

## KOPÁSOK NUMERIKUS SZIMULÁLÁSA

Páczelt István<sup>1</sup>, Mróz Zenon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Professzor emeritus, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet  
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: [mechpacz@uni-miskolc.hu](mailto:mechpacz@uni-miskolc.hu)

<sup>2</sup> Professzor emeritus, Institute of Fundamental Technological Research, PAN.  
ul. Pawlowskiego 5B; 02-106 Warszawa, Poland, e-mail: [zmroz@ippt.gov.pl](mailto:zmroz@ippt.gov.pl)

### Összefoglalás

A cikk az alkatrészek egymáshoz képesti elcsúszásánál jelentkező száraz súrlódás okozta kopások numerikus szimulálásával foglalkozik a kopási sebesség Archard féle törvényen keresztüli modellezésével. Megadja a monoton jellegű relatív mozgások esetén az állandósult kopási állapotnál jelentkező nyomás meghatározásának variációs módszerét, amellyel a kopási törvény közvetlen integrálása nélkül a nyomás meghatározható. Számos példán keresztül bemutatja ezen elv alkalmazhatóságát. Kitér a periodikus mozgás okozta kopások számítására, az állandósult állapot eléréshez szükséges ciklusszám egyszerű meghatározásának analitikus módszerére.

**Kulcsszavak:** állandósult kopás, rugalmasságtan, periodikus mozgás, kopási disszipációs teljesítmény, optimalizálás

### Abstract

The paper investigates the wear process at dry friction using the Archard wear rule. It gives a variational method for calculation of the contact pressure directly without time integration of the wear rule until the steady state is reached. Some examples are demonstrated the possible using of this method. The periodic sliding of contacting bodies, assuming cyclic steady state conditions is investigated in the paper. An analytical method for prediction of the number of cycles to reach steady wear periodical state is given in it.

**Keywords:** steady wear state, theory of elasticity, periodic motion, wear dissipation power, optimization

## 1. Bevezetés

Az egymáson elcsúszó alkatrészek a súrlódásakor az anyagleválasztódás miatt kopnak, méretük lassan változik, ami a testekben kialakuló feszültségállapot változását is maga után vonja. A kezdeti érintkezési viszonyok a testek között megváltoznak. Kísérletileg is igazolt, hogy a kopás mértéke, annak sebessége függ az érintkezési nyomástól, a testek közötti relatív sebességtől, a felületi keménységtől, az érdességtől, a súrlódási tényezőtől. A gyakorlat számára a kopási viszonyok leírását nagyon jó közelítéssel írja le az ún. modifikált Archard féle törvény [1], aminek értelmében az érintkezési felület normálisának irányában a kopás sebessége az  $i$ -dik test vonatkozásában.

$$\dot{w}_{i,n} = \beta_i (\tau_n)^{b_i} \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|^{a_i} = \beta_i (\mu p_n)^{b_i} \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|^{a_i} = \beta_i (\mu p_n)^{b_i} v_r^{a_i} = \tilde{\beta}_i p_n^{b_i} v_r^{a_i}, \quad i=1,2 \quad (1)$$

ahol  $\mu$  a súrlódási tényező,  $\beta_i, a_i, b_i$  kísérletekből meghatározott kopási paraméterek,  $\tilde{\beta}_i = \beta_i \mu^{b_i}$ ,  $v_r = \|\dot{\mathbf{u}}_r\|$  a testek közötti érintősíkba eső relatív sebesség. A súrlódási feszültséget az érintkezési felületen jelölje  $\tau_n$ , ami száraz súrlódást feltételezve a Coulomb féle összefüggéssel számítható a  $p_n$  nyomás és a súrlódási tényező alkotta szorzaton keresztül  $\tau_n = \mu p_n$ .

A gyakorlatból jól ismert, hogy a beüzemelés folyamán egy bizonyos bejáratási idő után a kopási viszonyok gyakorta állandósult állapotba kerülnek, azaz időben nem változó terhelés, relatív sebesség estén a merevtestszerű mozgást végző test un. merevtestszerű kopási sebesség állandósága mellett a nyomás megoszlása az érintkezési tartomány felett időben már nem változik.

A feladatkör az érintkezési problémákon belül az optimalizáláshoz, a kopási folyamatok vizsgálatához tartozik. Érintkezési optimalizációs feladatokat Haslinger és Neittaanmaki matematikai igényességgel tárgyalt könyve [2], Hilding és társainak [3] áttekintő cikke, Páczelt [4], Páczelt és Baksa [5] különféle optimalizációs feladatok megoldását elemző munkái foglalják össze. A kopási folyamatokat elemzi a peremérték feladatok pontos megoldásaival Goryacheva és Dobuchin [6] korábbi könyvében ill. Soldatenkov munkája [7] jelent további fontos forrást a téma iránt érdeklődőknek. Érintkezési feladatokkal foglalkozó nagyszámú publikáció közül a numerikus technikát is alkalmazó Johnson [8], Kalker [9], Laursen [10] és Wriggers [11] által írt könyvek emelendők ki.

A [12-18] munkáinkat követve, két rugalmas testből  $B_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) felépített rendszer érintkezési feladatát fogjuk vizsgálni. Az esetek döntő többségében feltételezzük, hogy a  $B_1$  test csak a kopás következtében fog kismértékű merevtestszerű mozgást végezni, míg a testek közötti nagymértékű relatív mozgást a  $B_2$  mozgása fogja okozni.

A két test közötti relatív mozgás szempontjából az alábbi eseteket tudjuk megkülönböztetni:

*Eset 1.* Az egyik test,  $B_1$  megfogása miatt merevtestszerűen nem tud elmozdulni, a ráható terhelés, a keletkezett hőhatás deformálja a testeket, de a létrejött kopás csak addig fog tartani, amíg a testek közötti deformált állapotbeli hézag a nyomás eltűnéséhez nem vezet.

*Eset 2.* Az  $S_c$  érintkezési felület terjedelme a kopás alatt nem változik, ez előzetesen ismeret. Amikor a  $B_1$  testre, mint egy bélyegre tekintünk, és a  $B_2$  test csúszik a bélyeghez képest, akkor az érintkezési tartomány a  $B_1$ -hez kötött, a  $B_2$ -n pedig újabb és újabb, a csúszási által meghatározott helyre kerül. A merevtestszerű kopási vektor a  $B_1$  testre vonatkozó peremfeltétellel meghatározott. Az állandósult kopási tartományban az érintkezési nyomás lefutása, a  $B_1$  testen belül a feszültségállapot időben nem változik. A  $B_2$ -n a nyomás a relatív csúszás által meghatározott módon változó helyen hat, de lefutása változatlan.

*Eset 3.* Az  $S_c$  érintkezési tartomány a kopási folyamat alatt megváltozik, például gömb bélyeg esetén, amikor is az érintkezési tartomány  $a = a(t)$  sugara nő. Azt mondhatjuk,

hogy kvázi-állandósult kopás jön létre, amelynél a keletkező feszültég, a kopási alak a kialakult  $a(t)$  paramétertől függ. Ebben az esetben a kvázi-állandósult nyomás megoszlása, a kopott alak a felvett  $a(t)$  paraméter által egyértelműen meghatározott.

*Eset 4.* Hasonlóan az *Eset 2* –höz, az  $S_c$  érintkezési tartomány rögzített, de a kopás a testek közötti periodikus csúszási mozgással áll elő. A periodikus megoldás az egymást követő ciklusonként azonosan (állandósultan) ismétlődik.

*Eset 5.* Az *Eset 3* –hoz hasonlóan az  $S_c$  érintkezési tartomány változik, a periodikus mozgás, avagy a terhelés miatt. A keletkező nyomás a kvázi-állandósult periodikus állapotban függ az  $a(t)$  érintkezési tartományt jellemző paramétertől.

Számítástechnikai szempontból nézve a problémát, a kopási folyamat időbeli lefutásának nyomon követése az (1) alatti kopási törvény időintegrálásával érhető el. Kérdésként merül fel, lehetséges-e valami úton-módon az időintegrálás hosszadalmas folyamatát kikerülve, valamilyen variációs elv révén, közvetlenül meghatározni az állandósult állapotra jellemző nyomást, a merevtestszerű kopási sebességet. A kérdésre adott válasz igen.

