

KÜLSŐ ÉS BELSŐ NYOMÁSSAL TERHELT ÜREGES KÚP RUGALMAS-KÉPLÉKENY EGYENSÚLYI ÁLLAPOTA

Ecsedi István¹, Baksa Attila²

¹: egyetemi tanár, ²: egyetemi docens,
Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros,

e-mail: istvan.ecsedi@uni-miskolc.hu, attila.baksa@uni-miskolc.hu

Összefoglalás

A tanulmány tárgyát ideálisan rugalmas-tökéletesen képlékeny anyagú üreges kúp alakú testben külső és belső nyomás hatására kialakult feszültségek meghatározása képezi. Alapvető feltevés, hogy rugalmas állapotban a kúp alakú test összenyomhatatlan, vagyis a Poisson-szám 0,5. A feladat megoldására egy analitikus módszert javasol a tanulmány, amely lehetővé teszi a feszültségek és a rugalmas, valamint a képlékeny teherbírások pontos meghatározását.

Kulcsszavak: rugalmas-képlékeny, üreges kúp, teherbírás, feszültségek

Abstract

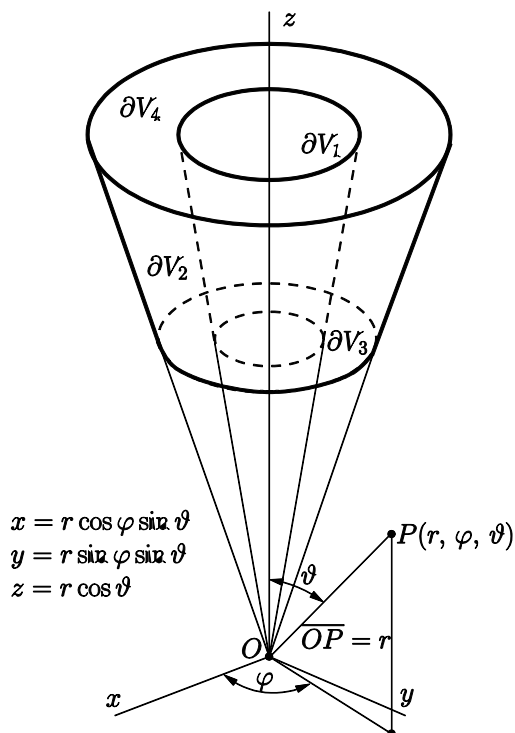
The object of this paper is to determine the stresses in hollow conical bodies caused by inner and outer pressures. It is assumed that in elastic state the material is incompressible, that is the Poisson's ratio is 0.5. An analytical method is suggested to solve the problem. By the application of the presented method one can compute the stresses and elastic and plastic limit loads.

Keywords: elastic-plastic deformation, hollow cone, limit load, stresses

1. Bevezetés

Az. 1. ábra szemlélteti a vizsgálat tárgyát képező üreges kúp alakú testet. Az üreges kúp alakú testet az O csúcspontú ∂V_1 és ∂V_2 körkúpfelületek, valamint az O középpontú ∂V_3 és ∂V_4 gömbfelületek határolják. A mechanikai feladat megoldására az $Or\varphi\vartheta$ gömbkoordinátarendszer használatát (1. ábra). A rugalmas, a rugalmas-képlékeny és a képlékeny egyensúlyi állapotok meghatározásánál feltételezzük, hogy

1. Az alakváltozások és elmozdulások kicsinyek.
2. Nincs térfogati terhelés.
3. A test anyaga homogén izotróp, ideálisan rugalmas-tökéletesen képlékeny.
4. Rugalmas állapotra a Poisson szám $\nu = 0,5$.



1. ábra. Üreges kúp alakú test.

