

AZ INFORMATIKUS HALLGATÓK TANÍTÁSI-TANULÁSI FOLYAMATÁNAK JAVÍTÁSA JÁTÉKALAPÚ TANULÁSSAL, A LIMESZELŐS DIDAKTIKAI JÁTÉK FEJLESZTÉSÉNEK ÉS EREDMÉNYEINEK BEMUTATÁSA

Körei Attila 

egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet, Alkalmazott Matematikai Tanszék
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: matka@uni-miskolc.hu

Szilágyi Szilvia 

egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet, Analízis Tanszék
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: matszisz@uni-miskolc.hu

Török Zsuzsanna 

mesteroktató, Miskolci Egyetem, Antropológiai és Filozófiai Tudományok Intézete
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: boltorok@uni-miskolc.hu

Absztrakt

A valós számsorozat, a konvergencia és a határérték (limesz) fogalmakkal valamennyi informatikai képzési területre felvett hallgató találkozik az első félév matematikai analízis kurzusa során. A hallgatók figyelmének, érdeklődésének megtartásához hathatós támogatást adnak azok az oktatási módszerek, amelyek bizonyították a Z generációs hallgatók motiválásával kapcsolatban. A játékalapú tanulás (game-based learning) előnyeire alapozva fejlesztettük LimEszelős elnevezésű kártyajátékunkat, amelyet a valós számsorozatok nevezetes határértékeinek tanulására és gyakorlására hoztunk létre 4–10 fős tanulói csoportok számára. Cikkünkben a játék bemutatása mellett a kétéves kísérleti szakaszban szerzett tapasztalatainkat összegezzük.

Kulcsszavak: játékalapú tanulás, didaktikai játék, aktív tanulási módszerek, kiscsoportos oktatás, sorozat határértéke, kártyajátékok

Abstract

The concepts of real number sequence, convergence and limit are introduced to all computer science students in their first semester mathematical analysis course. Teaching methods that have proven to be effective in motivating Generation Z students are a powerful support to keep students' attention and interest. Building on the advantages of game-based learning, we developed a card game called LimStorm, which was designed to practice the notable limits of real number sequences for groups of 4–10 students. In this paper we summarise our empirical experience from the experimental phase, in addition to presenting the LimStorm game.

Keywords: game-based learning, didactic game, active learning methods, small-group education, limit of the sequence, card games

1. BEVEZETÉS

A Miskolci Egyetem valamennyi akkreditált informatikai BSc képzésének struktúrájában szerepel az alapozó tárgyak között matematikai analízis témájú kurzus. A sorozat, konvergencia és határérték (limesz) fogalmakkal így valamennyi elsőéves informatikai képzési területre felvett hallgató találkozik az első félév során. A konvergencia és a határérték fogalma alapvető jelentőségű a matematikai analízisben. A sorozat határértékének ismeretében szemléletes módon vezethetjük be a függvény adott pontbeli folytonosságának, illetve határértékének definícióját. Ez utóbbi fogalom a differenciálszámítás alapja, melynek számtalan alkalmazási lehetősége ismert. Ezek között nemcsak felsőbb matematikai vagy fizikai feladatokat, hanem a mérnöki vagy a közgazdasági tudományok területéről származó gyakorlati problémákat is találunk. A numerikus analízis és az optimalizálás eszköztára is nagyrészt iterációs eljárásokból áll, melyekben a létrehozott sorozatok konvergenciáján múlik az alkalmazott módszer sikeressége. E néhány példából is látható, hogy a határérték fogalmának hallgatókkal való alapos megértetése az egyetemi matematikaoktatás kulcsfontosságú mozzanata. Nem véletlen tehát, hogy a határérték fogalmának tanítása és tanulása már régóta fontos és érdekes kutatási téma. A határérték tanulásakor, tanításakor jelentkező nehézségeket és ezek okait tárgyalják a (Roh, 2008; Roh, 2010; Tall és Vinner, 1981; Kidron és Zehavi, 2002) cikkek, valamint olyan didaktikai módszereket és eszközöket is bemutatnak, amelyekkel jól szemléltethető a vizsgált fogalom. A gamifikáció és a game-based learning alkalmazására is találtunk példákat (Flores és Park, 2016; Cory és Garofalo, 2011; Watts, 2019), azonban a szakirodalom tanulmányozásakor arra lettünk figyelmesek, hogy a játékalapú tanulási módszerek közül leginkább az infokommunikációs technológiát alkalmazó didaktikai játékok vannak a fókuszban. A gamifikáció és a game-based learning azonban alapvetően független a digitális technológiáktól, a legtöbb esetben mégis webes alkalmazások felhasználásával, internetes platformokon keresztül valósul meg (Bösze és Devosa, 2021). Ha az oktatási folyamatba egy-egy játék tanulási célra átdolgozott változatát eseti jelleggel integráljuk – akár digitális, akár hagyományos játékról van szó – akkor játékalapú tanulásról (game-based learning) beszélhetünk, míg a folyamatos használat, vagyis a teljes kurzus játékos alapokra helyezése már gamifikációnak tekinthető.