A korábbi kutatások kimutatták, hogy a testek közötti relatív monoton mozgás esetén a kopási disszipációs energia minimumához az állandósult kopás tartozik [12]. A szóbanforgó funkcionál minimalizálásával a merevtestszerű mozgást (kopás miatt) végző testre felírt egyensúlyi egyenletek kielégítésével kapott nyomásra egyszerű összefüggés vezethető le [12-17]. Az érintkezési súrlódási feszültségnek az egyensúlyra való hatása miatt, a disszipációs energia felírásához be kellett vezetni –a korábbiakban nem használt– kopási sebességi vektort [14], ami általános esetben az érintkezési felület normális és tangenciális irányába eső összetevőkkel fog rendelkezni. Egy másik lényeges feltételezéssel is kellett élni az *Eset 2* alatti problémánál, nevezetesen állandósult kopási állapotban a kopási sebesség párhuzamos a merevtestszerű kopási vektorral, amit az azonos irányítottság alapszabályának fogjuk a továbbiakban nevezni.

Az alábbiakban röviden áttekintjük a saját korábbi munkáink főbb eredményeit. A [14] -ben az új elvet alkalmaztuk különböző típusú fékekre. [15] munka a bevezetett új elvet felhasználta a kapcsolt kopási-hőtani-rugalmaságtani feladat megoldására. A nemlineáris kopási törvény értelmében a kopási sebesség függvénye a csúszató feszültségnek, a relatív sebességnek. A különböző típusú fékek elemzésére került sor a hőhatás miatti elmozdulások figyelembevételével. [16] a hőtani-mechanikai kopási feladatok kritikai elemzését tartalmazza. A kapcsolt hőtani-mechanikai feladatot az ún. operátor felbontási technikával oldjuk meg. Ez azt jelenti, hogy a mechanikai és hővezetési feladatot, egymást követően, egyikben a hőmérséklet mező, a másikban a mechanikai mezők lerögzített értékei ismeretében oldjuk meg, természetesen, iterációs folyamat révén. Az anyagállandók feltételezéseink értelmében nem függenek a hőmérséklettől. Az állandósult kopásnál kialakuló nyomás azonos a hőhatás nélküli esetben kapottakkal, de a kopott alakot a hőmérséklet erősen befolyásolja. A különböző fékpofás megtámasztás hatásának elemzésére is sor került a szóbanforgó cikkben. A [17] munka szintén foglalkozik a kapcsolt hőtani problémával állandósult kopás vonatkozásában. Vizsgáltuk a bélyeg alatt elcsúszó sávot, a forgó bélyeget tórusz alakú felülettel. Feltételeztük, hogy a kopási paraméterek és a súrlódási tényező a hőmérséklettől is függhetnek. Háromfajta, a kopadék mozgásával kapcsolatos súrlódási modell került bevezetésre. Érintkezési összeférhetőségi feltétel is meghatározásra került.

Azokban az esetekben, amikor a bélyeg, vagy a bélyeg és sáv kopik, akkor az érintkezési nyomás a kopás által kialakuló relatív merevtestszerű mozgástól függ. Ugyanakkor, amikor csak a sáv (alsó test) kopik, akkor a nyomás függ a rugalmassági anyagállandóktól, a kontaktfeladat megoldása szolgáltatja a kialakult nyomást, a levezetett kopási disszipációs teljesítmény minimumának elve ekkor már nem érvényes. A [18] kiterjeszti az előzetes munkák [14-17] eredményeit a testek közötti periodikus relatív mozgás esetére, *Eset 4*. A kopási törvény időintegrálásával számos feladat került megvizsgálásra. A számításokra itt is, mint a többi munkában, a  $p$ -verziójú végelemek kerülnek felhasználásra sikeresen megközelítve a kopott alakot. A periodikus mozgásokkal kapcsolatos kopások előrejelzésére a monoton mozgásoknál kapottak is felhasználásra kerültek. Appendixben az érintkezési nyomásra vonatkozó formulák levezetésre kerülnek, diszkrétizált formában, a Green függvények felhasználásával. *Eset 5*-el kapcsolatosan a [19] tartalmaz érdekes eredményeket.

## 2. Kopási vektor, érintkezési feszültség

A kopási vektort az érintkező testek közötti relatív merevtestszerű mozgás határozza meg. A kopási vektor  $\dot{\mathbf{w}}_R$  a felület transzformálását és lekopott anyag tangenciális irányú mozgását jellemzi.

Azonos irányítottság alapszabálya alapján [14,15] a kopási vektor sebessége  $\dot{\mathbf{w}}_R$  párhuzamos a merevtestszerű kopási sebességgel

$$\dot{\mathbf{w}}_R = \dot{w}_R \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{e}_R = \frac{\dot{\lambda}_R}{\|\dot{\lambda}_R\|} = \frac{\dot{\lambda}_F + \dot{\lambda}_M \times \Delta \mathbf{r}}{\|\dot{\lambda}_F + \dot{\lambda}_M \times \Delta \mathbf{r}\|} \quad (2)$$

ahol  $\dot{\lambda}_F$  és  $\dot{\lambda}_M$  - a kopás által keletkezett merevtestszerű eltolódás és forgás sebessége,

$\Delta \mathbf{r}$  -a  $C_0$  ponthoz viszonyított helyvektor,  $\dot{\mathbf{w}}_R = \|\dot{\lambda}_F + \dot{\lambda}_M \times \Delta \mathbf{r}\|$ .

Ekkor a kopási sebesség vektor

$$\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}_2 - \dot{\mathbf{w}}_1 = \dot{\mathbf{w}}_R = \dot{w}_{2,R} \mathbf{e}_R - \dot{w}_{1,R} \mathbf{e}_R = -\dot{w}_{1,R} \mathbf{e}_R + \dot{w}_{2,R} \mathbf{e}_R = \dot{w}_R \mathbf{e}_R \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{w}}_R = \dot{\lambda}_F + \dot{\lambda}_M \times \Delta \mathbf{r} \quad (4)$$

A  $B_1$  és a  $B_2$  test közötti érintkezési feszültséget a következő összefüggés

$$\mathbf{t}^c = \mathbf{t}_1^c = -\mathbf{t}_2^c = -p_n (\mathbf{n}_c \pm \mu \mathbf{e}_{\tau_1}) - \mu_d p_n \mathbf{e}_{\tau_2} = -p_n \boldsymbol{\rho}_c^\pm \quad (5)$$

írja le, ahol  $\mu_d$  - a keresztirányú kopási sebesség irányhoz tartozó súrlódási tényező. Az  $\mathbf{e}_{\tau_1}, \mathbf{e}_{\tau_2}, \mathbf{n}_c$  vektorok kíséző triédert alkotnak az  $S_c$  kontaktfelületen (lásd 1. ábra). Itt  $\mathbf{n}_c$  a  $B_1$  test érintkezési normálisa,  $\mathbf{e}_{\tau_1}$  - a relatív sebességgel egybeeső érintősíkba eső egységvektor,  $\mathbf{e}_{\tau_2}$  - a keresztirányú érintővektor.

Az 1. ábra alapján a normális és tangenciális irányú kopási sebességek

$$\dot{w}_n = \dot{w}_R \cos \chi, \quad \dot{w}_\tau = \dot{w}_R \sin \chi = \dot{w}_n \tan \chi, \quad (6a)$$

ahol  $\chi$  az  $\mathbf{n}_c$  és  $\mathbf{e}_R$  közötti szög. Továbbá

$$\dot{w}_{\tau 1} = w_R \sin \chi \cos \chi_1, \quad \dot{w}_{\tau 2} = w_R \sin \chi \sin \chi_1 \quad (6b)$$

ahol a  $\chi_1$  szög az  $S_c$ -re vetített  $\dot{\mathbf{w}}_R$  és  $\mathbf{e}_{\tau,1}$  közötti szögnek felel meg.

Fel fogjuk tételezni, hogy az  $S_c$  (mérete) időben nem változik. Az 1-es test az álló belyegnek, a 2-es test a mozgó testnek fog megfelelni, vagyis állandósult állapotban az 1-es test feszültségállapota időben nem változik, míg a 2-es testben az a szállítósebességgel mozog.