Jelölje $e_r, e_\varphi, e_\vartheta$ az $Or\varphi\vartheta$ gömbi koordinátarendszer egységvektorait. A tanulmányozott egyensúlyi állapotokat az alábbi peremfeltételek határozzák meg:

$$u_r = 0, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{r\vartheta} = 0, \quad P \in \partial V_3 \cup \partial V_4, \quad (1)$$

$$\tau_{r\vartheta} = \tau_{\varphi\vartheta} = 0, \quad \sigma_\vartheta = -p_1, \quad P \in \partial V_1, \quad (2)$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi\vartheta} = 0, \quad \sigma_\varphi = -p_2, \quad P \in \partial V_2. \quad (3)$$

Az (1), (2) és (3) egyenletekben és a későbbiek során is $u_r, u_\varphi, u_\vartheta$ az elmozdulásvektor skalár koordinátáit, $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\vartheta, \tau_{r\varphi}, \tau_{r\vartheta}, \tau_{\varphi\vartheta}$ pedig a feszültségi tenzor skalárkoordinátáit jelöli az $Or\varphi\vartheta$ koordináta-rendszerben [1, 2, 3]. A mechanikai feladat megoldását az alábbi elmozdulásokból származtatjuk:

$$u_r = u_\varphi = 0, \quad u_\vartheta = rU(\vartheta). \quad (4)$$

A fenti elmozdulásoknak megfelelő alakváltozások [1, 2]

$$\varepsilon_r = \gamma_{r\varphi} = \gamma_{r\vartheta} = \gamma_{\varphi\vartheta} = 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{\partial U}{\partial \vartheta}, \quad \varepsilon_\varphi = U \operatorname{ctg} \vartheta. \quad (6)$$

2. Rugalmas állapot

A homogén, izotróp, lineárisan rugalmas összenyomhatatlan test anyagtörvénye alapján írható, hogy [4-7]

$$\sigma_r = 2G\varepsilon_r + \sigma_0, \quad \sigma_\varphi = 2G\varepsilon_\varphi + \sigma_0, \quad (7)$$

$$\sigma_g = 2G\varepsilon_g + \sigma_0, \quad \tau_{r\varphi} = G\gamma_{r\varphi}, \quad (8)$$

$$\tau_{r,g} = G\gamma_{r,g}, \quad \tau_{\varphi,g} = G\gamma_{\varphi,g}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_g = 0, \quad (10)$$

ahol G a csúsztató rugalmassági moduluszt jelöli.

A fenti egyenleteket a jelen problémára alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{\sigma_g + \sigma_0}{2}, \quad (11)$$

$$\sigma_g = 2G\varepsilon_g + \sigma_0, \quad (12)$$

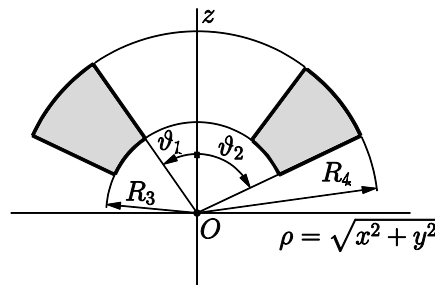
$$\sigma_\varphi = 2G\varepsilon_\varphi + \sigma_0, \quad (13)$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi = \frac{\partial U}{\partial g} + U \operatorname{ctg} g = 0. \quad (14)$$

A (14) egyenletből az következik, hogy

$$U(g) = U_1 \frac{\sin g_1}{\sin g}, \quad g_1 \leq g \leq g_2. \quad (15)$$

A g_1 és g_2 szögkoordináták jelentését a 2. ábra értelmezi.



2. ábra. Az üreges kúp alakú test meridián metszete.

A (15) egyenletben U_1 egy integrációs állandót jelöl. A (6), (12) és (13) egyenletekből kapjuk a (16) és (17) egyenleteket.

$$\sigma_g = -K \frac{\cos g}{\sin^2 g} + \sigma_0, \quad (16)$$

$$\sigma_\varphi = K \frac{\cos g}{\sin^2 g} + \sigma_0. \quad (17)$$

Itt bevezettük a

$$K = 2GU_1 \sin g_1 \quad (18)$$

jelölést.

A mechanikai egyensúly egyenletei zérus térfogati terhelés esetén az alábbi alakban adhatók meg [1-3]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + 2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_\vartheta + \tau_{r\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \right] = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \tau_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + 3\tau_{r\varphi} + 2\tau_{\varphi\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \right] = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \tau_{\vartheta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \tau_{\varphi\vartheta}}{\partial \varphi} + 3\tau_{r\vartheta} + (\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \vartheta \right] = 0. \quad (21)$$

Jelen feladatban a (19) és (20) egyensúlyi egyenletek identikusan teljesülnek, a (21) egyensúlyi egyenletből pedig az következik, hogy

$$\frac{d\sigma_\vartheta}{d\vartheta} + (\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \vartheta = 0. \quad (22)$$

