{900} = 1\ 111,111\ldots$$

a szükséges befizetés:

$$\Delta x_{\mathrm{CPMM}} = x_1 - x_0 = 111,111\ldots$$

az effektív (átlagos) ár:

$$P_{\mathrm{eff,CPMM}} = \frac{\Delta x_{\mathrm{CPMM}}}{\Delta y} = 1,11111\ldots$$

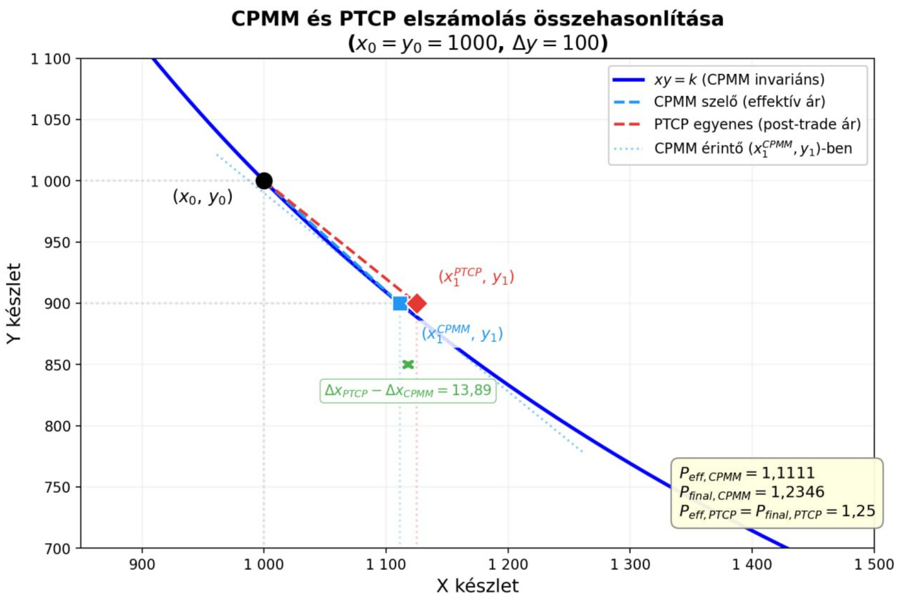
míg a tranzakció utáni (post-trade) pool ár:

$$P_{\mathrm{final,CPMM}} = \frac{x_1}{y_1} = 1,234567\ldots$$

tehát

$$P_{\mathrm{eff,CPMM}} < P_{\mathrm{final,CPMM}}.$$

Az eltérés a görbe konvexitásából fakad. Az 1. ábra szemlélteti a két elszámolási szabály közötti különbséget. Az $xy = k$ hiperbola mentén a CPMM-swap a kiindulási állapotból (x_0, y_0) a görbe egy másik pontjára $(x_1^{\mathrm{CPMM}}, y_1)$ vezet; az effektív ár az ezt összekötő szelő meredekségének felel meg. A PTCP-elszámolás ezzel szemben (x_1^{PTCP}, y_1)-be visz, amely nem a görbén helyezkedik el: a szükséges befizetés nagyobb, mert az effektív ár definíció szerint megegyezik a post-trade árral. A két szelő meredeksége közötti eltérés közvetlenül tükrözi a 4.2. szakaszban tárgyalt $P_{\mathrm{eff,CPMM}} < P_{\mathrm{final,CPMM}} = P_{\mathrm{eff,PTCP}}$ relációt.



1. ábra. A CPMM- és PTCP-elszámolás geometriai összehasonlítása ($x_0 = y_0 = 1000$, $\Delta y = 100$).

5.1.2. PTCP

A PTCP-szabály szerint:

$$\frac{\Delta x_{\mathrm{PTCP}}}{\Delta y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_0 + \Delta x_{\mathrm{PTCP}}}{y_0 - \Delta y}.$$

Ebből:

$$\Delta x_{\mathrm{PTCP}}(y_0 - 2\Delta y) = \Delta y\, x_0, \qquad \Delta x_{\mathrm{PTCP}} = \frac{\Delta y\, x_0}{y_0 - 2\Delta y}.$$

Számszerűen:

$$\Delta x_{\mathrm{PTCP}} = \frac{100 \cdot 1000}{1000 - 200} = 125.$$

Így:

$$x_1 = 1125, \quad y_1 = 900.$$

Az effektív és a végső ár:

$$P_{\mathrm{eff,PTCP}} = \frac{125}{100} = 1,25 \quad \text{valamint} \quad P_{\mathrm{final,PTCP}} = \frac{1125}{900} = 1,25.$$

Tehát:

$$P_{\mathrm{eff,PTCP}} = P_{\mathrm{final,PTCP}}.$$

5.2. Ár-emelkedési eset: input-alapú parametrizáció ($\Delta x > 0$)

Most vizsgáljuk a szimmetrikus esetet, amikor a kereskedő X -et ad be a poolba, és Y-t vesz ki. Ez az X/Y ár emelkedését eredményezi.