Igazolt tény, hogy a hallgatók figyelmének, érdeklődésének hosszú távú fenntartásához hathatós segítséget biztosítanak az infokommunikációs eszközök (Mohr és Mohr, 2017), azonban a túlzott használatnak számos hátránya is ismert (Hyrynsalmi et al., 2017). Az is tény, hogy a Z generációs hallgatók motiválásának egyik kulcsa a játék. Ezek a hallgatók a passzív tanulást általában rosszul tolerálják, esetükben az aktív tanulás feltételeinek biztosításával érhetők el eredmények (Schäffer, 2015; McGonigal, 2011). A játékalapú tanulási módszerek oktatásba történő bevonásával az aktív tanulási fázist erősíthetjük. Erre a célra kiválóan alkalmasak az adott tantárgyi tartalomhoz célzottan fejlesztett didaktikai játékok, amelyek az ismeretszerzési, a gyakorlási, az ellenőrzési, valamint az értékelési fázisban többször is felhasználható eszközök (Kordaki és Gousiou, 2017; Szilágyi és Körei, 2021).

Számos jól ismert játék szinte változtatás nélkül építhető be az oktatás különböző szegmenseibe (Dudás et al., 2019). A hosszadalmas előkészületeket nem igénylő, könnyen megtanulható szabályokkal játszható, gyors, dinamikus játékot biztosító didaktikai eszközök – például a kártyajátékok – izgalmas játékkal tanítanak és szórakoztatnak, akár digitális, akár hagyományos változatról legyen szó. A játékkal kombinált oktatás során a tapasztalatok szerint a szakmai tartalom átadása, gyakorlása mellett hatékonyan fejleszthető a logikus gondolkodás, a memória, a problémafeltáró és megoldó képesség, a koncentráció, a hatékony időbeosztás, valamint a csoportban dolgozni tudás kvalitása (Körei et al., 2021).

A specifikus didaktikai játékok meghatározott tananyagokhoz vannak kidolgozva, így az ismeretek, tapasztalatok bővítésére célszerűen alkalmazhatók. A matematikai analízis fejezeteihez illeszthető játékok létrehozása azért fontos, mert ennek a területnek a gamifikációs és játékalapú tanulást támogató eszközökkel való ellátottságában számos ponton hiány tapasztalható (Körei és Szilágyi, 2020).

Cikkünkben saját fejlesztésű, hagyományos eszközigenyű, LimEszelős elnevezésű didaktikai kártyajátékunkat mutatjuk be, amelyet a valós számsorozatok nevezetes határértékeinek gyakorlására terveztünk és hoztunk létre. A játék kísérleti paklijának eredményességét a kétéves vizsgálati fázis alatt multimédia, mérnökinformatikus, gazdaságinformatikus és programtervező informatikus szakra felvett elsőéves Z generációs hallgatókból álló 4–10 fős csoportok segítségével teszteltük a Miskolci Egyetemen és Erasmus+ mobilitás keretei között Litvániában, az Alkalmazott Tudományok Állami Egyetemén, Šiauliai-ban.