Ez utóbbi differenciálegyenlet ad lehetőséget a $\sigma_0 = \sigma_0(\vartheta)$ közepes normál feszültség meghatározására. A (16), (17) és (22) egyenletekből azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\sigma_0}{d\vartheta} = -\frac{K}{\sin \vartheta}. \quad (23)$$

A (23) egyenlet integrálása a

$$\sigma_0(\vartheta) = -K \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| + C \quad (24)$$

eredményre vezet, ahol C egy integrációs állandót jelöl. A (16) és (17) egyenletekbe helyettesítve a (24) egyenletet jutunk a σ_ϑ és σ_φ normál feszültségek képleteire rugalmas egyensúlyi állapotot feltételezve

$$\sigma_\vartheta(\vartheta) = -K \left(\frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| \right) + C, \quad (25)$$

$$\sigma_\varphi(\vartheta) = K \left(\frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| \right) + C. \quad (26)$$

A (24), (25) és (26) képletekben szereplő K és C integrációs állandókat a (2) és (3) feszültségi peremfeltételek alapján határozzuk meg:

$$\sigma_\vartheta(\vartheta_1) = -K \left(\frac{\cos \vartheta_1}{\sin^2 \vartheta_1} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2} \right| \right) + C = -p_1, \quad (27)$$

$$\sigma_\vartheta(\vartheta_2) = -K \left(\frac{\cos \vartheta_2}{\sin^2 \vartheta_2} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2} \right| \right) + C = -p_2. \quad (28)$$

Egyszerű számolással azt nyerjük, hogy

$$K = \frac{p_1 - p_2}{H(\vartheta_2) - H(\vartheta_1)}, \quad (29)$$

$$C = \frac{p_2 H(\vartheta_1) - p_1 H(\vartheta_2)}{H(\vartheta_2) - H(\vartheta_1)} \quad (30)$$

ahol

$$H(\vartheta) = -\left(\frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| \right). \quad (31)$$

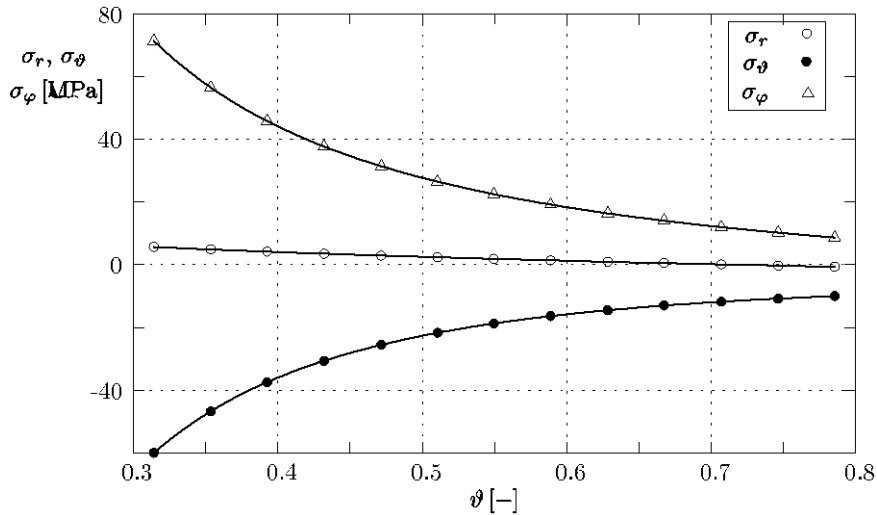
Megjegyzendő, hogy a feszültségállapot független az r sugár koordinátától, és $\sigma_r = \sigma_\vartheta$ reakció jellegű normál feszültség hasonló a sicalakváltozás σ_z normál feszültségéhez [2,3].

A következőkben feltesszük, hogy

$$p_1 \geq p_2. \quad (32)$$

A levezetett képletekhez tartozó feszültségeket a 3. ábrán szemléltetjük egy numerikus példa keretében. A numerikus példa kidolgozásához az alábbi adatokat használtuk:

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{10}, \quad \vartheta_2 = \frac{\pi}{4}, \quad p_1 = 60 \text{ MPa}, \quad p_2 = 10 \text{ MPa}.$$



3. ábra. Normál feszültségek görbéi rugalmas egyensúly esetén.