### 3. Minimalizálandó funkcionál

Az állandósult kopás tisztázására, előzetes vizsgálataink szerint [14, 15], a következő kopási disszipációs teljesítményt kell minimalizálni

$$D_w = \sum_{i=1}^2 \left( \int_{S_c} (\mathbf{t}_i^c \cdot \dot{\mathbf{w}}_i) dS \right) = \sum_{i=1}^2 C_i \quad (7)$$

az 1-es testre vonatkozó egyensúlyi egyenletekkel, mint mellékfeltételekkel

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= - \int_{S_c} \boldsymbol{\rho}_c^\pm p_n dS + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{m} &= - \int_{S_c} \Delta \mathbf{r} \times \boldsymbol{\rho}_c^\pm p_n dS + \mathbf{m}_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8)$$

ahol  $\mathbf{f}_0$  és  $\mathbf{m}_0$  a  $B_1$  testre ható külső terhelés redukált vektorkettősének erő és nyomaték vektora.

Bevezetve a  $\dot{\lambda}_F$  és  $\dot{\lambda}_M$  Lagrange-féle multiplikátorokat, az optimalizációs feladathoz az alábbi Lagrange-féle funkcionál rendelhető a  $b = b_1 = b_2$  paraméterek egyenlősége mellett

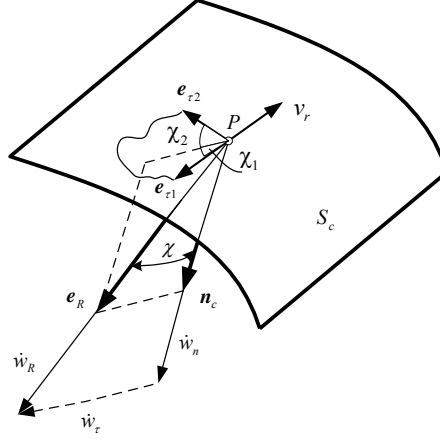
$$L_{D_w} = L_{D_w}(p_n, \dot{\lambda}_F, \dot{\lambda}_M) = D_w(p_n) + (b+1)(\dot{\lambda}_F \cdot \mathbf{f} + \dot{\lambda}_M \cdot \mathbf{m}) \quad (9)$$

Kielégítve a (9)-ből nyert  $\delta_{p_n} L_{D_w} = 0$  stacionaritási feltételt, továbbá bevezetve a

$\tilde{\lambda}_F = \frac{\dot{\lambda}_F}{K}$ ,  $\tilde{\lambda}_M = \frac{\dot{\lambda}_M}{K}$  mennyiségeket, a kontaktnyomásra nyerjük, hogy

$$p_n = \left( (\tilde{\lambda}_F \cdot \boldsymbol{\rho}_c^\pm + (\tilde{\lambda}_M \times \Delta \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_c^\pm) \frac{1}{Q} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (10)$$

ahol  $K = \sum_{i=1}^2 \tilde{\beta}_i v_r^{a_i}$ ,  $Q = 1 \mp \mu \tan \chi \cos \chi_1 - \mu_d \tan \chi \sin \chi$ .



1. ábra. Az  $S_c$  felületen értelmezett koordinárendszer, kopási sebességek, azonos irányítottság elve a  $\dot{w}_R$  és az  $e_R$  vektorokkal.

Látható, hogy  $p_n^\pm = p_n^\pm(\tilde{\lambda}_F, \tilde{\lambda}_M, \mu, \mu_d, b)$ , továbbá az egyensúlyi egyenletek

$$f(\tilde{\lambda}_F, \tilde{\lambda}_M, \mu, \mu_d, b) = 0, m(\tilde{\lambda}_F, \tilde{\lambda}_M, \mu, \mu_d, b) = 0 \text{ a } \tilde{\lambda}_F, \tilde{\lambda}_M \text{ függvényei. Ez azt jelenti,}$$

hogy az egyensúlyi egyenletből nyert  $\tilde{\lambda}_F, \tilde{\lambda}_M$  nem függvénye a  $K$ -nak, vagyis a nyomás megoszlása nem függ a  $\tilde{\beta}_i, a_i, i=1,2$  kopási paramétereiktől és a relatív  $v_r$  sebességtől. Természetesen a  $\dot{\lambda}_F, \dot{\lambda}_M$  merevtestszerű kopási vektorok, a  $K$ -n keresztül, már függvényei az említett paramétereknek:  $\dot{\lambda}_{F,M} = \tilde{\lambda}_{F,M} K$ . (10) alapján úgyszintén látható, hogy a nyomás erősen függ a  $b$  paramétertől és a  $\mu$  súrlódási tényezőtől. Megjegyzendő, hogy a (8),(10) egyenletrendszer erősen nemlineáris, megoldására a Newton-Raphson módszer javasolt. A (9) minimalizálásánál feltételeztük, hogy a nyomás az  $S_c$  tartomány minden pontjában pozitív, tehát az  $S_c$  nem csak a szóba jöhető érintkezési tartományt jelöli ki, hanem egyúttal a ténylegest is.

Megjegyzések:

- [13]-ban nyert bizonyítást, hogy az állandósult (időben nem változó kopási feltételek) kopáshoz a  $b = b_1 = b_2$  egyenlőségnek fenn kell állnia, ill. forgástesteknél  $a = a_1 = a_2$ .
- Mivel a (8)-(10) feladat megoldásából az érintkezési nyomás, majd a Coulomb-féle törvény értelmében a csúsztató feszültség is ismert, a kiszámolt érintkezési feszültség

séget, mint ismert terhelést működtetve a szerkezeti elemekre, az optimális nyomáshoz tartozó kezdeti hézag már könnyen meghatározhatóvá válik [3, 4]. A számítás elvégezhetősége érdekében a  $B_1$  test merevtestszerű mozgása miatt, a szétszedett rendszer különálló terhelési vizsgálatánál, a  $B_1$  testet nagymerevségű rúgókkal „fiktíven” meg kell támasztani, hogy a merevségi mátrix szingularitását elkerüljük.

3. A kezdeti hézagot abból a feltételből határozzuk meg, hogy az alakváltozás után kialakuló rés legyen zérus:  $d = u_n^{(2)} - u_n^{(1)} + g = 0$ . Ebből a szakadás mértéke  $[u_n] = u_n^{(1)} - u_n^{(2)}$ . Megkeresve annak legkisebb értékét  $\min[u_n] = \min(u_n^{(1)} - u_n^{(2)})$ , a hézagot oly módon állítjuk be, hogy az a minimális helyen legyen zérus:  $g^0 = [u_n] - \min[u_n]$ . Az 1-es test alakját meghatározó függvény első közelítésben  $g^{(1,0)} = g^0 - g^{(2)}$ . Itt feltételezzük, hogy a kopásból következő  $g^{(2)} \geq 0$  hézag meghatározható. A  $g^{(1,0)}$  minimumát megkeresve  $g^{(1,0)}_{\min} = \min g^{(1,0)}$ , beállítható olyan alak, aminél az érintkezési tartomány egy pontjában, nevezetesen a  $g^{(1,0)}_{\min}$  pontban a hézag zérus lesz:  $g^{(1)} = g^{(1,0)} - g^{(1,0)}_{\min}$ . Ily módon a teljes hézag  $g = g^{(1)} + g^{(2)}$ , ahol  $g = g^0 - g^{(1,0)}_{\min}$ . Állandósult kopáshoz tartozó optimális nyomás csak akkor lesz azonos a kopási disszipációs teljesítmény minimumához tartozóval, ha fenn tud állni a  $g^{(1)} \geq 0$  egyenlőtlenség.
4. Ha a kopási folyamatban csak az egyik test, nevezetesen csak a 2-es test kopik, és ez előre kiszámolható, legyen ez  $g^{(2)}$ , akkor az optimális nyomáseloszlás csak akkor valósul meg, ha  $g^{(1)} = 0$ , azaz  $g = g^{(2)}$  fennáll. (Itt  $g$  az optimális megoldáshoz tartozó érintkezési feszültségnél meghatározott teljes hézag). Ez általában nem áll fenn. Ekkor, ha az állandósult kopás egyéb feltételei léteznek, akkor a kopás a peremértékfeladat megoldásából nyert, szingularitást is tartalmazó nyomásmegoszlás mellett fog végbemenni. Erre látunk példákat a [17] -ben.

