



ÉVSZÁMOT TARTALMAZÓ VERSENYFELADATOK ÉS MEGOLDÁSAIK A 2026-OS SZÁM VONATKOZÁSÁBAN

Szilágyi Szilvia

Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Matematikai Intézet
szilvia.szilagyi@uni-miskolc.hu

Körei Attila

Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Matematikai Intézet
attila.korei@uni-miskolc.hu

2026. július 8.

Kivonat

Az évszámot tartalmazó feladatok gyakran szerepelnek a magyar és a nemzetközi matematikaversenyeken egyaránt. Cikkünkben a 2026-os számra aktualizált valós számsorozatokkal és függvényekkel kapcsolatos érdekes feladatokat gyűjtöttük össze. A válogatás közös jellemzője, hogy a kiírás évében az eredeti feladatokban szerepelt az aktuális évszám. Minden feladathoz részletes, lépésről lépésre vezető megoldást adtunk; emellett fontosabb trükköket és alternatív megoldási ötleteket is tartalmaznak a feladatokhoz tartozó megjegyzések.

1. Bevezetés

Az évszámos feladatok gyakoriak a versenyeken és a beküldhető feladatsorokban, mert az aktuális évszám érdekesebbé teszi a feladatot, ugyanakkor rugalmas, könnyen variálható kiindulópontot ad különböző matematikai kérdésekhez.

Simjanović et al. (2022) szerint az évszámos feladatok növelik a tanulók motivációját és érdeklődését, mert az aktuális naptári év személyesebb és gyakorlatias kontextust ad a feladatoknak. Ezek a feladatok serkentik a kreativitást és a hagyományostól eltérő gondolkodást, valamint elősegítik a problémamegoldó készségek fejlődését. Gyakran kombinálják a számelméletet, az oszthatóságot, a kombinatorikát és az algebrai gondolkodást, így több matematikai területet kapcsolnak össze. A feladatok megoldása erősíti a koncentrációt és a kitartást, valamint elősegíti a belső motiváció kialakulását. Emellett a szerzők

hangsúlyozzák, hogy az ilyen feladatok hosszabb távon emlékezetesebbek maradnak és növelik az órai aktivitást is. A [9] cikkben összesen 21 feladat található (6 alsó tagozatos, 7 felső tagozatos és 8 középiskolai tanulók számára) 2021-hez kapcsolódva. Minden feladathoz megoldás is szerepel. Az általános iskolás feladatok többségükben számolási és helyiérték-rejtvényekre, egyszerűbb oszthatósági és faktORIZÁCIÓS érvelésre, valamint alapszintű kombinatorikára és törtes problémákra épülnek a 2021-es számmal kapcsolatban. A felső tagozatos és a középiskolai tanulónak szánt példák már beemelik az algebrai azonosságokat és az egyenletek megoldását, a hatványok ciklikusságát, a faktoriálisokkal és a teleszkopikus összegekkel kapcsolatos becsléseket, továbbá számelméleti kérdéseket. Az egyszerű, konkrét számjegyes és műveleti rejtvények a fiatalabb korosztálynak, míg az absztraktabb algebrai, számelméleti és geometriai problémák a felső tagozatos diákoknak és a középiskolásoknak szólnak.

A feladatkészítők szempontjából nézve a szakmai szempontok az elsődlegesek, ugyanakkor az aktuális évszám gyakran kiváló alapot jelent egy igazán jó versenyfeladathoz. Sokféle technika bevonása mellett egyedi, jól rekonstruálható eredmény születhet, ráadásul az évszámmal foglalkozó feladatok nehezebben találhatók meg a szakirodalomban, mint az általánosított verziók. Az évszamos feladatok egyik fontos jellemzője a könnyű paraméterezés és feladatképzés: ugyanazzal az alapfeladattal évszámtól függően több, egymással rokonságban lévő feladatot lehet készíteni vagy egy általános tételhez speciális, érdekes esetet adni. Ez praktikus szempont a versenyek feladatainak létrehozásához. Többek között az 1991 óta megrendezésre kerülő Nemzetközi Magyar Matematika Versenyek (NMMV) feladatai között gyakran találkozhatunk évszamos feladatokkal. A versenyek feladataiból több könyv készült, például [6], [7] és [11]. Az egyik feladatkészítő 2012-ben hat NMMV feladatból álló válogatást állított össze [1]. A bemutatott feladatok közül kettő évszamos feladat.