3. Rugalmas-képlékeny egyensúlyi állapot

Első lépésben a rugalmas teherbírás számításával foglalkozunk, feltéve, hogy $p_1 \geq p_2$. Ebben az esetben rugalmas állapotban

$$\sigma_\varphi \geq \sigma_0 \geq \sigma_\vartheta \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \quad (33)$$

feltétel teljesül. A Tresca-féle folyási feltétel szerint a képlékeny alakváltozási tartományban [8-10]

$$Y = \sigma_\varphi - \sigma_\vartheta = \sigma_y, \quad (34)$$

ahol σ_y az ideálisan rugalmas-képlékeny test egytengelyű húzó feszültség állapothoz tartozó folyáshatára [9, 10]. Magától értetődő, hogy jelen esetben a képlékeny alakváltozás a ∂V_1 körkúp felület pontjaiban jelenik meg először. A p_2 külső nyomást nem változtatva p_1 növelésével $Y(\vartheta_1)$ eléri a σ_y értéket. A (27)-(32) és (34) egyenletekből a p_E rugalmas teherbíráásra a

$$p_E = p_2 + \frac{\sigma_y \sin^2 \vartheta_1}{2 \cos \vartheta_1} (H(\vartheta_2) - H(\vartheta_1)) \quad (35)$$

eredményt tudjuk levezetni. A 2. fejezetben bemutatott számpélda esetében $\sigma_y = 200$ MPa folyási határral számolva a

$$p_E = 105,453 \text{ MPa}$$

értéket nyerjük. Jelen feladatban a kúp alakú test képlékeny állapotában az elmozdulások és alakváltozások vizsgálata nélkül is meghatározhatók a feszültségek. A képlékeny egyensúly e feladata statikailag határozott, a (22) egyensúlyi egyenlet és a (34) folyási feltétel alapján számíthatók a σ_ϑ és σ_φ feszültségek. Továbbá a Lèvy-Mises-féle anyag törvény értelmében, jelen feladatra vonatkoztatva írható, hogy [9, 10]

$$d\varepsilon_r = d\lambda(\sigma_r - \sigma_0), \quad d\varepsilon_\varphi = d\lambda(\sigma_\varphi - \sigma_0), \quad (36)$$

$$d\varepsilon_\vartheta = d\lambda(\sigma_\vartheta - \sigma_0), \quad d\gamma_{r\varphi} = 2d\lambda \tau_{r\varphi}, \quad (37)$$

$$d\gamma_{r\vartheta} = 2d\lambda \tau_{r\vartheta}, \quad d\gamma_{\vartheta\varphi} = 2d\lambda \tau_{\vartheta\varphi}. \quad (38)$$

A (4), (5) egyenletekből az következik, hogy

$$d\varepsilon_r = d\gamma_{r\vartheta} = d\gamma_{\vartheta\varphi} = d\gamma_{r\varphi} = 0, \quad (39)$$

vagyis

$$\sigma_r = \sigma_0 \quad (40)$$

képlékeny folyás esetén is igaz, mikor is $d\lambda > 0$ [7-10].

A (22), (34) egyenlet megoldásából tekintettel a (40) egyenletre, továbbá a σ_ϑ feszültségre vonatkozó peremfeltételre az alábbi eredményeket nyerjük:

$$\sigma_\vartheta(\vartheta) = \sigma_y \ln \left| \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_1} \right| - p_1, \quad (41)$$

$$\sigma_\varphi(\vartheta) = \sigma_y \left(\ln \left| \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_1} \right| + 1 \right) - p_1, \quad (42)$$

$$\sigma_r(\vartheta) = \sigma_y \left(\ln \left| \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_1} \right| + \frac{1}{2} \right) - p_1. \quad (43)$$

Teljesen képlékeny állapot esetében a fenti képletek a teljes testre vonatkoznak ($\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$). Amennyiben a képlékeny tartomány eléri a ∂V_2 kúp felületeit is akkor

$$\sigma_\vartheta(\vartheta_2) = \sigma_y \ln \left| \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} \right| - p_1 = -p_2. \quad (44)$$

Ez utóbbi egyenlet ad lehetőséget a képlékeny teherbírás ($p_1 = p_Y$) számítására:

$$p_Y = p_2 + \sigma_Y \ln \left| \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} \right|. \quad (45)$$

