

REZGÉSEK EGYENLETE

Bessenyei Mihály

Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Matematikai Intézet
mihaly.bessenyei@uni-miskolc.hu

Makai Tímea Kamilla

Szolnoki SZC Pálffy – Vízügyi Technikum
makai.timea.kamilla@palfy-vizugyi.hu

2026. július 8.

Bessenyei Ádám emlékének

Kivonat

A differenciálegyenletek az ismeretlen függvény és annak magasabbrendű deriváltjai között teremtenek kapcsolatot. Szerteágazó alkalmazásaik miatt elméletüket a matematika egyik legfontosabb területeként tartjuk számon. Cikkünkben egy speciális egyenlet típus megoldáshalmazát jellemezzük, és bemutatjuk a rezgések elméletében játszott szerepét.

1. Bevezetés

Egy rugóra akasztott test (külső erő hatására) egyensúlyi helyzetéből kimozdulva rezgő mozgást végez ellenálló közegben. Hogyan írható le az idő x függvényében az egyensúlyi ponthoz képest a rezgő test y helyzete? Ismeretes, hogy a sebesség illetve gyorsulás a hely függvényének első illetve második deriváltja. A rugó által kifejtett erő Hooke törvénye szerint a megnyúlás y függvényével, míg a közeg ellenállása a sebesség y' függvényével arányos. Newton mozgástörvénye szerint a gyorsulás y'' függvénye minden pillanatban a ható erők eredőjével arányos. Ha tehát a test tömegét egységnyiinek választjuk, akkor a keresett y függvény és deriváltjainak kapcsolata

$$y'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

alakú, ahol a b és c együtthatók a közeg ellenállásából, valamint a rugóállandó és a gravitációs állandó segítségével fejezhetők ki.

Kulcsszavak: Homogén lineáris differenciálegyenlet; Viéte formulák. AMS Subject Classification: 34A30, 01A50, 12D05

Az (1) egyenletet *másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet*nek nevezzük. Számos fizikai vagy mérnöki probléma ilyen egyenletre vezet; példaként csupán a rezgőkörök elméletét említjük. Fontos tehát az (1) egyenlet megoldáshalmazának leírása.

A probléma nehézsége abban áll, hogy a keresett ismeretlen ezúttal egy *függvény*, nem pedig egy *szám*. A megoldás során a differenciálszámítás legfontosabb módszereire és eredményeire támaszkodunk. A témakör kitűnő áttekintése megtalálható Reiman könyvében [8]. Fontos szerephez jut majd az e Euler-számra épülő természetes alapú *exponenciális függvény*, amely differenciálható és deriváltfüggvénye önmaga. Ezért minden valós λ paraméter esetén az $y(x) = e^{\lambda x}$ függvény differenciálható, és az összetett függvény differenciálási szabálya szerint $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ érvényes.

A Taylor-tétel segítségével megmutatható, hogy a λ paraméterű exponenciális függvény előállítható sorösszeg formában az alábbi módon:

$$e^{\lambda x} = 1 + \frac{\lambda x}{1!} + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \dots \quad (2)$$

Mielőtt az érdemi vizsgálatokra rátérünk, érdemes pár egyszerű észrevételt tennünk az (1) egyenlettel kapcsolatban. Nyilvánvaló például, hogy annak az $y \equiv 0$ függvény mindig megoldása, valamint, hogy bármely két megoldás összege és különbsége, illetve bármely megoldás konstansszorososa szintén megoldás.

2. A megoldáshalmaz feltárása

Kézenfekvő megvizsgálni elsőként azt, hogy az (1) egyenletnek van-e polinom megoldása. Ha $b = c = 0$, akkor minden elsőfokú polinom megoldás. Azonban $c \neq 0$ esetén csak az azonosan nulla polinom megoldás: Mivel a deriválás csökkenti a fokszámot, ezért (1) bal oldala az eredetivel azonos fokú polinom, mely csak akkor lehet azonosan nulla, ha minden együttható nulla.