A modern kori matematikaversenyek története Magyarországon 1894-ben kezdődött: ekkor indult el az Eötvös- (később Kürschák-) verseny, és ekkor jelent meg a Középiskolai Matematikai Lapok (KöMaL) diákfolyóirat is, amely a versenyfeladatok és megoldások hosszú távú gyűjtőhelyévé vált [8]. A KöMaL különleges helyet foglal el a tehetséggondozásban: havi feladatokkal és több nehézségi szinttel (K, C, B, A) a feladatok megoldóitól hosszú távú elköteleződést és matematikai írástudást vár el [2, 5, 4]. A KöMaL-ban megjelent több mint harmincötezer oldalnyi feladat- és cikkanyag teszi ki a KöMaL archívumát. A KöMaL digitalizált évfolyamai folyamatosan bővülnek, és többféle szempont szerint kereshetők. A rendszeres, összetett keresés lehetővé teszi, hogy cím, szöveg, kategória, témakör vagy szerző szerint válogassunk; a találatokhoz tartozó feladatok és cikkek letölthetők, nyomtathatók, így az adatbázis valódi, ingyenes kincsestárként szolgál. Az évszám keresőszó 12 találatot eredményezett a feladatok között. A legkorábbi találat egy 1936-ban kitűzött feladat, az elsőfokú diofantikus egyenletek kategóriájához tartozó szöveges feladat. Ugyanakkor az évszám keresőszó nem jeleníti meg az összes évszámot tartalmazó feladatot, mert általában csak a szöveges feladatokban került kiírásra az évszám szó. Ugyanakkor az adatbázisban keresgélve könnyen találhatunk évszamos példát változatos témakörökben.

Cikkünkben az Országos Középiskolai Verseny (OKTV), az NMMV és a KöMaL feladataiból válogattunk a matematikai analízis két témaköréhez: a valós számsorozatokhoz és a függvényekhez tartozó, könnyen általánosítható évszamos feladatokat, amelyeket aktualizáltunk a 2026-os évre. Emellett Arthur Egel széles körben ismert feladatgyűjteményéből is kiválasztottunk néhány évszamos feladatot. A [3] könyv egy tematikus gyűjtemény több mint 1300 versenyfeladattal. A feladatok többsége világszerte ismert

versenyekről származik: főként a volt Szovjetunióból, Magyarországról, valamint amerikai és német versenyekről. Elder szerint a versenyekre való felkészítéshez sosem lehet elég a jó feladatokról: mindig szükség van új vagy régi, de új megoldással bemutatott vagy új kontextusba helyezett problémákra, mert több példán keresztül hatékonyabban lehet gyakorolni és fejleszteni a feladatmegoldó technikákat.

2. Feladatok a valós számsorozatok témakörében

A rekurzió keresőszó a KöMaL archívumából 25 feladat típusú találatot adott a matematika témakörben. Ezek közül három évszámot tartalmazó feladatot találtunk (B.4766, B.4950 és B.5078), amelyek közül kettőt 2026-ra vonatkozóan adunk most közre. Az első két feladatot azonban Egel könyvéből választottuk [3].

2.1. Feladat. Definiáljuk az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot az alábbi rekurzióval:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = -1, \quad a_n = a_{n-1}a_{n-3}, \quad \text{ha } n \geq 4.$$

Határozzuk meg a_{2026} értékét! / [3] alapján/

Megoldás: A rekurziós formulából adódik, hogy a sorozat csak az 1 és a -1 elemekből áll. Az első 10 elem kiszámolásával jól látható, hogy a sorozat periódikus és teljesen meghatározott az első 7 tag által:

$$\underbrace{1, 1, -1, -1, -1, 1, -1}_{\text{7 tag}}, 1, 1, -1, \dots$$

$$\text{Mivel } 2026 = 7 \cdot 289 + 3 \Rightarrow a_{2026} = a_3 = -1. \quad \square$$

2.2. Megjegyzés. A periódikus sorozat definíció szerint olyan sorozat, amelyre létezik pozitív p úgy, hogy $a_{n+p} = a_n$ minden n -re. Ez azt jelenti, hogy a sorozat teljes viselkedése az első p tag alapján meghatározható. Sok versenyfeladatban a periódus vizsgálata kulcs a feladat megoldásához vagy a konstrukcióhoz. Gyakori trükk az indexeket a periódus szerinti maradékokra bontani, és a sorozatot az első ismétlődő blokk alapján vizsgálni.