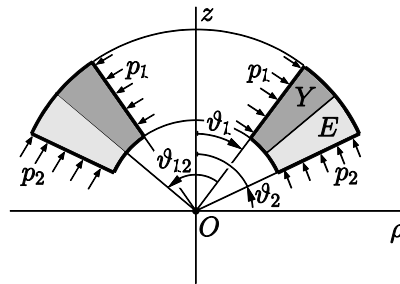
A 2. fejezetben használt példa adatait és $\sigma_Y = 200 \text{ MPa}$ használva azt kapjuk, hogy

$$p_Y = 175,557 \text{ MPa}. \quad (46)$$

Következőekben részletesen foglalkozunk a rugalmas-képlékeny egyensúly esetével, mikor is

$$p_E < p_1 < p_Y. \quad (47)$$

Ez esetben a test egy véges (kúpfelületek által határolt) tartománya a képlékeny folyás állapotában van, míg komplementer részén az alakváltozások rugalmasak (4. ábra). A rugalmas és képlékeny tartományok határát a ϑ_{12} szög koordináta jelöli ki, értéke a p_1 függvénye, feltéve, hogy a terhelési folyamat során p_2 állandó értékű. A képlékeny tartomány pontjait a $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_{12}$, míg a rugalmas tartomány pontjait a $\vartheta_{12} \leq \vartheta \leq \vartheta_2$ relációkkal tudjuk jellemezni.



4. ábra. A rugalmas és képlékeny tartományok szemléltetése.

A $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_{12}$ tartományban a normál feszültségek képleteit a (41)-(43) egyenletek adják meg. Nyilván a rugalmas tartomány pontjaiban ($\vartheta_{12} \leq \vartheta \leq \vartheta_2$) a feszültségek képleteit a (24), (25) és a (26) egyenletekből nyerjük az alkalmasan megválasztott $K = K^*$ és $C = C^*$ állandókkal:

$$\sigma_\vartheta(\vartheta) = -K^* \left(\frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| \right) + C^*, \quad (48)$$

$$\sigma_\varphi(\vartheta) = K^* \left(\frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| \right) + C^*, \quad (49)$$

$$\sigma_0(\vartheta) = -K^* \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| + C^*. \quad (50)$$

A (48), (49) egyenletekből számolt σ_ϑ és σ_φ a $\vartheta = \vartheta_{12}$ szögkoordinátánál kielégíti a (34) Tresca-féle folyási feltételt, vagyis

$$2K^* \frac{\cos \vartheta_{12}}{\sin^2 \vartheta_{12}} = \sigma_y, \quad (51)$$

továbbá a (48) képlet által adott σ_g normálfeszültség a $\vartheta = \vartheta_2$ helyen az előírt $-p_2$ értéket veszi fel, vagyis

$$C^* = -p_2 + K^* \left(\frac{\cos \vartheta_2}{\sin^2 \vartheta_2} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2} \right| \right). \quad (52)$$

A $\sigma_g = \sigma_g(\vartheta)$ normálfeszültség folytonos a $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$ intervallumon, ez utóbbiból az következik, hogy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\sigma_g(\vartheta_{12} + \varepsilon) - \sigma_g(\vartheta_{12} - \varepsilon)] = 0. \quad (53)$$

Az (53) egyenlet részletes kifejtése, tekintettel az (51) és (52) egyenletekre az alábbi alakra hozható:

$$\frac{1}{2} \left[\left(-\frac{\cos \vartheta_2}{\sin^2 \vartheta_2} - \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_2/2)}{\operatorname{tg}(\vartheta_{12}/2)} \right| \right) \frac{\sin^2 \vartheta_{12}}{\cos \vartheta_{12}} + 1 \right] + \ln \left| \frac{\sin \vartheta_{12}}{\sin \vartheta_1} \right| - \frac{p_1 - p_2}{G} = 0. \quad (54)$$

Az (54) egyenlet teszi lehetővé adott, $p_1 > p_2$ és σ_y , valamint ϑ_1 és ϑ_2 esetén a σ_{12} szögkoordináta meghatározását feltéve, hogy a (47) egyenlőtlenségi reláció fennáll.