## 4. Néhány példa

### 4.1 Első példa

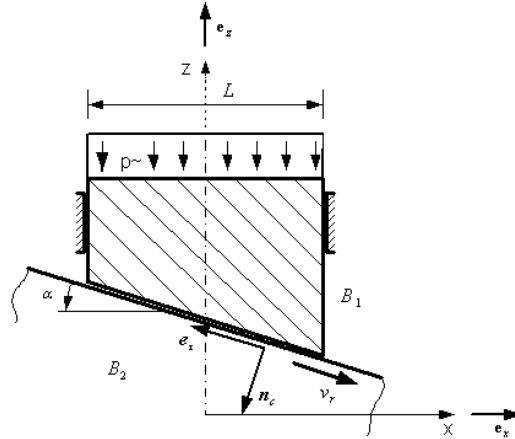
Vizsgáljuk a 2. ábrán ábrázolt szerkezetet. A felső ék alakú bélyeg, megvezetése által, merevtestszerűen csak függőlegesen tud elmozdulni. Az alsó test állandó  $v_r$  nagyságú sebességgel mozog.

A szerkezet  $t$  vastagságú, a terhelése  $p \sim$  megoszló nyomás, aminek eredője  $F_0 = p \sim L t$ . A testek közötti súrlódási tényező  $\mu$ . Az állandósult kopáshoz a

$$p_n = \frac{F_0}{\frac{L t}{\cos \alpha} (\cos \alpha \mp \mu \sin \alpha)}$$

nyomás megoszlás tartozik. A kopási sebesség vektor függőleges, aminek normál irányú összetevője  $\dot{w}_n = \dot{w}_R \cos \alpha$ . Az ábrán bejelölt sebesség irányánál a  $\mp$  jelben a felső - jelet, ellentétes irányú sebességnél az alsó + jelet kell használni!

Jól látható, hogy  $\alpha = 0$  esetén a nyomás  $p_n = p^{\sim}$ .



2. ábra. Ék alkotta rendszer.

#### 4.2 Második példa

Vizsgáljuk a 3a. ábrán vázolt pofás féket. A fékpofára ható külső nyomás okozta terhelés eredője  $F_0$ . A tárcsa állandó  $\omega$  szögsebességgel végez forgó mozgást. Ebben az esetben a merevtestszerű kopási sebesség  $\dot{\lambda}_F = -\dot{\lambda}_F e_z$  és a relatív csúszási sebesség  $v_r = R_0 \omega$ . Az

$I^{\mp}_{D_w^{(q=1)}} = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\cos \alpha \mp \mu \sin \alpha) (\cos \alpha)^{\frac{1}{b}} R_0 t d\alpha$  integrál bevezetésével ( $\mp$ : felső jel – az óramutató járásával egyező forgásnak, az alsó jel + az óramutató járásával ellentétes forgásnak felel meg), a nyomás  $p_n = \frac{F_0}{I^{\mp}_{D_w^{(q=1)}}} (\cos \alpha)^{\frac{1}{b}}$  alakban számolható. Az érintkezési normális

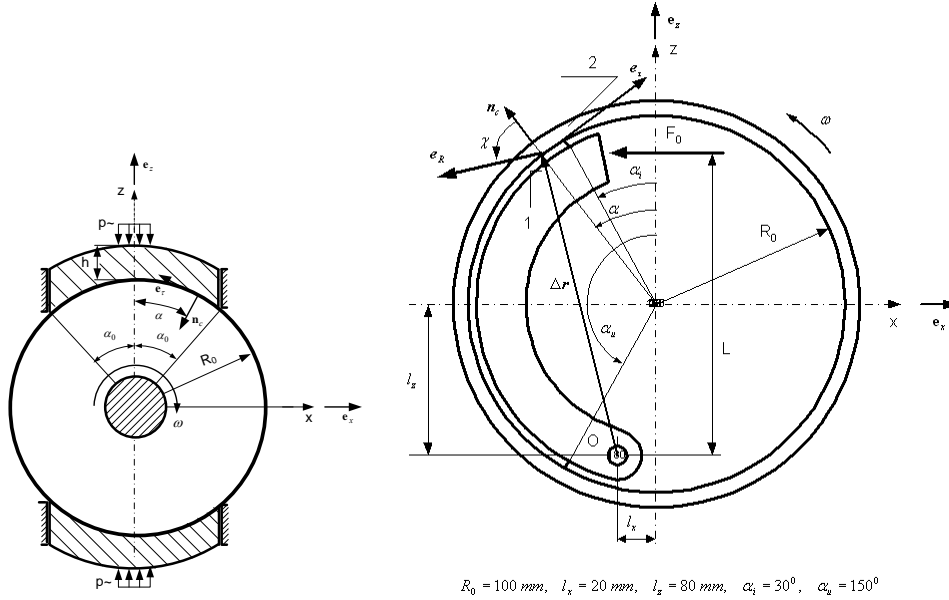
irányába eső kopási sebesség  $\dot{w}_n = (\tilde{\beta}_1 (R_0 \omega)^{a_1} + \tilde{\beta}_2 (R_0 \omega)^{a_2}) \left( \frac{F_0}{I^{\mp}_{D_w^{(q=1)}}} \right)^b \cos \alpha \neq const$  nem

állandó, de, mivel áll a  $\dot{w}_R = \dot{w}_n / \cos \alpha$  kapcsolat, a függőleges kopási sebesség már állandó lesz

$$\dot{w}_R = (\tilde{\beta}_1 (R_0 \omega)^{a_1} + \tilde{\beta}_2 (R_0 \omega)^{a_2}) \left( \frac{F_0}{I^{\mp}_{D_w^{(q=1)}}} \right)^b = const$$

Az is fennáll, hogy  $\dot{\lambda}_F = \dot{w}_R$ , ami bizonyítja, hogy az állandósult kopás valóban létezik, hisz a teljes függőleges kopási sebesség megegyezik a fékpofa merevtestszerű kopási sebességével. Pofásfék további vizsgálata a pofák különböző megtámasztásainál a [16] munkában található meg.





3. ábra Fékek, a) pofásfék, b) dobfék

### 4.3 Harmadik példa

Vizsgáljuk a 3b. ábrán vázolt dobfék síkbeli modelljét. Az 1-es jelű fékpofa az O csap körül tud elfordulni az  $F_0$  erő hatására. A kopási vektor  $e_R$  irányú. A dob  $\omega$  szögsebességgel óramutató járásával ellentétes irányban végez forgómozgást. Legyenek a kopási paraméterek  $a=b=1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ , a súrlódási tényező  $\mu = 0.25$ , a szögsebesség  $\omega = 2.5 \text{ 1/sec}$ , továbbá a geometriát az alábbi adatok jellemzik:  $R_0 = 100 \text{ mm}, l_x = 20 \text{ mm}, l_z = 80 \text{ mm}$   $t=10 \text{ mm}$ , míg a terhelés  $F_0 = 10 \text{ kN}$ . Az alábbi mennyiségek bevezetésével

$$m^\mp(\alpha) = [(l_z \sin \alpha + l_x \cos \alpha) \mp \mu(l_z \cos \alpha - l_x \sin \alpha + R_0)],$$

$$I_{D_w}^{\pm(q)} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left( m^\mp(\alpha) (1 \mp \mu t g \chi)^q \right)^{1/c} m^\mp(\alpha) R_0 t d\alpha, \quad A(\alpha) = \sqrt{(l_x - R_0 \sin \alpha)^2 + (l_z + R_0 \cos \alpha)^2}$$