Próbálkozzunk tehát „végtelen” fokszámú polinommal! Vagyis, keressük az y megoldást

$$y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

alakban. E ponton komoly analízisbeli nehézségekkel kell szembesülnünk. Semmi nem biztosítja, hogy a jobb oldal korlátos, még kevésbé, hogy valamilyen valós számot állít elő. A differenciálhatóság ténye és elvégzésének módja szintén problematikus kérdések.

Mindezeket egyelőre figyelmen kívül hagyva, formálisan járunk el, a deriválást tagonként végezve. Ekkor az x^n tag együtthatója

$$\begin{aligned} y \text{ kifejtésében:} & \quad \alpha_n; \\ y' \text{ kifejtésében:} & \quad (n+1)\alpha_{n+1}; \\ y'' \text{ kifejtésében:} & \quad (n+2)(n+1)\alpha_{n+2}. \end{aligned}$$

Az (1) egyenlet bal oldala csak úgy lehet azonosan nulla, ha ott minden $n \in \mathbb{N}$ esetén x^n együtthatója nulla. Vagyis,

$$(n+2)(n+1)\alpha_{n+2} + b(n+1)\alpha_{n+1} + c\alpha_n = 0. \quad (3)$$

A kapott összefüggés kellően bonyolult ahhoz, hogy teljes általánosságában vizsgáljuk. Keressünk tehát olyan (α_n) sorozatot, melynél (3) bal oldala az α_n valamilyen konstansszorosára egyszerűsödik. Ha ilyen sorozat egyáltalán létezik (és egyelőre a $b \neq 0$ feltétellel élünk), akkor szükségképpen

$$\alpha_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1} \alpha_n,$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ az egyelőre ismeretlen konstans. Ezt a kapcsolatot elsőként az α_{n+2} és az α_{n+1} tagok, majd az α_{n+1} és az α_n tagok között alkalmazzuk:

$$\alpha_{n+2} = \frac{\lambda}{n+2} \alpha_{n+1} = \frac{\lambda^2}{(n+2)(n+1)} \alpha_n.$$

Mindezeket visszaírva az (3) összefüggésbe, $(\lambda^2 + b\lambda + c)\alpha_n = 0$ adódik. Mivel az azonosan nulla megoldást már ismerjük, ezért föltehetjük, hogy $\alpha_n \neq 0$ legalább egy index esetén. Tehát

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (4)$$

Tegyük fel, hogy $\lambda \in \mathbb{R}$ megoldása a (4) egyenletnek, és az egyszerűség kedvéért válasszuk α_0 értékét egynek. Az (α_n) sorozat értelmezését szem előtt tartva, $\alpha_n = \lambda^n/n!$ adódik teljes indukcióval. Így (2) alapján $y(x) = e^{\lambda x}$. Mivel $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ illetve $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$, ezért

$$y'' + by' + cy = (\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0,$$

hiszen λ teljesíti a (4) egyenletet. Tehát y valóban megoldása az (1) egyenletnek. Sőt, a fenti számolás jóval többet mutat: Ha az (1) differenciálegyenletben az adott rendű deriváltakat a megfelelő foksámú hatványokra cserélve közvetlenül a (4) másodfokú egyenletre térünk, akkor ennek bármely λ valós gyöke az eredeti differenciálegyenlet $y(x) = e^{\lambda x}$ alakú megoldását származtatja. Ráadásul e módszer teljesen kikerüli a „végtelen fokú” polinom értelmezésének és differenciálhatóságának kérdéseit!

A (4) másodfokú egyenlet az (1) differenciálegyenlethez tartozó *karakterisztikus egyenlet*; ennek gyökei a *karakterisztikus gyökök*. Ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van, akkor ezek az eredeti differenciálegyenlet két különböző megoldását adják. Egybeeső valós gyökpár esetén módszerünk csak egy megoldást biztosít. Találhatunk-e attól különbözőt?