2.3. Feladat. Definiáljuk az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot az alábbi rekurzióval:

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_{n-1}a_n + 1, \quad \text{ha } n \geq 1.$$

Mutassuk meg, hogy $4 \nmid a_{2026}$! / [3] alapján/

Megoldás: Számoljuk ki a sorozat első néhány elemét!

$$1, 1, 2, 3, 7, 22, 155, 3411, 528706, \dots$$

A 4-gyel vett osztási maradékok sorozata az első két elem után periódikus:

$$1, 1, \underbrace{2, 3, 3, 2}_{\text{4 elem}}, 3, 3, 2, \dots$$

Jól látható, hogy a 0 sosem jelenik meg az osztási maradékok között, így az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat egyetlen eleme sem osztható 4-gyel, a 2026. tag sem. $\square$

2.4. Megjegyzés. Oszthatósági problémáknál a periodicitás gyakran a maradékok vizsgálatakor jelentkezik: a vizsgált számok maradékai egy véges értékkészletre esnek, így a viselkedés ismétlődik. Ez lehetővé teszi a végtelen sok eset redukálását csupán néhány vizsgálataira. Gyakori technika a maradékosztályok szerinti esetvizsgálat. A periodicitás a maradékok véges értékkészlete mellett a sorozat rekurzív természetéből is következik, mert az új elem előállításához használt algoritmusnak csak véges számú bemenete lehet. A 2.1 és a 2.3 feladat a [3] könyvben 1964-es évszámmal szerepel.

A Fibonacci-számok, illetve a Fibonacci-sorozat a matematika egyik legnépszerűbb számhalmaza [10]. A Fibonacci-számokkal kapcsolatos problémák számos népszerű matematikai könyvben megjelennek, szakkörökön és versenyfelkészítő foglalkozásokon tárgyalják őket, mert matematikai versenyeken gyakran szerepelnek [12]. Gazdag algebrai struktúrájuk lehetővé teszi különböző megoldási technikák bemutatását és összehasonlítását. A Fibonacci-sorozat könnyen variálható: módosított kezdőértékekkel vagy rekurziós együtthatókkal új, érdekes jelenségek figyelhetők meg, amelyek ötletes konstrukciókra adnak lehetőséget.

A KöMaL archívuma 11 találatot adott a Fibonacci-szám keresőszóra, ezek között évszámok feladat a B.4950-es, amely 2018-ban került kitűzésre.

2.5. Feladat. Jelöljük F_n -nel az n -edik Fibonacci-számot! A Fibonacci számok az

$$F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemei. Definiáljuk az $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ sorozatot a következő rekurzióval: legyen $a_0 = 2026$, és minden $k \geq 0$ -ra legyen $a_{k+1} = a_k + F_n$, ahol F_n a legnagyobb Fibonacci-szám, amely kisebb, mint a_k . Előfordul-e az $\{a_k\}_{n=0}^\infty$ sorozatban Fibonacci-szám? /KöMaL feladat alapján/

Megoldás: Vajon a 2026 Fibonacci-szám? A Fibonacci-sorozat a második tagtól kezdve szigorúan monoton növekvő. Felsoroljuk a tagokat, amíg el nem érjük a 2026-ot:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \dots$$

Tehát 2026 nem Fibonacci-szám, mert

$$1597 = F_{17} < 2026 < F_{18} = 2584.$$

Az $\{a_k\}_{n=0}^\infty$ sorozat rekurzív jellege miatt a teljes indukció természetes és hatékony módszer a vizsgálandó tulajdonság bizonyítására: megmutathatjuk, hogy ha a feltétel egy tetszőleges tagra igaz (vagy éppen nem teljesül), akkor emiatt, az előírt rekurzióval, a következő tagra is átöröklődik ugyanez a tulajdonság, majd ez az érvelés minden indexre kiterjeszthető. Tehát: teljes indukcióval belátjuk, hogy az $\{a_k\}_{n=0}^\infty$ sorozatban nincs Fibonacci-szám.

1. $k = 0$ esetén $F_{17} < a_0 = 2026 < F_{18}$, tehát a_0 nem Fibonacci-szám.
2. Tegyük fel, hogy valamely m -re $F_n < a_m < F_{n+1}$ fennáll, ahol F_n az a_m -nél kisebb legnagyobb Fibonacci-szám. Az a_m tehát nem Fibonacci-szám.
3. A feltételt felhasználva kapjuk, hogy:

$$2F_n < a_m + F_n < F_{n+1} + F_n,$$

ahonnan a Fibonacci-sorozat monotonitási tulajdonságából és rekurziós összefüggéséből adódik, hogy:

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n < 2F_n < a_m + F_n < F_{n+1} + F_n = F_{n+2}.$$

Az $\{a_k\}_{n=0}^\infty$ sorozat definícióját használva:

$$F_{n+1} < a_{m+1} < F_{n+2},$$

tehát a_{m+1} sem Fibonacci-szám.