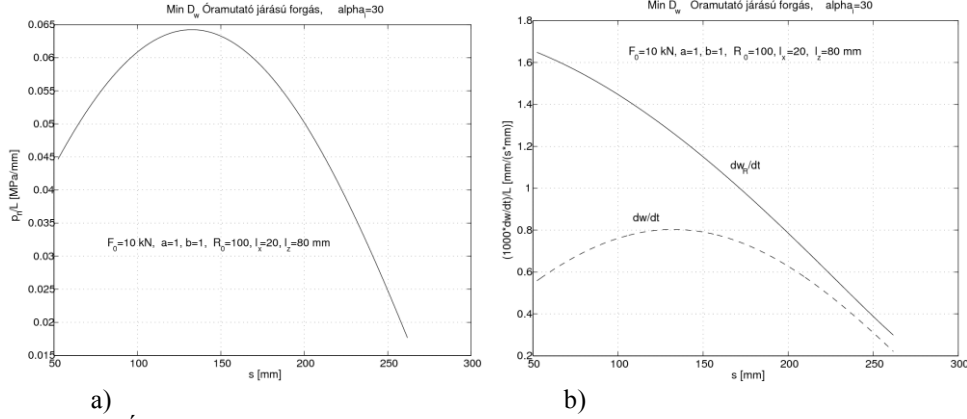
a nyomás állandósult kopásnál  $p_n = \frac{F_0 L}{I_{D_w}^{\mp(q=1)}} (A(\alpha) \cos \chi)^{1/b} = \frac{F_0 L}{I_{D_w}^{\mp(q=1)}} (l_x \cos \alpha + l_z \sin \alpha)^{1/b}$ ,

ahol  $\cos \chi = \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{e}_R = (l_x \cos \alpha + l_z \sin \alpha) \frac{1}{A(\alpha)}$ . Az észlelt kopási sebességek, úgyszintén

állandósult kopásnál  $\dot{w}_R = \frac{\dot{w}_n}{\cos \chi}$ ,  $\dot{w}_R = \sum_{i=1}^2 \tilde{\beta}_i \left( \frac{F_0 L}{I_{D_w}^{\mp(q=1)}} \right)^b (R_0 \omega)^{q_i} A(\alpha)$ ,  $\dot{w}_R = \dot{\lambda}_M A(\alpha)$ .

Ellentétes forgásiránynál a  $\mp$  jel alsó tagját kell figyelembe venni.

Konkrét számításokat elvégezve, óramutató irányú forgómozgásnál a nyomás és a kopási sebességeket a 4. ábra tünteti fel. Itt  $s = R_0 \alpha$  ívhossznak felel meg.



4. ábra Állandósult kopási állapotban, a) a nyomás lefutása, b) a kopási sebességek

#### 4.4 Negyedik példa: Forgástestek vizsgálata állandósult kopáskor

Ebben a példában tetszőleges meridiánnal rendelkező forgástesteket vizsgálunk, feltételezve, hogy a felső- test (bélyeg) forgómozgást végez egy lerögzített, úgyszintén forgástest felett. Két, a kopadék mozgásával kapcsolatos általánosított súrlódási modell került kidolgozásra [17], ezek birtokában adjuk meg az érintkezési nyomás kiszámítására vonatkozó összefüggést. A  $B_1$  felső test a  $-z$  tengely irányú  $\omega$  szögsebességgel végez forgó mozgást, a  $B_2$  test forgásában megakadályozott. Az érintkezési felület meridiánja  $f_{merid} = f_{merid}(r)$  egyenlettel jellemzett. A testek közötti relatív csúszási sebesség  $\|\dot{\mathbf{u}}_r^{(2)} - \dot{\mathbf{u}}_r^{(1)}\| = v_r = r\omega$ , ennek iránya  $\mathbf{e}_y$ . Az érintkezési normális  $\mathbf{n}_c = -(\sin \alpha \mathbf{e}_r + \cos \alpha \mathbf{e}_z)$ , míg az érintősíkba eső egységvektorok  $\mathbf{e}_{r1} = -\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_{r2} = -\cos \alpha \mathbf{e}_r + \sin \alpha \mathbf{e}_z$ . Itt  $\chi = \alpha$  az  $\mathbf{n}_c$  normálisnak a  $z$  forgástengellyel bezárt szöge. A felső test a kopás miatt függőlegesen  $\mathbf{e}_R = -\mathbf{e}_z$  irányban tolódik el, vagyis a merevtestszerű kopási vektor  $\dot{\lambda}_F = -\dot{\lambda}_F \mathbf{e}_z$ . Az  $\mathbf{e}_R, \mathbf{n}_c$  vektorok az  $r, z$  síkba esnek, továbbá  $\chi_1 = \pi/2$ ,  $\chi = \alpha$ . Az érintkezési nyomásra

a következő kifejezést kapjuk  $p_n = \frac{F_0}{I_{D_w}^{(q=1)|D^r}} (\cos \alpha)^{\frac{1}{b}} r^{-\frac{a}{b}}$ , ahol  $I_{D_w}^{(q=1)|D^r}$  az általánosított

súrlódási modelltől függő integrálok [17]:

$$\tilde{I}_{D_w}^{(q=1)|D^r} = \omega^{-a/b} 2\pi \int_{r_i}^{r_e} r^{1-a/b} (\cos \alpha - \mu_d \sin \alpha) (\cos \alpha)^{1/b} \sqrt{1 + f_{merid}^{\prime 2}} dr = \omega^{-a/b} I_{D_w}^{(q=1)|D^r}$$

$$\tilde{I}_{D_w}^{(q=1)|W^s} = \omega^{-a/b} 2\pi \int_{r_i}^{r_e} r^{1-a/b} (\cos \alpha + \mu_d \sin \alpha \operatorname{sign} \alpha) (\cos \alpha)^{1/b} \sqrt{1 + f_{\text{merid}}'^2} dr = \omega^{-a/b} I_{D_w}^{(q=1)|W^s}$$

A vertikális, a merevtestszerű mozgás irányába eső kopási sebesség állandó:

$$\dot{w}_R = \dot{w}_n / \cos \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ \sum_{i=1}^2 \tilde{\beta}_i P_n^b(r \omega)^a \right\} = \sum_{i=1}^2 \tilde{\beta}_i \left( \frac{F_0}{I_{D_w}^{(q=1)|W^s}} \right)^b \omega^a = \text{const}$$

ami az állandósult kopási állapot létrejöttét igazolja.

Korábbi munkáinkban, [12]-ben síkfelületű talpcsapágy számítása nyitotta meg az állandósult kopások vizsgálatát, az állandósult kopás állapotának energetikai minimum elven keresztüli megfogalmazását, [17]-ben tórusz alakú forgástestek, [18]-ben kúpos fékek elemzését találjuk meg súrlódási hőfejlődés figyelembevételével.

## 5. Kopások periodikus mozgásnál

A gépalkatrészek mozgásának egyik gyakori este, amikor is azok egymáshoz képest periodikus mozgáson keresztül kerülnek érintkezési kapcsolatba. A periodikus mozgásra jellemző, hogy az elmozdulásra, a feszültségi és alakváltozási állapotra áll

$$u_\tau(t) = u_\tau(t + T_*), \quad \sigma(t) = \sigma(t + T_*), \quad \varepsilon(t) = \varepsilon(t + T_*) \quad (11)$$

periódusonként megismétlődő jelleg, ahol  $T_*$  a mozgás periódusának ideje. Az alsó  $B_2$  jelű test  $s = 2u_0$  nagyságú kitérést végez jobb és bal irányban. Az egy periódus alatti kopás növekménye az kompatibilis a bélyeg merevtestszerű elmozdulásával

$$w(x, t + T_*) - w(x, t) = \Delta w(x, T_*) = \Delta w^+(x, T_*) + \Delta w^-(x, T_*) = (\Delta \lambda_F + \Delta \lambda_M \times \Delta \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_z \quad (12)$$

ahol  $\Delta \lambda_F = \Delta \lambda_F^+ + \Delta \lambda_F^-$  and  $\Delta \lambda_M = \Delta \lambda_M^+ + \Delta \lambda_M^-$  az egy periódushoz tartozó eltolódási és forgási növekmény,  $\Delta \lambda_F^\pm, \Delta \lambda_M^\pm$  a merevtestszerű kopási vektorok a  $\pm$  irányú félciklus alatt.