Tegyük fel tehát, hogy a (4) karakterisztikus egyenletnek λ kétszeres gyöke. Az előbbieket miatt $e^{\lambda x}$ megoldása az (1) egyenletnek. Ha y tetszőleges megoldás, akkor a bevezetőben látottak szerint minden $k \in \mathbb{R}$ esetén $z(x) = y(x) - ke^{\lambda x}$ szintén az. Célunk a k konstans kiküszöbölése. A z értelmezése szerint $ye^{-\lambda x} = ze^{-\lambda x} + k$. Így,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ye^{-\lambda x} \right] &= y'e^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} = (y' - \lambda y)e^{-\lambda x}; \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[ye^{-\lambda x} \right] &= (y'' - \lambda y')e^{-\lambda x} - \lambda(y' - \lambda y)e^{-\lambda x} = (y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y)e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

A Viète-formulák miatt $-b = 2\lambda$ és $c = \lambda^2$, ezért ez utóbbi szorzat első tagja nulla, hiszen y megoldása az (1) egyenletnek. Vagyis az $ye^{-\lambda x}$ függvény második deriváltja eltűnik, ami azt jelenti, hogy e függvény elsőfokú polinom: $ye^{-\lambda x} = k_1 x + k_2$. Tehát y csakis

$$y = k_1 x e^{\lambda x} + k_2 e^{\lambda x}$$

alakú lehet. Ez természetesen fennállhat úgy, hogy k_1 értéke *minden esetben* nulla. Ellenőriznünk kell, hogy megengedett-e a $k_1 \neq 0$ választás, azaz, hogy $z = x e^{\lambda x}$ megoldás-e. Mivel

$$\begin{aligned} z' &= e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} = (\lambda x + 1)e^{\lambda x}, \\ z'' &= \lambda e^{\lambda x} + \lambda(\lambda x + 1)e^{\lambda x} = (\lambda^2 x + 2\lambda)e^{\lambda x}, \end{aligned}$$

ezért

$$z'' + bz' + cz = (\lambda^2 + b\lambda + c)x e^{\lambda x} + (2\lambda + b)e^{\lambda x}.$$

Az első zárójeles tag nulla, hiszen λ karakterisztikus gyök. Ráadásul λ kétszeres gyök, így a karakterisztikus polinom deriváltjának szintén gyöke, amiből adódik, hogy a második zárójeles tag is nulla. Összességében tehát $e^{\lambda x}$ mellett $xe^{\lambda x}$ szintén megoldás.

Vegyük észre, hogy ennél jóval többet igazoltunk! Mivel y egy *tetszőleges* megoldás volt, ezért megállapíthatjuk, hogy *minden* megoldás a fenti módon, az $e^{\lambda x}$ és az $xe^{\lambda x}$ függvények segítségével állítható elő. Ez azt jelenti, hogy egybeeső karakterisztikus gyökpár esetén sikerült teljesen feltárni az (1) egyenlet megoldáshalmazának szerkezetét.

Különböző karakterisztikus gyökpár esetén mindjárt két megoldást találtunk, azonban eddig nem foglalkoztunk a megoldáshalmaz leírásával. Vajon tudjuk-e használni az imént látottakat? Legyenek $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós karakterisztikus gyökök, s tekintsünk egy tetszőleges y megoldást a következő alakban:

$$y = z + k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Célunk ismét a konstansok kiküszöbölése. A részletek átgondolását az Olvasóra bízva, ezt az alábbiak szerint tehetjük meg. Mindkét oldalt szorozzuk az $e^{-\lambda_2 x}$ taggal, majd differenciáljuk. Az így adódó azonosság mindkét oldalát szorozzuk az $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$ taggal, majd differenciáljuk. Az így nyert összefüggés bal oldala ekkor

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \left[y e^{-\lambda_2 x} \right] e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \right].$$

Mivel

$$\frac{d}{dx} \left[y e^{-\lambda_2 x} \right] = y' e^{-\lambda_2 x} - \lambda_2 y e^{-\lambda_2 x} = (y' - \lambda_2 y) e^{-\lambda_2 x},$$

ezért

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \left[y e^{-\lambda_2 x} \right] e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \right] = \frac{d}{dx} \left[(y' - \lambda_2 y) e^{-\lambda_2 x} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \right] = \frac{d}{dx} \left[(y' - \lambda_2 y) e^{-\lambda_1 x} \right] \\ &= (y'' - \lambda_2 y') e^{-\lambda_1 x} - \lambda_1 (y' - \lambda_2 y) e^{-\lambda_1 x} \\ &= e^{-\lambda_1 x} (y'' - \lambda_2 y' - \lambda_1 y' + \lambda_1 \lambda_2 y) \\ &= e^{-\lambda_1 x} (y'' - (\lambda_1 + \lambda_2) y' + \lambda_1 \lambda_2 y) \\ &= e^{-\lambda_1 x} (y'' + by' + cy) = 0. \end{aligned}$$