Ezzel igazoltuk, hogy az $\{a_k\}_{n=0}^\infty$ sorozatban egyetlen Fibonacci-szám sincs. $\square$

A teleszkópikus összegek és szorzatok népszerűsége versenyfeladatokban részben abból fakad, hogy a kifejezések többsége kölcsönösen kiejti egymást, így a bonyolult összeg vagy szorzat zárt alakban, egyszerűen kifejezhetővé válik. Ez a módszer gyors és megbízható eszközt ad a pontos értékek meghatározására vagy éles becslések előállítására, ami különösen értékes időkorlátos versenyhelyzetben. A technika szorosan kapcsolódik a résztörtökre bontáshoz, a faktorizációhoz és a logaritmus azonosságaihoz, ezért széles körű alkalmazhatóságot biztosít különböző típusú problémákban. Emellett a teleszkópikus felbontás elegáns, tömör bizonyítást lehetővé tevő módszere alkalmas a kreatív problémamegoldó készségek erősítésére és az intuíció kialakítására. A feladatok megoldásának kulcsa gyakran a megfelelő felbontás vagy átalakítás észrevétele.

2.6. Feladat. Defináljuk az $a_1, a_2, \dots$ sorozatot a következő rekurzióval:

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}), \quad \text{ha } n > 1.$$

Határozzuk meg a_{2026} értékét! /KöMaL feladat alapján/

Megoldás: Az a_n sorozat n -edik részletösszegét jelöljük a megszokott módon:

$$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

így a definiáló összefüggés miatt $s_1 = a_1 = 1$. A rekurzió értelmében

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}s_{n-1},$$

tehát

$$s_n = s_{n-1} + a_n = s_{n-1} + \frac{n+1}{n-1}s_{n-1} = \frac{2n}{n-1}s_{n-1}.$$

Ha ezt az eljárást alkalmazzuk egymás után összesen $(n-1)$ -szer, akkor az

$$s_n = \prod_{k=2}^n \frac{2k}{k-1} s_1 = 2^{n-1} \left(\prod_{k=2}^n \frac{k}{k-1} \right) \cdot 1 = 2^{n-1} \cdot n \quad (1)$$

összefüggéshez jutunk. Az (1) összefüggés felírásához felhasználtuk, hogy

$$\prod_{k=2}^n \frac{k}{k-1} = \frac{n}{1} = n \quad \text{és} \quad s_1 = 1.$$

a_n felírható az n -edik és az $(n-1)$ -edik részletösszegek különbségeként és így (1) miatt azonnal adódik, hogy

$$a_n = s_n - s_{n-1} = 2^{n-1}n - 2^{n-2}(n-1) = 2^{n-2}(n+1).$$

Tehát $a_{2026} = 2^{2024} \cdot 2027$. $\square$

2.7. Megjegyzés. A megoldás legfontosabb felismerése az s_n és az s_{n-1} közötti kapcsolat felírása. A feladat szépségét az adja, hogy a teleszkopikus szorzat végül egy rendkívül egyszerű zárt alakot eredményez, ami a rekurzióban szereplő $\frac{n+1}{n-1}$ szorzótényező következménye. Az aktuális évszám (legyen az 2026 vagy bármi más) csak egy paraméter a feladat végén, hogy a versenyzőnek ne csak a formulát kelljen levezetnie, hanem egy konkrét értéket is meg kelljen adnia.

Aki rutinos, az első 3-4 tag kiszámolása után (1, 3, 8, 20, 48...) észreveheti a mintát:

$$a_2 = 3 = 2^0 \cdot 3$$

$$a_3 = 8 = 2^1 \cdot 4$$

$$a_4 = 20 = 2^2 \cdot 5$$

$$a_5 = 48 = 2^3 \cdot 6$$

Innen már megsejthető az $a_n = 2^{n-2}(n+1)$ összefüggés, amit aztán teljes indukcióval is könnyen bizonyíthatunk.