Tegyük fel, hogy:

$$\Delta x = 100.$$

Ekkor:

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 1100.$$

5.2.1. CPMM

Az invariáns miatt:

$$y_1 = \frac{k}{x_1} = \frac{1\,000\,000}{1100} = 909,0909\ldots.$$

A kivehető mennyiség:

$$\Delta y_{\text{CPMM}} = y_0 - y_1 = 90,9091\ldots.$$

Az effektív ár:

$$P_{\text{eff,CPMM}} = \frac{\Delta x}{\Delta y_{\text{CPMM}}} = 1,1.$$

A post-trade ár:

$$P_{\text{final,CPMM}} = \frac{x_1}{y_1} = 1,21.$$

Ezért ismét

$$P_{\text{eff,CPMM}} < P_{\text{final,CPMM}}.$$

5.2.2. PTCP

A PTCP-szabály szerint:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y_{\text{PTCP}}} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_1}{y_0 - \Delta y_{\text{PTCP}}}.$$

Innen:

$$\Delta y_{\text{PTCP}} = \frac{\Delta x y_0}{x_0 + 2\Delta x}.$$

Számszerűen:

$$\Delta y_{\text{PTCP}} = \frac{100 \cdot 1000}{1000 + 200} = 83,3333.$$

Az új állapot:

$$x_1 = 1100, \quad y_1 = 916,6667.$$

Az ár:

$$P_{\text{eff,PTCP}} = \frac{100}{83,3333} = 1,2 \quad \text{valamint} \quad P_{\text{final,PTCP}} = \frac{1100}{916,6667} = 1,2.$$

Ismét:

$$P_{\text{eff,PTCP}} = P_{\text{final,PTCP}}.$$

5.3. Összegző megfigyelések

Mind ár-emelkedési, mind ár-csökkenési irányban:

- CPMM esetén az effektív ár eltér a post-trade ártól,
- PTCP esetén az effektív ár definíció szerint megegyezik a post-trade árral.

A numerikus példák megerősítik az analitikus eredményt: a különbség nem irányfüggő, hanem a görbe menti (integrális) vs. clearing-alapú elszámolás strukturális eltéréséből fakad.

A CPMM-elszámolás és a PTCP-elszámolás közötti árkülönbség output-alapú paraméterezésben:

$$\Delta x_{CPMM} - \Delta x_{PTCP} = \frac{k}{y_0 - \Delta y} - x_0 - \frac{\Delta y \cdot x_0}{y_0 - 2\Delta y}.$$

Behelyettesítés után ($k = x_0 \cdot y_0$):

$$\Delta x_{CPMM} - \Delta x_{PTCP} = x_0 \cdot \left[\frac{y_0}{y_0 - \Delta y} - 1 - \frac{\Delta y}{y_0 - 2\Delta y}\right]$$

amelynek előjele negatív minden $\Delta y \in (0, \frac{y_0}{2})$ esetén, azaz a PTCP-elszámolás mindig magasabb befizetést eredményez, mint a CPMM.

5.4. Történeti kontextus: az egységes elszámolási ár elve

A jelen kutatás kiindulópontja egy gyakorlati probléma volt. Arbitrázs-algoritmusok fejlesztése során felmerült az igény, hogy a pool-ból realizált arbitrázs-nyereség egzakt módon meghatározható legyen, és hogy az elszámolás garantáltan ne csökkentse a likviditási pool értékét — amely a likviditásszolgáltatók (stakeholderek) tulajdonát képezi. A PTCP-szabály pontosan ezt biztosítja: mivel az elszámolás a post-trade egyensúlyi áron történik, a nyereség és a pool-hatás egzaktul elkülöníthető. Egy decentralizált tőzsde adatain végzett előzetes szimulációk megerősítették, hogy a PTCP-alapú elszámolás mellett a pool likviditása megőrződik. A szimulációs eredmények részletes bemutatása egy következő publikáció tárgyát képezi.