Legyen a relatív elmozdulás  $\mathbf{u}_\tau = u_\tau^{(2)} - u_\tau^{(1)} = -u_0 \cos \omega \tau \mathbf{e}_x = u_0 \cos \omega \tau \mathbf{e}_{\tau 1}$ , amiből a relatív sebesség  $\tilde{v}_r = u_0 \omega \sin \omega \tau$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_\tau = -\tilde{v}_r \mathbf{e}_{\tau 1}$ . Másrészt a sebesség abszolút értéke

$$v_r = |\dot{\mathbf{u}}_\tau| = |\tilde{v}_r| = |\omega u_0 \sin \omega \tau| = |v_0 \sin \omega \tau|, \quad \text{továbbá } T_* = \frac{2\pi}{\omega}, \quad v_0 = \omega u_0 \quad \text{ill. a félperiódus}$$

$$\text{alatti időintegrál } \int_0^{T_*/2} v_r d\tau = \int_{T_*/2}^{T_*} v_r d\tau = 2u_0.$$

A kopási disszipációs munka egy periódus alatt az alábbiak szerint számolható

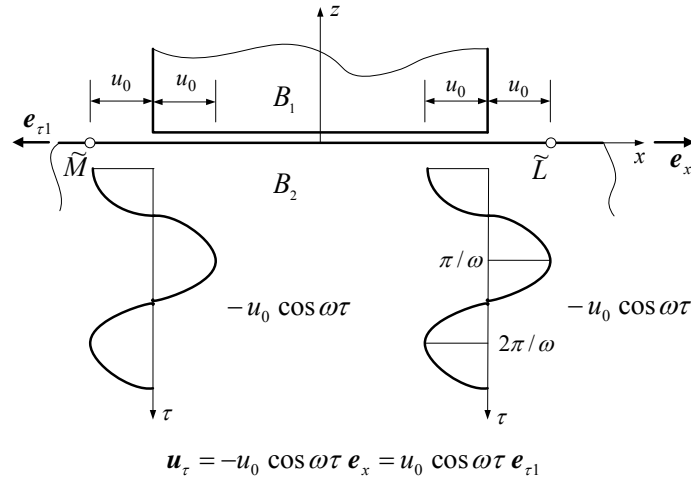
$$E_w = \sum_{i=1}^2 \int_0^{T_*/2} \left( \int_{S_c^{(i)}} (\mathbf{t}_i^{c+} \cdot \dot{\mathbf{w}}_i^+) dS \right) d\tau + \sum_{i=1}^2 \int_{T_*/2}^{T_*} \left( \int_{S_c^{(i)}} (\mathbf{t}_i^{c-} \cdot \dot{\mathbf{w}}_i^-) dS \right) d\tau \quad (13)$$

ahol  $\mathbf{t}_i^{c+}$ ,  $\mathbf{t}_i^{c-}$  az érintkezési feszültség vektora és  $\dot{\mathbf{w}}_i^+$ ,  $\dot{\mathbf{w}}_i^-$  az  $i$ -dik test kopási sebesség vektora a pozitív és a negatív irányú félperiódus alatti mozgásnál.

Feltételezve, hogy csak a bélyeg kopik, továbbá  $a_1=b_1=1$ , az (5) alatti  $\boldsymbol{\rho}_c^\pm = -\mathbf{e}_z \pm \mu \mathbf{e}_x$ , a

$$(13) \text{ helyett } E_w = \sum_{i=1}^1 \int_{T_*/2}^{T_*} \left( \int_{S_c^{(1)}} p_n^+ \dot{w}_{1,n}^+ dS \right) d\tau + \sum_{i=1}^1 \int_{T_*/2}^{T_*} \left( \int_{S_c^{(1)}} p_n^- \dot{w}_{1,n}^- dS \right) d\tau \text{ írható, ami}$$

$$\frac{E_w}{2u_0 \tilde{\beta}_1} = \int_{S_c^{(1)}} \{ (p_n^+)^2 + (p_n^-)^2 \} dS = \frac{E_w^+}{2u_0 \tilde{\beta}_1} + \frac{E_w^-}{2u_0 \tilde{\beta}_1} \quad (14)$$



**5. ábra.** Kopás keletkezik a bélyeg és a az alsó test között a közöttük fennálló

$\tilde{\mathbf{v}}_r = u_0 \omega \sin \omega \tau$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_\tau = -\tilde{\mathbf{v}}_r \mathbf{e}_{\tau 1}$  relatív sebesség miatt. Az alsó  $B_2$  jelű test  $\tilde{M}$   $\tilde{L}$  pontok közötti szakasza vesz rész a kopási folyamatban.

egyszerűbb alakhoz vezet. Állandósult kopási állapotnál az  $E_w$  minimummal rendelkezik. Az egy periódus alatti kopási növekmény (félperiódusonként a nyomás állandóságát feltételezve)

$$\Delta w_{1,n} = \tilde{\beta}_1 [p_n^+ + p_n^-] (u_0 \omega) \int_0^{T_*/2} |\sin \omega \tau| d\tau \quad (15)$$

ami az időintegrálás elvégzése után

$$\Delta w_{1,n} = \tilde{\beta}_1 [p_n^+ + p_n^-] 2u_0 \quad (16)$$

vagyis egy periódus alatti átlagos kopási sebesség

$$\bar{w}_{1,n} = \frac{\Delta w_{1,n}}{T_*} = \frac{\tilde{\beta}_1 [p_n^+ + p_n^-]}{T_*} 2u_0 \quad (17)$$

csak akkor lesz állandó az érintkezési tartomány minden pontjában, ha a nyomások összege az egész tartomány felett azonos

$$p_n^+ + p_n^- = 2p_m = const \quad (18)$$

Itt  $p_m$  a bélyeg közepén lévő érintkezési pontjában fellépő nyomás.

A kopási folyamat időintegrálásakor az egy félperiódus alatti kopási növekményt az alábbiak szerint számoljuk

$$\Delta w_{1,n}^{(j)} = \int_0^{T_*/2} \tilde{\beta}_1 p_n^{(j)}(\tau) u_0 \omega |\sin \omega \tau| d\tau \cong \tilde{\beta}_1 p_n^{(j)}(t_p + T_*/2) \int_0^{T_*/2} u_0 \omega |\sin \omega \tau| d\tau \quad (19)$$

ahol  $t_p$  jelöli a félperiódus kezdeti idejét, továbbá, a nyomást az aktuális félperiódus végéhez fogjuk kötni (az un. implicit időintegrálást hajtunk végre):  $p_n^{(j)} = p_n^{(j)}(t_p + T_*/2)$ . Mivel ez előzetesen nem ismert, iterációt kell végrehajtani. Az iteráció kezdeti nyomásának az egy periódussal korábbi nyomást tekintjük. Ezek valójában igen közel vannak egymáshoz. Az összegzett kopás a  $j$ -dik iterációs lépésben

$$w_{1,n}^{(j)}(t_p + T_*/2) = w_{1,n}(t_p) + \Delta w_{1,n}^{(j)} = w_{1,n}(t_p) + \tilde{\beta}_1 p_n^{(j)} 2u_0 \quad (20)$$

ami más jelöléssel

$$w_{1,n}^{(j)}(t_p + T_*/2) = {}^{t_p+T_*/2} w_{1,n}^{(j)} = {}^{t_p} w_{1,n} + \Delta w_{1,n}^{(j)} \quad (21)$$

Az iterációt a hézagváltozásra kirótt korláttal állítjuk le [18]. Az iteráció végén  $j=J$ . Gyakorlati számításoknál, a kopási növekmény igen kicsiny értéke miatt, gyorsítási faktoral szokás dolgozni. Ennek értelmében a nyomás és a kopott alak újraszámítására  $k$  db félperiódus eltelte után kerül sor, vagyis

$${}^{t_p+kT_*/2} w_{1,n} = {}^{t_p} w_{1,n} + k\Delta w_{1,n}^{(J)} \quad (22)$$

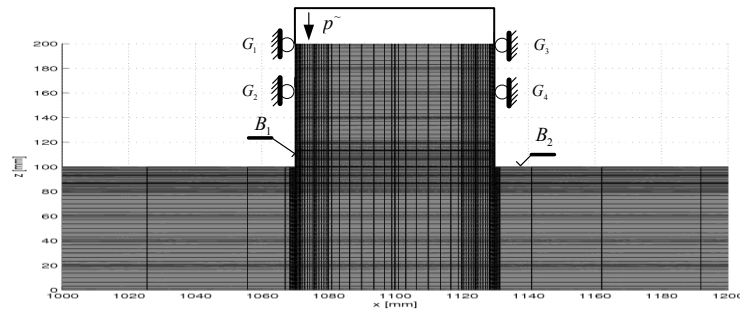
Megjegyzendő, hogy a súrlódási hőfejlődés esetén a gyorsítási faktorozással sajnos nem élhetünk. A [18] -as munka számos példát tartalmaz hőfejlődés nélküli esetben, míg [20] a hőfejlődéssel kapcsolatosan mutat be egy példát.