2.8. Feladat. Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatokat az alábbi módon definiáljuk:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

és

$$b_n = na_n - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1}.$$

Határozzuk meg b_{2026} értékét! /OKTV feladat alapján/

Megoldás: Alakítsuk át b_n -t!

$$b_n = (a_n - a_1) + (a_n - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + a_n.$$

Mivel

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1},$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

ezért b_n zárójeles kifejezései:

$$a_n - a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

$$a_n - a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n},$$

$$\vdots$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}.$$

Látható, hogy a b_n összegben az $\frac{1}{n}$ tag n -szer, az $\frac{1}{n-1}$ tag $(n-1)$ -szer, az $\frac{1}{k}$ tag k -szor szerepel, $k = 1, 2, \dots, n$. Azaz

$$b_n = n \cdot \frac{1}{n} + (n-1) \cdot \frac{1}{n-1} + \dots + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = n,$$

így $b_{2026} = 2026$. $\square$

2.9. Megjegyzés. A 2.8 feladatban az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot a harmonikus sor n -edik részletösszegeinek sorozata definiálja. Ennek a sorozatnak az általános tagjára a szakirodalom gyakran használja a H_n jelölést :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

és az n -edik harmonikus szám elnevezést [13]. A harmonikus számok gyakran felbukkanak matematikai versenyfeladatokban összegek, szorzatok, egyenlőtlenségek és rekurzív definíciók részeként, mert kombinatorikus és analitikus trükkökhöz jól használhatók.

2.10. Feladat. Definiáljuk az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot a következő rekurzióval:

$$a_0 = 2 \quad \text{és} \quad a_n = a_{n-1} - \frac{n}{(n+1)!}, \quad \text{ha } n > 0.$$

Határozzuk meg a_{2026} értékét! /OKTV feladat alapján/

Megoldás: Számítsuk ki a sorozat első néhány elemét!

$$a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{7}{6}, \quad a_3 = \frac{25}{24}, \quad a_4 = \frac{121}{120}.$$

2.11. Sejtés.

$$a_n = \frac{(n+1)! + 1}{(n+1)!} = 1 + \frac{1}{(n+1)!}.$$

A sejtést teljes indukcióval bizonyítjuk.

$$1. \quad n = 0\text{-ra a sejtés helyes, hiszen } a_0 = \frac{1! + 1}{1!} = 2.$$

2. Tegyük fel, hogy

$$a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)!}.$$

3. Bizonyítunk $(n+1) \in \mathbb{N}$ esetén, azaz igazoljuk, hogy

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{(n+2)!}.$$

Felhasználva a feltételt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+1)! + 1}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+2)!} \\ &= \frac{(n+2)! + n+2 - (n+1)}{(n+2)!} = 1 + \frac{1}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Tehát

$$a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)!},$$

így

$$a_{2026} = 1 + \frac{1}{2027!}$$

azonnal adódik. $\square$

2.12. Feladat. Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n^2 + a_n.$$

Határozzuk meg az

$$S_{2026} = \frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \dots + \frac{1}{a_{2026} + 1}$$

összeg egészrészét! /NMMV feladat alapján/

Megoldás: A sorozat elemei pozitív számok. Továbbá

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n(a_n + 1)} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n + 1},$$

így

$$\frac{1}{a_n + 1} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Tehát:

$$\begin{aligned} S_{2026} &= \frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \dots + \frac{1}{a_{2026} + 1} \\ &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{2026}} - \frac{1}{a_{2027}} \right). \end{aligned}$$

A zárójelek felbontása és összevonás után:

$$S_{2026} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2027}} = 2 - \frac{1}{a_{2027}}.$$

Könnyen látható, hogy a sorozat pozitív tagú és szigorúan monoton növekvő. Az első néhány tag:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{4}, \quad a_3 = \frac{21}{16},$$

azaz

$$1 < a_3 < a_{2027},$$

így

$$0 < \frac{1}{a_{2027}} < 1.$$

Tehát

$$1 < S_{2026} = 2 - \frac{1}{a_{2027}} < 2,$$

így $[S_{2026}] = 1$. $\square$

2.13. Megjegyzés. A 2.12. feladat kulcsa a teleszkopikus átalakítás, ami egyszerűvé teszi az összeg kiszámítását.

3. Függvényes feladatok

3.1. Feladat. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \geq 0, \\ 1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

továbbá

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x-1)}$$

és végül

$$h(x) = g(x) + 2g\left(\frac{x}{2}\right) + 3g\left(\frac{x}{3}\right) + \dots + 2026g\left(\frac{x}{2026}\right).$$