Itt az utolsó két lépésben felhasználtuk a $-b = \lambda_1 + \lambda_2$ és $c = \lambda_1 \lambda_2$ Viète-formulákat, valamint, hogy y megoldás. Az $f = 0$ azonosságból az y általános megoldás „visszafejtethető”. Ismét az Olvasóra hagyjuk a számolás részleteit; kiderül, hogy alkalmas c_1 és c_2 konstansokkal

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Tehát az eredetileg feltételezett z függvény kifejezhető a már ismert $e^{\lambda_1 x}$ és $e^{\lambda_2 x}$ függvényekkel: újabb megoldást nem kapunk. Fejtegetéseinket az alábbi eredményben foglalhatjuk össze.

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az (1) állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet (4) karakterisztikus egyenletének λ_1 és λ_2 valós gyökei.*

- Ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor minden megoldás $k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x}$ alakú, ahol $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
- Ha $\lambda_1 = \lambda_2$, akkor minden megoldás $k_1 x e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_1 x}$ alakú, ahol $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

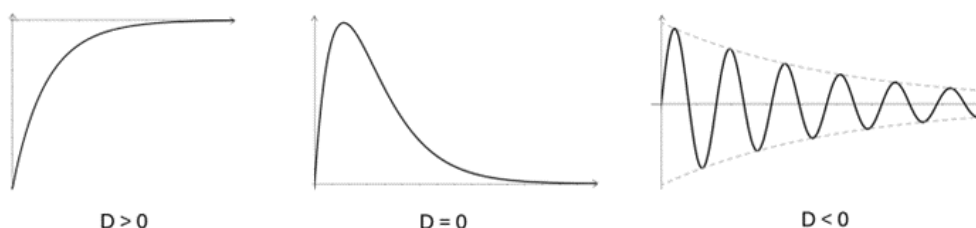
De mi történik, ha nincs valós karakterisztikus gyök? A pontos válasz messze meghaladja mind a cikk, mind a középiskolai tananyag kereteit. A komplex függvénytan eszközeivel bizonyítható, hogy ekkor a megoldáshalmaz a valós exponenciális és valós trigonometrikus függvények segítségével írható le, mégpedig a következő módon. Ha nincs valós gyöke a (4) karakterisztikus egyenletnek, akkor annak diszkriminánsa negatív, ezért $\sqrt{4c - b^2}$ valós szám. Legyen $\alpha := -\frac{b}{2}$ és $\beta := \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}$. Ekkor az (1) differenciálegyenlet minden y megoldása alkalmas $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ választással előáll az alábbi alakban:

$$y = k_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + k_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

3. Megjegyzések

Térjünk vissza a rezgőmozgás egyenletéhez! Milyen fizikai tartalma van a bemutatott eredményeknek? Vegyük figyelembe, hogy ilyenkor a b, c együtthatók nem lehetnek akár-milyenek: Olyan nemnegatív számok, hogy az exponenciális tagok paraméterei valamennyi esetben nem pozitívak. Ennek megfelelően a rezgés háromféle módon mehet végbe.

Ha a (4) karakterisztikus egyenlet D diszkriminánsa pozitív, akkor *csillapított rezgésről* beszélünk. Ilyenkor az egyensúlyi helyzetéből kitérített tömegpont azonnal visszatér eredeti helyzetébe az első ábra szerint. Ha a diszkrimináns nulla, akkor *kritikus csillapításról* szólnunk. Ekkor a tömegpont egyetlen nagyobb kilengés után visszanyeri egyensúlyi helyzetét. Ezt mutatja a második ábra. Ha a diszkrimináns negatív, akkor a rendszer oszcillál a harmadik ábrának megfelelően. Ennek speciális esete a *csillapítatlan rezgőmozgás*, amikor az exponenciális tagok paraméterei nullák, és a rendszer szinuszos mozgást végez.