## 6. Állandósult állapot kezdetéhez tartozó ciklusszám előrejelzése

Joggal merül fel, annak a kérdése, hogyan lehetne viszonylag egyszerűen a periodikus kopásnál az állandósult állapot kezdetét megadó ciklusszámot meghatározni anélkül, hogy az időintegrálást elvégeznénk, de felhasználnánk a monoton mozgásra vonatkozó eredményeket.

Összegezzük a vázolt probléma megoldásához szükséges lépéseket

1. oldjuk meg a monoton mozgásra (jobb és balirányú relatív sebességnél) a kopási feladatot, aminek révén megkapjuk a nyomást és a kopott bélyeg alakját (2 futás), majd kiszámoljuk a két kopott alak átlagát (a 8b. ábrán a +- jelű görbét).
2. megoldjuk az érintkezési feladatot a nyomás linearizálásával: a 8a. ábrán a nyomás maximális értéke  $2 p_m$  (az alsó test balirányú mozgásánál ( $p_n(x=1070)=0, p_n(x=1130)=2 p_m$ ), jobbirányú mozgásánál: ( $p_n(x=1070)=2 p_m, p_n(x=1130)=0$ )), majd kiszámoljuk a --\*- jelű alakot.
3. a +- és --\*- jelű görbék átlaga szolgáltatja a -o- alakot, amit a periodikus mozgáshoz tartozó kopott alak közelítésének fogjuk tekinteni (lásd 8b. ábra). A bélyeg szélein lévő  $M$  pontbeli értéket használjuk majd fel a későbbiekben.
4. szükséges néhány lépést elvégezni a periodikus kopás időintegrálási algoritmusával a bélyeg  $M$  jelű pontjában fellépő, a kopás kezdeti stádiumában lévő  $p_{n,M}^{(0)}$  nyomás meghatározására.



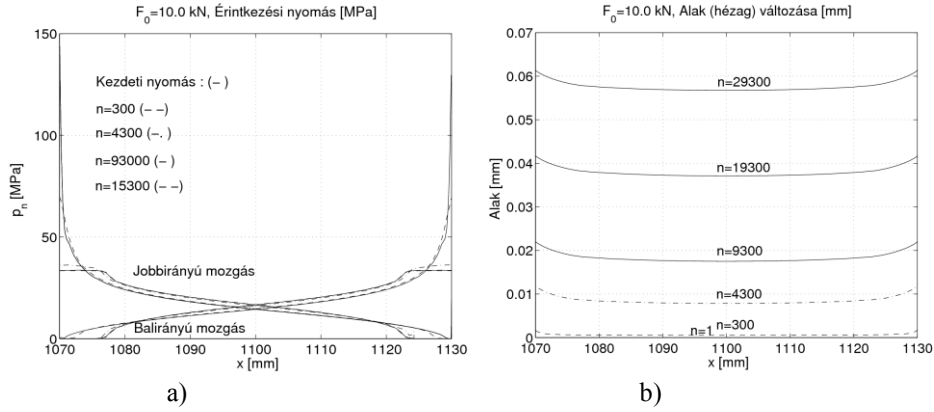
6. ábra. A bélyeg és az alsó test közötti periodikus mozgás okozta kopás számításához kapcsolott szerkezet. Az  $M$  pont a bélyeg baloldali peremén van:  $x=1070, z=100$ ,  $N$  pont a bélyeg közepén:  $x=1100, z=100$

Legyenek a következő adatok: Kopási paraméterek:  $\tilde{\beta}_1 = 1.25\pi \cdot 10^{-8}$ ,  $\tilde{\beta}_2 = 0$ ,  $a_1 = 1, b_1 = 1$ , súrlódási tényező  $\mu = 0.25$ . Az alsó test elmozdulása:  $u = -u_0 \cos \omega \tau$ , ahol  $u_0 = 1.5 \text{ mm}$ ,

$\omega = 10 \text{ rad/s}$ ,  $\tau$  idő. A terhelés  $\tilde{p} = 16.666 \text{ MPa}$ , az eredő erő  $F_0 = 10 \text{ kN}$ . A testek vastagsága  $t = 10 \text{ mm}$ .

A nyomás és a kopott alak változását a 7. ábra tartalmazza. Állandósult állapotban a kopott alak, mint merev görbe tolódik felfelé, hisz periódusonként azonos a lekopott anyag mennyisége. A linearizált nyomás, és a közelített alakok a 8. ábrákon láthatók.

Az egy ciklus alatt keletkező kopási disszipációs energia változását tartalmazza a 9a. ábra. A folytonos vonal a balra, a szaggatott a jobbra történő alsó test mozgásához tartozik. A disszipációs energia igen gyorsan csökken és tart a minimális értékéhez. A 7a. ábra tanulsága szerint  $n \geq 15300$  félciklusszám után a nyomás nem változik a kopás folyamán, azaz a periodikus kopás állandósult állapotba került.



7. ábra. Periodikus mozgásnál a) a nyomás, b) a bélyeg alakjának változása az  $n$  félciklusszám függvényében

Ha a nyomás egy tetszőleges  $x$  pontban az  $n_{period}$  periódus szám függvényeként ismert, akkor a kopások által kialakult alak a következő összegzéssel számolható

$$Alak(x, n_s) = \sum_{n_{period}=1}^{n_s} \Delta w_{1,n}(x, n_{period}) = \tilde{\beta}_1 \sum_{n_{period}=1}^{n_s} [p_n^+(x, n_{period}) + p_n^-(x, n_{period})] 2u_0 \quad (23)$$

Tételezzük fel, hogy az  $M$  pontban a nyomás  $n_{period}$  függvényeként ismert. Ezt tünteti fel a 9b. ábra -\* jelű görbén keresztül. Ezt a függvényt két paraméter jellemzi, egyik a kezdeti időpontbeli ( $p_{n,M}^{(0)}$ ) másik az állandósult kopásnál kialakuló érték ( $2p_m$ ). Szeretnénk ezt a függvényt oly módon approximálni, hogy az alatta lévő terület közel azonos legyen az eredeti értékkel. A polinommal közelített nyomás az  $M$  pontban

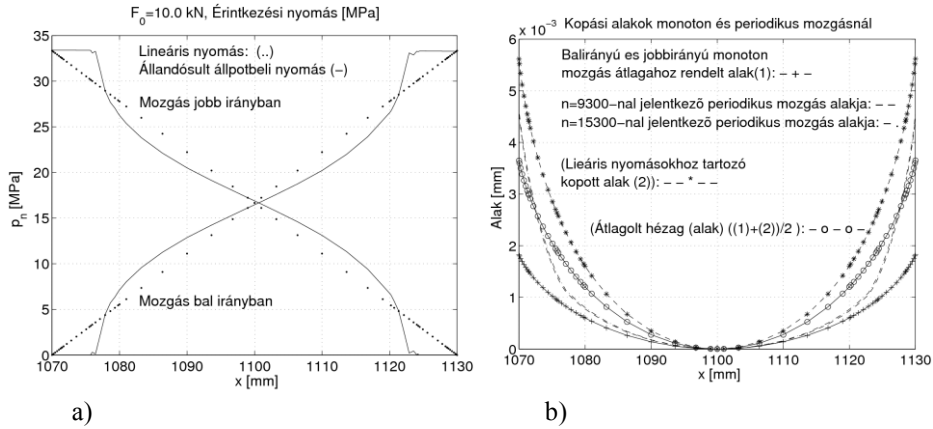
$$\hat{p}_n = (p_{n,M}^{(0)} - 2p_m) \left( \frac{n_s - n_{period}}{n_s} \right)^q + 2p_m \quad (24)$$

alakú. A nyomás integrálja

$$I_{pol} = \int_{n_{period}=0}^{n_s} (\hat{p}_n - 2p_m) dn_{period} \quad (25)$$

mivel a kopást a kezdeti  $p_{n,M}^{(0)}$  nyomás és a végső  $2p_m$  nyomás közötti változás okozza. Itt feltételezzük, amit a számítások is a jelen szerkezetnél igazoltak, hogy a kopás folytonosan létrejön (minden ciklusban a sáv jobbra mozgásánál). Egyszerű számítással az integrál

$$I_{pol} = \frac{(p_{n,M}^{(0)} - 2p_m)}{(1+q)} n_s \quad (26)$$



8. ábra. A periodikus mozgásnál kapott állandósult állapothoz tartozó, a) nyomás közelítése lineáris függvényekkel, b) a kopott alak (periodikus mozgásnál (-, -, -), a monoton mozgásnál -\*-, ill. az átlag (o-o) = ((-\*) + (-+-))/2)