Végezetül a teljes $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$ tartományra a felterhelésre vonatkozó normálfeszültségek képleteit az alábbi egyenletekkel tudjuk megadni:

$$\begin{aligned} \sigma_g(\vartheta) = [h(\vartheta) - h(\vartheta - \vartheta_{12})] & \left[\sigma_y \ln \left| \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_1} \right| - p_1 \right] + \\ & h(\vartheta - \vartheta_{12}) \left[-K^* \left(\frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| \right) + C^* \right], \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi(\vartheta) = [h(\vartheta) - h(\vartheta - \vartheta_{12})] & \left[\sigma_y \ln \left| \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_1} \right| - p_1 + \sigma_y \right] + \\ & h(\vartheta - \vartheta_{12}) \left[K^* \left(\frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| \right) + C^* \right], \end{aligned} \quad (56)$$

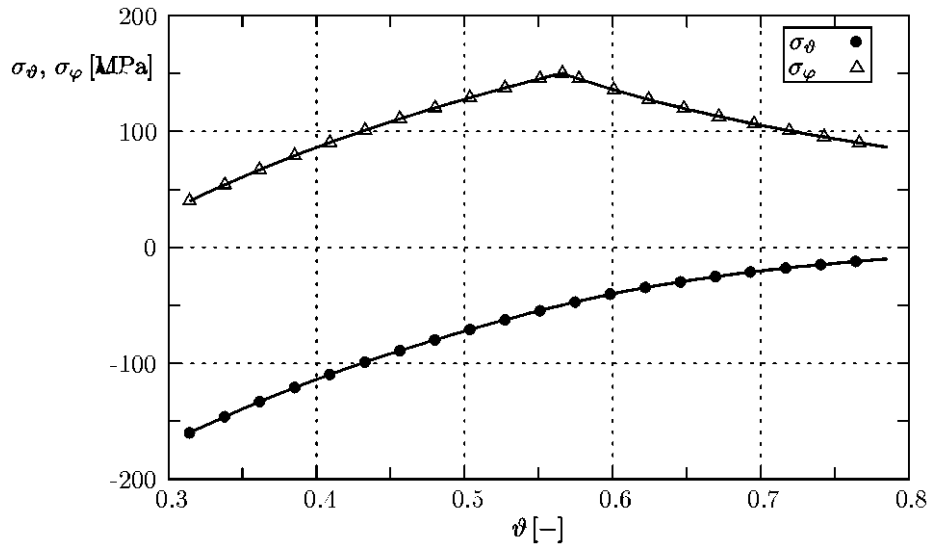
$$\sigma_0(\vartheta) = \frac{1}{2} [\sigma_g(\vartheta) + \sigma_\varphi(\vartheta)]. \quad (57)$$

Az (55), (56) egyenletekben $h = h(\vartheta)$ a Heviside-féle függvényt jelöli. A felterheléskor rugalmas-képlékeny alakváltozási állapotba került üreges kúpban maradó feszültségekkel kell számolnunk a terhelés levétele után. [8-10]. A maradó feszültségek meghatározásához az (55)-(57) képletek által adott feszültségekhez a (25) és (26) formuláknak megfelelő feszültségeket kell hozzáadni. E képletekben az alkalmazott nyomások előjeleit ellenkező értelműre kell változtatni. A leírt eljárás azzal indokolható, hogy a tehermentesítésre a lineáris rugalmasságtan törvényei érvényesek [8-10].

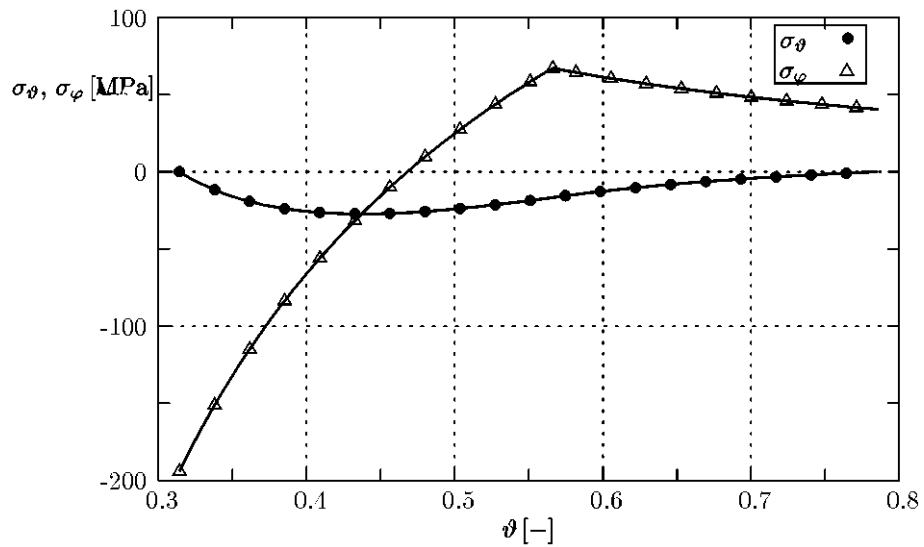
Végezetül egy számpéldán szemléltetjük a rugalmas-képlékeny egyensúlyi állapothoz és a leterheléshez tartozó maradó feszültségek görbéit.