Számítsuk ki $h(\pi)$ -t! /OKTV feladat alapján/

Megoldás:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 1 \text{ vagy } x < 0, \\ 2, & \text{ha } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Vagyis tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$g\left(\frac{\pi}{n}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi > n, \text{ azaz } n = 1, 2, 3; \\ 2, & \text{ha } \pi < n, n \geq 4. \end{cases}$$

Emiatt

$$h(\pi) = 1 + 2 + 3 + 2(4 + 5 + \dots + 2026) = 6 + 2030 \cdot 2023 = 4\,106\,696,$$

$$\text{mert } 4 + 5 + \dots + 2026 = \frac{(4 + 2026)}{2} \cdot 2023. \quad \square$$

3.2. Megjegyzés. A 3.1. feladat rövid, szemléletes és a megoldása több alapvető matematikai készséget egyesít. Több témát kapcsol össze: gyakoroltatja az esetbontást és az egyenlőtlenségek kezelését, az intervallumonként megadott függvényekkel való számolást és a számtani sorozat összegképletét. Jól szemlélteti, hogyan viselkednek a függvényértékek eltolt argumentum esetén. A feladatban szereplő definiáló összefüggések egyszerűek (a felvett értékek 1 vagy 2), így a diákok gyorsan megértik a hozzárendelési szabályt és hamar látják az összefüggéseket. A feladat érdekessége, hogy egy transzcendens szám (π) diszkrét feltételeket hoz létre.

A feladat szerkezete egyszerű, mert a

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x-1)}$$

függvény értéke azoktól az intervallumoktól függ, amelyekbe x és $x-1$ esnek. Tehát x -re nézve három intervallum van: $x < 0$, $0 \leq x < 1$, és $x \geq 1$, és g csak ezek alapján vesz fel értéket. Ha helyettesítjük π -t bármely $3 < C < 4$ valós számmal, akkor a $g\left(\frac{C}{n}\right)$ eloszlása n szerint változatlan marad, és az összeget ugyanolyan esetbontással lehet kiszámítani; érdemes a számtani sorozatra vonatkozó formulát alkalmazni.

A 3.1. feladat évszámot tartalmazó feladattá könnyen tehető, mert a $h(x)$ utolsó tagja tetszőlegesen növelhető. Hasonló megoldási módszer működik, ha az f más konstansokkal van definiálva, vagy ha g -t más argumentummal képezzük (nem 1-gyel, hanem valamilyen k egészszel végezzük az eltolást): mindig intervallumok és esetbontás vezet a megoldáshoz. A $h(x)$ esetén az együtthatók is variálhatók, így könnyen adhatók hasonló vagy összetettebb feladatok ugyanebből az alapötletből.

3.3. Feladat. Legyen

$$f_1(x) = -\frac{2x+7}{x+3}, \quad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)).$$

Határozzuk meg $f_{2025}(2026)$ értékét! /KöMaL feladat alapján/

Megoldás: Alakítsuk át $f_1(x)$ -et:

$$f_1(x) = -\frac{2(x+3)+1}{x+3} = -2 - \frac{1}{x+3}, \quad D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

Határozzunk meg néhány további elemet a sorozatból!

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = -2 - \frac{1}{f_1(x)+3} = -2 - \frac{1}{-2 - \frac{1}{x+3} + 3} = -3 - \frac{1}{x+2}, \quad D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-2\},$$

$$f_3(x) = f_1(f_2(x)) = -2 - \frac{1}{f_2(x)+3} = -2 - \frac{1}{-3 - \frac{1}{x+2} + 3} = -2 + x + 2 = x, \quad D_{f_3} = \mathbb{R},$$

$$f_4(x) = f_1(f_3(x)) = -2 - \frac{1}{f_3(x)+3} = f_1(x),$$

$$f_5(x) = f_2(x),$$

$$f_6(x) = x.$$

Igazoljuk, hogy a függvénysorozat periodikus és periódusa 3! Láttuk, hogy $f_3(x) = x$, így

$$f_{3+n}(x) = f_1(f_1(f_1(f_n(x)))) = f_3(f_n(x)) = f_n(x).$$

Tehát

$$f_{2025}(2026) = 2026,$$

mert $2025 = 675 \cdot 3$. $\square$

3.4. Megjegyzés. A 3.3 feladat egyszerű algebrai behelyettesítésekkel szemlélteti az iteráció és a periódus fogalmát; itt $f_{3n}(x) = x$ miatt az iteráció indexének 3-mal való oszthatósága dönt a keresett helyettesítési értékről. Évszámok kontextusban a példa világosan kapcsolja össze az algebrai műveleteket és az egyszerű oszthatósági érvelést.