Bevezetve az  $Y = 4\tilde{\beta}_1 u_0$  jelölést, a (23) összegzés helyett a (26) alatti integrállal az  $M$  pontbeli kopott alak magassága

$$g_{MN}^{pol}(n_s) = alak(x=1070, n_s) - alak(x=1100, n_s) = 0.5Y I_{pol} \quad (27)$$

Mivel a bélyeg közepén az  $N$  pontban a kopás mindkét irányú mozgásnál létrejön, ellentétben a szélső  $M$  pontbeli esettel összehasonlítva,

$$alak(x=1100, n_s) = g_N^{pol}(n_s) = Y n_s p_m \quad (28)$$

**Példa:** a 6. ábrabeli szerkezetnél

$$p_{n,M}^{(0)} = 148.41 \text{ MPa} \quad p_m = 16.6666 \text{ MPa}, \quad q = 23, \quad g(o-o) = 3.8 \mu\text{m}.$$

(Előzetes számításokkal tisztáztuk  $q$  különböző felvételével, hogy milyen értéknél lesz a

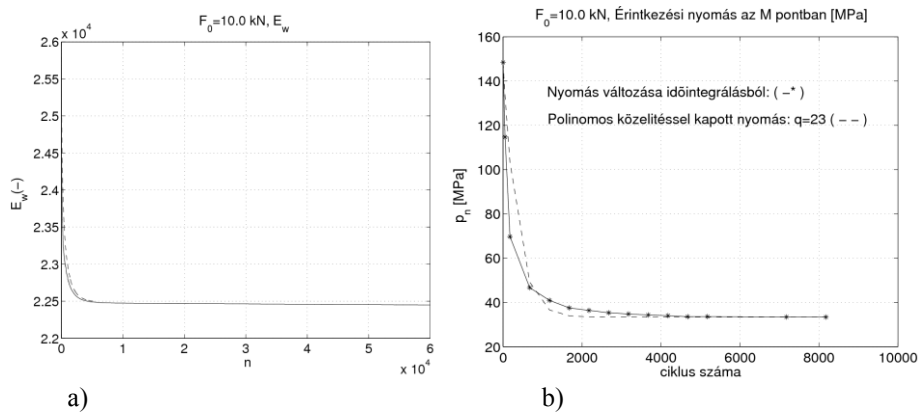


legkisebb eltérés az eredeti görbe alatti terület és az approximált alatti terület között. Ez  $q=23$  nál teljesült).

(27) -ből  $g_{MN}^{pol}(n_s) = g(o-o) = 0.5Y I_{pol}$ , így a terület  $I_{pol} = 32271$ . Ezt felhasználva, az

$$\text{előre jelzett ciklusszám a (26)-ból } n_s = I_{pol} / \frac{(p_{n,M}^{(0)} - 2p_m)}{(1+q)} = 6730 .$$

A fenti 7. és 8. ábrákon látjuk, hogy  $n = 9300$  fél periódusnál már elkezdődik az állandósult állapot, azaz  $n_{period} = 4650$ , míg  $n = 15300$ -nál,  $n_{period} = 7650$  már javában tart. Ily módon az előrejelzett 6730 érték igen jól megbecsüli a numerikus integrálással kapottakat, a hiba kevesebb, mint 10%:  $100[(7650+4650)/2-6730]/6730 \% \sim 9\%$ .



9. ábra. A periodikusmozgásnál a) az  $\frac{E_w^\pm}{2u_0 \tilde{\beta}_1} = \int_{S_c} (p_n^\pm)^2 dS$  munka, b) az  $M$  pontbeli nyomás változása a periódus (ciklusszám) függvényeként

## 8. Összefoglalás

Cikk a testek közötti kopás numerikus modellezésével foglalkozik, megadva a testek közötti relatív mozgásfajtákat is. A 2. esethez tartozóan a kopási disszipációs teljesítmény minimalizálásával összefüggést közöl az állandósult kopásnál jelentkező érintkezési nyomásra, anélkül, hogy a kopási törvény időintegrálását elvégeztük volna. A cikk számos példán keresztül jól érzékelteti az elv alkalmazásának lehetőségét. A tanulmány második felében a periodikus mozgásnál jelentkező feladat megoldását taglalja, megadva a kopási növekmény numerikus kiszámítási összefüggéseit, továbbá közli az állandósult kopás eléréséhez szükséges ciklusszám értékét egyszerű, a monoton mozgásoknál kapott eredmények felhasználása révén levezetett analitikus összefüggésen keresztül.

## 9. Köszönetnyilvánítás

A tanulmány/kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/-2010-0001, TÁMOP-4.2.2.B-10/1-2010-0008 jelű projektek részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az

Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg. Köszönet illeti az OTKA K67825 és a Lengyel Oktatási és Tudományi Minisztérium No.3 T08C 02129 sz. pályázatának támogatását is.

## 10. Irodalom

- [1] Archard, J.F.: *Contact and rubbing of flat surfaces*, Journal of Applied Physics, 1953, 24, 981-988.
- [2] Haslinger, J., Neittaanmaki, P.: *Finite element approximation for optimal shape design*, John Wiley & Sons Ltd., London, 1988.
- [3] Hilding, D., Klarbring, A., Petterson, J.: *Optimization of structures in unilateral contact*, Appl. Mech. Rev., 1999, 52, 139-160.
- [4] Páczelt, I.: *Iterative methods for solution of contact optimization problems*, Arch. Mech., 2000, 52, 685-711.
- [5] Páczelt, I., Baksa, A.: *Examination of contact optimization and wearing problems*, Journal of Computational and Applied Mechanics, 2002, 3, 61-84.
- [6] Goryacheva, I.G., Dobuchin, M.H.: *Contact problems in tribology*, (orosz nyelven), Mashinostroenie, Moscow, 1988.
- [7] Soldatenkov, I.A.: *Iznosokontaktная zadacha*, Fizmatkniga, Moskva, 2010.
- [8] Johnson, K.L.: *Contact Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K., 1985.
- [9] Kalker, J.J.: *A course of contact mechanics*, a79C, Delft University of Technology, 1985.
- [10] Laursen, T.A.: *Computational contact and impact mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [11] Wriggers, P.: *Computational contact mechanics*, John Wiley and Sons, New York, 2002.
- [12] Páczelt, I., Mróz, Z.: *On optimal contact shapes generated by wear*, Int. J. Num. Meth. Eng., 2005, 63, 1310-1347.
- [13] Páczelt, I., Mróz, Z.: *Optimal shapes of contact interfaces due to sliding wear in the steady relative motion*, Int. J. Solids and Structures 2007, 44, 895-925.
- [14] Páczelt, I., Mróz, Z.: *On the analysis of steady sliding wear process*, Tribology International 2009, 42, 275-283.
- [15] Páczelt, I., Mróz, Z.: *Variational approach to the analysis of steady state thermo-elastic wear regimes*, Int. J. Num. Meth. Eng. 2010, 81, 728-760.
- [16] Mróz, Z., Páczelt, I.: *Analysis of thermo-elastic wear problems*, J. Thermal Stresses 2011, 34-35, 569-606.
- [17] Páczelt, I., Mróz, Z.: *Numerical analysis of steady thermo-elastic wear regimes induced by translating and rotating punches*, Computers and Structures 2011, 89, 2495-2521.
- [18] Páczelt, I., Mróz, Z.: *Solution of wear problems for monotonic and periodic sliding with p-version of the finite element method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2012, 249-252, 75-103.
- [19] Páczelt, I., Kucharski, S., Mróz, Z.: *The experimental and numerical analysis of quasi-steady wear processes for a sliding spherical indenter*, Wear 2012, 274-275, 127-148.
- [20] Páczelt I.: *Kopás numerikus vizsgálata*, MŰSZAKI SZEMLE 2012, 58, 32-42.