A numerikus példában az alábbi adatokkal számoltunk:

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{10}, \quad \vartheta_2 = \frac{\pi}{4}, \quad p_1 = 160 \text{ MPa}, \quad p_2 = 10 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 200 \text{ MPa}.$$



5. ábra. Felterheléshez tartozó feszültségek görbéi.



6. ábra. Maradó feszültségek görbéi az első leterhelés után.

Könnyen verifikálható, hogy

$$p_E = 105,435 \text{ MPa} < 160 \text{ MPa} < 175,557 \text{ MPa},$$

vagyis első felterheléskor valóban az üreges kúp alakú test rugalmas-képlékeny egyensúlya valósul meg. Az 5. ábrán a felterheléshez tartozó σ_θ és σ_ϕ feszültségek görbéit adjuk meg. A maradó feszültségek görbéit pedig a 6. ábra szemlélteti. Mindkét esetre érvényes, hogy $\sigma_0 = \sigma_r$ feszültség a megrajzolt feszültségek számtani közepe, így ezek megrajzolásától eltekintünk.

4. Összefoglalás

A tanulmány egy analitikus módszert ismertet az üreges ideálisan rugalmas-tökéletesen képlékeny kúp alakú testekben külső és belső nyomás hatására kialakuló feszültség állapot számítására. Lényeges feltevés, hogy a Poisson-szám értéke 0,5. A rugalmas egyensúlyhoz tartozó feszültségek számításánál döntő szerepet kap a kiinduláskor felvett elmozdulás mező. A képlékeny egyensúly feladata, amelyek célja a feszültségek számítása, pusztán a Tresca-féle folyási feltétel és az egyensúlyi egyenlet felhasználásával megoldható. Az ismertett feladat megoldása egy új hozzájárulás a képlékenységi problémák numerikus megoldásának tesztelési lehetőséget biztosító *benchmark* példákhoz.

5. Köszönetnyilvánítás

E tanulmány a TÁMOP-4.2.2.B-10/1-2010-0008 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

6. Irodalom

- [1] Malvern, E.L.: *Introduction to the Mechanics of Continuous Medium*, Engelwood Cliffs, Prentice-Hall, New Jersey, 1969.
- [2] Slaughter, W.S.: *The Linearized Theory of Elasticity*, Birkhäuser, Basel, 2002.
- [3] Sokolnikoff, I.S.: *Mathematical Theory of Elasticity* (2nd ed.), McGraw-Hill, New York, 1956.
- [4] Golecki, I.: On the fundamentals of the theory of elasticity of plane incompressible non-homogeneous media. *Lecture in I.U.T.A.M. Symposium of Non-homogeneous in Elasticity and Plasticity*. Warsaw, 1958.
- [5] Golecki, I.: On the assumption of incompressibility in plane problems of elasticity, *Arch. Mech. Stos.*, 9(3), pp.297-301, 1959.
- [6] Golecki, I.: Statics of an incompressible elastic solid, *Arch. Mech. Stos.*, 1(4), pp.35-46, 1961.
- [7] Thomson, G.E.: Average and complete incompressibility in the finite element method, *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.*, 9, pp. 925-932, 1975.
- [8] Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1950.
- [9] Kachanov, L.M.: *Foundation of the Theory of Plasticity*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1971.
- [10] Chen, W.F., Han, D.J.: *Plasticity for Structural Engineers*, Springer Verlag, Berlin, 1988.