3.5. Feladat. Legyen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ olyan függvény, amelyre minden $x \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x) + f(f(x)) = 12x + 5,$$

továbbá $f(26) = 79$. Feltéve, hogy a megadott tulajdonságokkal rendelkező függvény létezik, van-e olyan $x \in \mathbb{N}$, amelyre $f(x) = 2026$? /OKTV feladat alapján/

Megoldás: A feltételeknek megfelelő függvényt a lineáris függvények körében keressük, mert a feladatban szereplő egyenlet jobb oldalán lineáris kifejezés áll. Legyen

$$f(x) = ax + b$$

alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. A függvényegyenletbe helyettesítve az alábbi összefüggést kapjuk:

$$ax + b + a(ax + b) + b = 12x + 5.$$

A zárójel felbontása, összevonás és kiemelés után:

$$(a^2 + a)x + ab + 2b = 12x + 5 \quad (2)$$

adódik. A (2) egyenletből az alábbi egyenletrendszer írhatjuk fel:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + a = 12 \\ ab + 2b = 5 \end{array} \right\}$$

Az első egyenletből a -ra két értéket kapunk:

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2},$$

azaz $a_1 = -4$ és $a_2 = 3$. A megoldást esztétikailag folytatjuk:

- $a_1 = -4$ felhasználásával a második egyenletből $b_1 = -\frac{5}{2}$ számolható, azonban ekkor

$$f(26) = -4 \cdot 26 - \frac{5}{2} = -\frac{213}{2} \neq 79,$$

tehát a megadott feltételek egyike nem teljesül.

- $a_2 = 3$ -ra a második egyenletből $b_2 = 1$ adódik és

$$f(26) = 3 \cdot 26 + 1 = 79.$$

Az $f(x) = 3x + 1$ függvény valamennyi kiindulási feltételnek eleget tesz.

Megnézzük, hogy van-e olyan $x \in \mathbb{N}$, amelyre $f(x) = 2026$, azaz

$$f(x) = 3x + 1 = 2026.$$

Az egyenlet megoldása $x = 675$. Tehát létezik olyan $x \in \mathbb{N}$, amelyre $f(x) = 2026$. $\square$

3.6. Megjegyzés. A megadott függvényegyenlet jobb oldalának lineáris jellege miatt érdemes $f(x)$ -re lineáris hozzárendelési szabályt keresni. A 3.5 feladat jobb oldala elsőfokú kifejezés, azaz nem tartalmaz egynél magasabb hatványkitevőjű tagot. Emiatt a polinomok között csupán a lineáris lehetőség marad $f(x)$ keresésére, mert csak a lineáris polinom komponálása önmagával nem emeli meg a kifejezés kitevőjét, így az egyenlet bal oldalán álló összeg is lehet elsőfokú.

Az eredeti feladat 2021-ben került kitűzésre olyan paraméterezéssel, amely lehetővé tette a feladat megoldását az iteráltak számolásával. A 3.5 feladat esetén a megoldás nem kapható meg ezzel a módszerrel. Ha módosítjuk a függvényegyenlethez tartozó feltételt, akkor könnyen találhatunk olyan feladatot, amely az iteráltak számolásával is megoldást ad. Például egy lépésben megoldható a feladat az $f(200) = 379$ feltétellel, mert

$$f(200) + f(f(200)) = 12 \cdot 200 + 5,$$

azaz $f(f(200)) = f(379) = 2026$. Két iterációs lépésre van szükség az $f(24) = 178$ feltétel használata mellett:

$$f(24) + f(f(24)) = 12 \cdot 24 + 5,$$

ekkor $f(f(24)) = f(178) = 115$, továbbá

$$f(178) + f(f(178)) = 12 \cdot 178 + 5,$$

ahonnan $f(f(178)) = f(115) = 2026$ számolható.

4. Záró gondolatok

Az évszamos feladatok egyszerre kínálnak gyakorlati számolási kihívást és elméleti gondolkodást, ezért értékes eszközei a tehetséggondozásnak és a matematikai kultúra építésének. A cikkben bemutatott 2026-os évszámhoz kapcsolódó versenyfeladatok jól szemléltetik, hogy az aktuális évszám bevonása konkrét fogódzót adhat egy-egy feladat megoldásához, ugyanakkor a feladatok felépítése tág teret biztosíthat az általánosításra. A vizsgált évszamos feladatok változatos módszereket — rekurziót, teleszkopikus átalakítást, iterációt és esetbontást — hívnak elő, így több matematikai területet integrálnak. Gyakorlati előnyük a könnyű paraméterezhetőség: egy alapötlet különböző évszámokkal új, mégis rokonságban álló problémákat ad. A részletes megoldások nemcsak az eredményt szolgáltatják, hanem a módszerek logikáját és a kulcsfelismeréseket is feltárják, ami fontos a problémamegoldó készség fejlesztéséhez.