Mindegyik ábrán az x tengely jelöli a rendszer egyensúlyi helyzetét. Magukat a függvényeket az alábbiak szerint választottuk:

$$\begin{aligned} D > 0: & \quad y = -e^{-3x} - e^{-2x}; \\ D = 0: & \quad y = 15xe^{-3x}; \\ D < 0: & \quad y = 0,01 \cdot e^{-x} \cos(20x) + e^{-x} \sin(20x). \end{aligned}$$

A rezgőmozgással kapcsolatban bővebben olvashatunk Budó könyvében [2] vagy a Feynman-előadások alapján készült kiváló műben [5].

Az analízis születésének hajnalán a függvényeket „végtelen fokú” polinomnak képzelték, az általunk vázolt út egyfajta „stílusgyakorlat”, melyet bármely korabeli matematikus követhetett volna. Az sem lenne meglepő, ha az akkori kor gyakorlatának megfelelően egy matematikus „visszafelé” gondolkodott volna, a fizikai folyamat alapján következtetve a rendszert vezérlő differenciálegyenlet megoldásaira.

Valójában az (1) egyenlet megoldásának módszere Leonhard Euler nevéhez fűződik. Eredményét 1743-ban publikálta [4], azonban már 1739. szeptember 15-én beszámolt róla egy Johann Bernoullihoz írott levélben. Módszere alkalmas akármilyen magasabbrendű

állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet megoldására. Ötlete egy korábbi dolgozatában [3] használt rendcsökkentő eljárás alapján, amely ebben az esetben az $y(x) = e^{\lambda x}$ alakú helyettesítésre vezet. Ebből a helyettesítésből a λ paraméterre pontosan a karakterisztikus egyenlet adódik.

A másodrendű lineáris differenciálegyenletek matematikai hátteréről további részletek találhatók Obádovics [7] illetve Hairer és Wanner [6] könyvében. Utóbbi, akárcsak Sain [9] műve, érdekes történeti adalékokat is közöl. Végezetül ajánljuk figyelmébe az Olvasónak Besenyei és Csomós cikkét [1], amely betekintést nyújt a differenciálegyenletek csodálatos világába.

Köszönetnyilvánítás. Szeretnénk köszönetünket kifejezni Komornik Vilmos professzor úrnak a cikk elkészítésében nyújtott tanácsaiért és észrevételeiért.

Hivatkozások

- [1] BESENYEI, Ádám ; CSOMÓS, Petra: A gyorsajtástól az időjárásig – Kalandok az alkalmazott matematikában. In: *Természet Világa* 148 (2017), Nr. 8, S. 346–351. – ISSN 0040–3717
- [2] BUDÓ, Ágoston: *Kísérleti fizika I.* Budapest : Tankönyvkiadó Vállalat, 1968
- [3] EULER, Leonhard: Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus. In: *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 3 (1732), S. 124–137
- [4] EULER, Leonhard: De integratione aequationum differentialium altiorum graduum. In: *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum* 7 (1743), S. 193–242
- [5] FEYNMAN, Richard P. ; LEIGHTON, Robert B. ; SANDS, Matthew: *A Feynman-előadások fizikából I.* Budapest : Typotex, 2017
- [6] HAIRER, Ernst ; WANNER, Gerhard: *Analysis by Its History.* New York : Springer, 2008 (Undergraduate Texts in Mathematics). <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-77036-9>
- [7] OBÁDOVICS, J. Gyula: *Matematika.* Budapest : Scholar Kiadó Kft., 2022
- [8] REIMAN, István: *Matematika.* Budapest : Typotex, 2011. – ISBN 978–963–279–300–9
- [9] SAIN, Márton: *Nincs királyi út! Matematikatörténet.* Budapest : Gondolat Kiadó, 1986. – ISBN 963–281–704–4