2. A LIMESZELŐS PROJEKT FÁZISAI

A játék alapötlete 2019 tavaszán született meg. A projekt első fázisában, 2019 nyarán a kártyapakli lapjait generáló Java alkalmazást készítettük el, amellyel a 110 lapból álló alapkészlet lapjaira a 40 különböző határérték LaTeX formátumban felvihető, továbbá a kártyalapok nyomdakész formában menthetők el. A szoftverbe a LaTeX szerkesztőt azért integráltuk, hogy a matematikai formulákat igényesen megjelenítő kártyalapjaink legyenek, valamint az is célunk volt, hogy könnyedén módosíthassuk az eredetileg tervezett paklit és a későbbiekben készíthessünk kiegészítő kártyákat, vagy akár teljesen új kártyacsomagot. A programban szereplő alapkártyák szerkeszthetők, az akciókártyák viszont nem, hiszen az utóbbiak szerkesztése nem is indokolt.



1. ábra. A LimEszelős pakli.

Az alkalmazás fejlesztése sok időt vett igénybe, de úgy gondoltuk, hogy olyan platformot célszerű létrehozni, amellyel tetszőlegesen sok kártyapakli létrehozására van lehetőség, ugyanis egy didaktikai játéknál nagyon lényeges szempont a differenciálhatóság megvalósíthatóságának biztosítása. Erre akkor van módunk, ha bármikor hozzá tudunk nyúlni a paklihoz, vagyis megváltoztathatók bizonyos lapokon a határértékek. Az elkészült alkalmazással az első próbapaklit 2019 októberében nyomtattuk ki. A játék szabályait a próbapakli segítségével finomítottuk. Az előtesztelési folyamat során bizonyos kártyákat lecseréltünk, de új akciókártyák ötlete is felmerült. Ilyen például a többfunkciós *Négylevelű lóhere lap*, amelynek kijátszásakor körkörös kártyacsere indítható vagy megfordítható a játék menetének iránya, továbbá szinkérő lapként is felhasználható. A pakli 2020 tavaszára nyerte el jelenlegi összetételét, ekkor a nyomdából három paklit rendeltünk. Az 1. ábrán egy szétterített pakli lapjait látjuk.

A projekt második fázisa az éles tesztelés volt. Ezzel azonban várnunk kellett, hiszen a sorozat határértéke első féléves tananyag, ezért az első teszteket 2020 őszére terveztük: októberben a Miskolci Egyetemen és novemberben Erasmus+ mobilitással az Alkalmazott Tudományok Állami Egyetemén, Šiauliai-ban. A jelenléti oktatás 2020 szeptemberében elindult a Miskolci Egyetemen, így ekkor 28 főt tudtunk bevonni a projektbe. Sajnos 2020 novemberétől már online formában tanítottunk a Covid-19-járvány miatt, így a litván hallgatókkal tervezett munka elmaradt. Egy évvel később, 2021 őszén 35 magyar és 24 litván hallgatóval dolgoztunk. Összesen 87 résztvevő próbálta ki a tesztidőszak alatt a LimEszelős játékot.

Az eredményesség mérésére teszteket és kérdőívet használtunk. Valamennyi résztvevő két papír-alapú tesztet írt (egyét a játékok előtt, egyet pedig közvetlenül utána), valamint egy online kérdőívet töltött ki a játékkal kapcsolatos észrevételeiről. Azt kértük, hogy lehetőség szerint még aznap töltsék ki az online kérdőívet, hiszen ekkor még frissek a játékalapú tanulással kapcsolatos benyomásaik. A projekt harmadik fázisában a tesztek eredményeit összesítettük, valamint a véleményező kérdőívre adott válaszokat osztályoztuk.