Az évszám szerepe motiváló és kontextust adó, ugyanakkor nem korlátozza a feladat elméleti tartalmát vagy általánosíthatóságát. A versenygyakorlatban az évszamos feladatok elősegítik a koncentrációt és a motivációt, az analitikus gondolkodás és a kreatív megközelítések alkalmazásának igénye mellett. Az évszamos feladatokat érdemes aktualizálni, hogy fenntartsák a diákok érdeklődését és a megoldó személyes bevonódását.

A feladatok kiválasztásakor nem törekedtünk és nem is törekedhattünk teljességre. Ez a válogatás csak egy izgalmas ízelítő; rengeteg további, kreatív és kihívást rejtő évszamos feladat vár felfedezésre a versenyek dokumentációiban és az archívumok mélyén. Reméljük, hogy a példák felkeltik a kíváncsiságot, inspirálnak saját variációk készítésére, ösztönöznek a megoldások átgondolására és további szép megoldások keresésére. Az új feladatok készítése gazdag, játékos és kiváló terep a problémamegoldó készségek fejlesztésére.

Hivatkozások

- [1] BORBÉLY, József: On some problems of the International Hungarian Mathematical Competition. In: SEEBAUER, Márta (Hrsg.): *7th International Symposium on Applied Informatics and Related Areas: AIS 2012*, 2012, 85–88
- [2] CONNELLY STOCKTON, Julianna: Mathematical competitions in Hungary: Promoting a tradition of excellence & creativity. In: *The Mathematics Enthusiast* 9 (2012), Nr. 1, 37–58. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1234>
- [3] EGEL, Arthur: *Problem-Solving Strategies*. Springer New York, NY, 1997 <https://doi.org/10.1007/b97682>
- [4] GYULA, Nagy: Tudományok katalizátora a KöMaL. In: *Magyar Tudomány* 11 (2003), 1455–1459. <https://real-j.mtak.hu/1885/11/2003-11.pdf>
- [5] KÓS, Rita: The History and Methodology of KöMaL Competitions. Version: 2024. https://doi.org/10.1142/9789811279294_0012. In: *Engaging Young Students in Mathematics through Competitions World Perspectives and Practices: Volume III: Keeping Competition Mathematics Engaging in Pandemic Times*. World Scientific, 2024, 195–226
- [6] KÁNTOR, Sándor ; KÁNTOR, Sándorné: *Nemzetközi magyar matematika versenyek*. Studium, Debrecen, 1999

- [7] KÁNTOR, Sándor ; KÁNTOR, Sándorné: *Nemzetközi magyar matematika versenyek 1992-2003*. Studium, Debrecen, 2003
- [8] LOSADA, María F. ; TAYLOR, Peter J.: Perspectives on mathematics competitions and their relationship with mathematics education. In: *ZDM–Mathematics Education* 54 (2022), Nr. 5, 941–959. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01404-z>
- [9] SIMJANOVIĆ, Dušan ; RANDJELOVIĆ, Branislav ; VESIĆ, Nenad ; PENJIŠEVIĆ, Aleksandra: Examples of mathematical problems in primary and secondary education that include the actual calendar year. In: *Facta Universitatis, Series: Teaching, Learning and Teacher Education* (2022), 191–200. <https://doi.org/10.22190/FUTLTE210617015S>
- [10] SUPRIATNA, Asep K. ; CARNIA, Ema ; NDII, Meksianis Z.: Fibonacci numbers: A population dynamics perspective. In: *Heliyon* 5 (2019), Nr. 1, e01130. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e01130>
- [11] SZILÁRD, András ; MÉSZÁROS, Alpár ; NAGY, Örs: *Nemzetközi Magyar Matematikaverseny*. Státus Kiadó, Csíkszereda, 2010
- [12] VOROBIEV, Nicolai N.: *Fibonacci numbers*. Springer Science & Business Media, 2002 <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8107-4>
- [13] WEISSTEIN, Eric W.: Harmonic number. (2002). <https://mathworld.wolfram.com/HarmonicNumber.html>