6. Összegzés és kitekintés

A tanulmány bemutatta a konstans szorzat alapú AMM-modellek (CPMM) gyakorlati elszámolási képleteit, valamint ezek integrális értelmezését, majd ezekkel szembeállítva formalizálta a Post-Trade Clearing Price (PTCP) elszámolási szabályt. A PTCP-megközelítésben a kereskedő effektív egységára definíció szerint megegyezik a tranzakció utáni spot árral, amely zárt alakú, közvetlenül implementálható képlethez vezet.

Az összehasonlítás rámutatott arra, hogy a két modell közötti különbség nem pusztán algebrai átalakítás, hanem az elszámolási elv szintjén jelentkezik: míg a CPMM az invariáns menti folytonos állapotváltozást modellezi, addig a PTCP egy post-trade clearing logikára épülő diszkrét ár-meghatározást alkalmaz. A numerikus példák mindkét irányban megerősítették az analitikus eredményeket.

A bemutatott formalizmus alapot szolgáltathat további vizsgálatokhoz, különösen díjstruktúrák, arbitrázs-dinamika, valamint általánosabb $CFMM$-keretekben történő kiterjesztések esetén. Különösen érdekes nyitott kérdés a PTCP-elv kiterjesztése több eszközös (multi-asset) likviditási pool-okra, ahol az elszámolás egy n-dimenziós felületen történik. Ebben az esetben a post-trade clearing ár egy árvektorrá általánosodik, és a zárt alakú megoldás létezése a felhasznált invariáns függvény tulajdonságaitól (konvexitás, simaság) függ. További vizsgálati irány a díjstruktúra beépítése, ahol a PTCP-képlet módosulása a díj mértékétől és beszedési módjától (input- vagy output-oldali) egyaránt függ.

Hivatkozások

[1] Adams, H. ; Zinsmeister, N. ; Robinson, D.: *Uniswap v2 Core*. Whitepaper, March 2020. – Online PDF

[2] Angeris, Guillermo ; Chitra, Tarun: Improved Price Oracles: Constant Function Market Makers. In: *Proceedings of the 2nd ACM Conference on Advances in Financial Technologies*, ACM, Oktober 2020 (AFT '20), 80–91

[3] Budish, Eric ; Cramton, Peter ; Shim, John: The high-frequency trading arms race: Frequent batch auctions as a market design response. In: *The Quarterly Journal of Economics* 130 (2015), Nr. 4, S. 1547–1621

[4] Canidio, Andrea ; Fritsch, Robin: *Arbitrageurs' profits, LVR, and sandwich attacks: batch trading as an AMM design response*. https://arxiv.org/abs/2307.02074. Version: 2025

[5] Daian, Philip ; Goldfeder, Steven ; Kell, Tyler ; Li, Yunqi ; Zhao, Xueyuan ; Bentov, Iddo ; Breidenbach, Lorenz ; Juels, Ari: Flash boys 2.0: Frontrunning in decentralized exchanges, miner extractable value, and consensus instability. In: *2020 IEEE symposium on security and privacy (SP)* IEEE, 2020, S. 910–927

[6] Egorov, M.: *StableSwap: Efficient Mechanism for Stablecoin Liquidity*. Whitepaper, 2019

[7] Friedman, Milton: The Treasury Bill Auction: A Suggestion for Improvement. In: *Journal of Political Economy* 67 (1959), April, Nr. 2, S. 105–110

[8] Milionis, Jason ; Moallemi, Ciamac C. ; Roughgarden, Tim ; Zhang, Anthony L.: *Automated Market Making and Loss-Versus-Rebalancing*. https://arxiv.org/abs/2208.06046. Version: 2024

[9] Walras, Lèon: Elements d'Economie Politique Pure (Lausanne: L. Corbaz). In: *English translation (1954) edited by Jaffe W., Elements of Pure Economics, London: Irwin* (1874)

[10] Xu, Jiahua ; Paruch, Krzysztof ; Cousaert, Simon ; Feng, Yebo: Sok: Decentralized exchanges (dex) with automated market maker (amm) protocols. In: *ACM Computing Surveys* 55 (2023), Nr. 11, S. 1–50