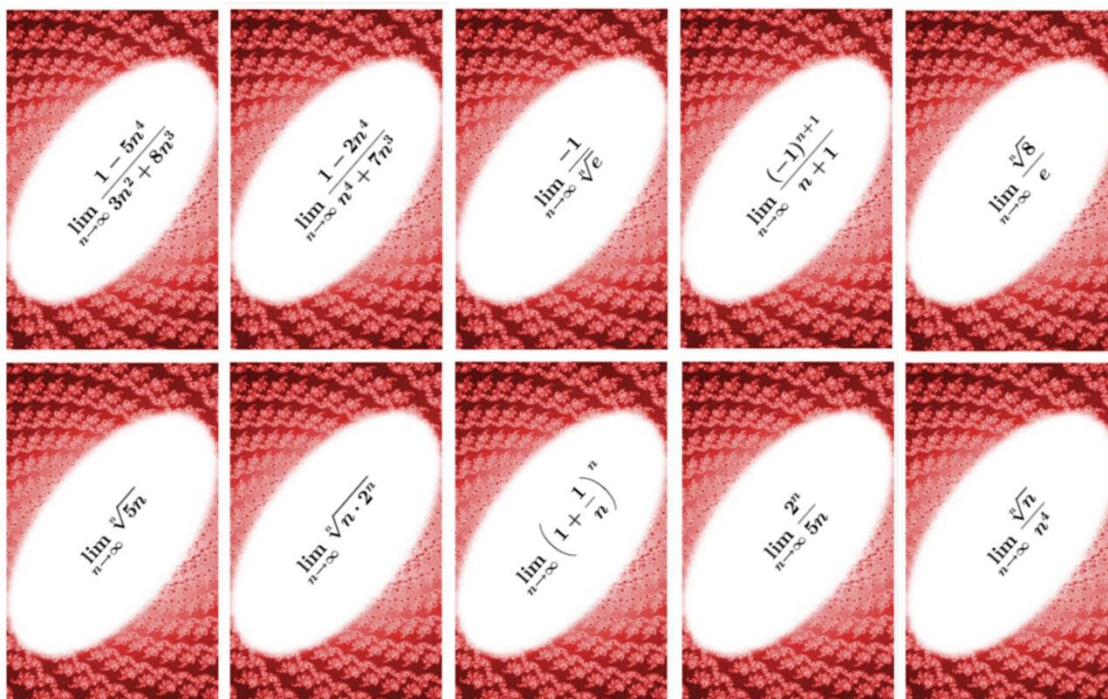
3. A LIMESZELŐS JÁTÉK

A LimEszelős didaktikai játék alapötletét egy népszerű kártyajáték, a Solo adta. Számos ponton nem változtattunk a mintaként szolgáló játékon, például ugyanúgy négy alapszínnel készültek a lapok, mint a Solo-ban, viszont lényeges eltérés, hogy a számjegyek helyett határértékek találhatók a kártyákon. Az akciólapok közül megtartottunk bizonyos típusokat, de ezek mellé újakat is létrehoztunk. A LimEszelős pakliban valamennyi akciólap szívárványszínű. A szabályokon is módosítottunk az eredeti játékhoz képest, hogy a kitzűzött didaktikai céloknak minél jobban megfeleljen a LimEszelős játék.

3.1. Röviden a kártyajáték paklijáról

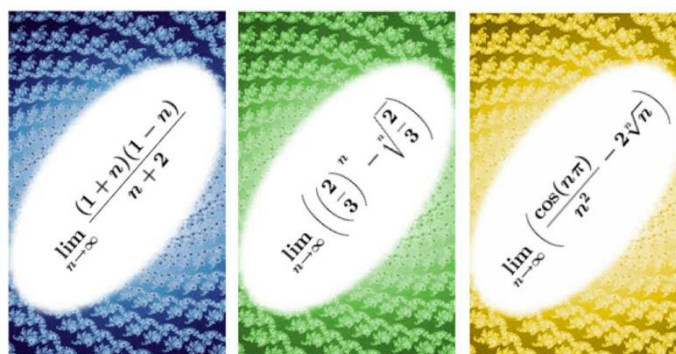
A teljes LimEszelős kártyacsomag 110 lapból áll. 80 színes alapkártyán valós számsorozatok kis rutinnal fejben kiszámolható határértékeit találjuk, ezek mellett további 30 akciókártya van még a pakliban. Az alapkártyák sárga, zöld, kék és piros háttérűek. Valamennyi kártya lila hátlapú, amelyen egy fraktál látható. Ugyanez a fraktál adja az alapkártyák előlapjainak háttérét is a négy korábban felsorolt színben. Az alapkártyákon színenként 10-10 valós számsorozat határértéke került elhelyezésre egy 45 fokban megdöntött fehér alapszínű ellipszisben. Minden alapkártyából 2 darabot tartalmaz a csomag. A lapokon szereplő határértékek a nevezetes határértékek, valamint a határérték műveleti tulajdonságaira vonatkozó tétel és a rendőr-elv ismeretében fejben számolhatók. Arra törekedtünk, hogy a LimEszelős játékban szereplő határértékek változatosak legyenek, de ne túl nehezek. Az optimális terhelés beállításával a játék a megfelelő nehézségi szintet biztosítja, így a flow élmény kialakulása lehetővé válik. A túl

könnyű feladatok unalmassá, a túl nehezek pedig frusztrálóvá tehetik a játékot. A kártyákon szereplő feladatok nehézségi szintje nem egységes. A könnyebben kikalkulálható határértékekkel gyorsan sikerélményt adhatunk, továbbá a bekapcsolódást is segíthetjük, míg a nehezebben számolható, több elméleti eredmény szintetizálását igénylő feladatokkal az érdeklődés fenntartását céloztuk meg. A négy létrehozott szériából a piroséhoz például a 2. ábrán látható határértékek tartoznak.



2. ábra. A piros széria lapjai.

Minden szériában a tíz sorozatból kettő divergens: egy sorozat a $+\infty$ -hez, egy pedig a $-\infty$ -hez divergál. További nyolcnak van véges, valós határértéke. Nullsorozatból minden szériában kettőt helyeztünk el, ezzel összetettebbé tettük a játékot, valamint a nullsorozatok fontosságának hangsúlyozását is megoldottuk.



3. ábra. A LimEszelős pakli olyan lapjai, amelyeken összetett határértékek jelennek meg.

Nemcsak az Euler-féle számot, hanem annak reciprokát is szerepeltettük a kártyákra írt határértékek között, így irracionális számot is bevontunk a kiszámítandó határértékek közé. Mind a négy széria esetén eredményként ugyanazok a határértékek számolhatók, mint a példaként bemutatott piros széria esetén, de más-más sorozatok határértékeként, így 40 különböző valós számsorozat határértéke jelenik meg a lapokon. A kártyákon szereplő feladatok általában műveleteket tartalmaznak és két-három nevezetes sorozat határértékének felhasználásával számíthatók ki, ahogy ezt a 3. ábrán látható lapok is mutatják. A kártyákhoz felhasznált nevezetes sorozatok számszerű adatait az 1. táblázatban foglaltuk össze.

1. táblázat. A kártyacsomagban szereplő határértéktípusok gyakorisága

Nevezetes sorozatok	Sárga széria	Piros széria	Zöld széria	Kék széria	Összesen:
$\{c\}_{n=1}^{\infty}, c \in \mathbb{R}$	4	5	4	5	18
$\{n^a\}_{n=1}^{\infty}, a \in \mathbb{Q}$	1	1	1	1	4
$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$	6	5	5	6	22
$\{q^n\}_{n=1}^{\infty}, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	4	2	3	3	12
$\{\sqrt[n]{c}\}_{n=1}^{\infty}, c \in \mathbb{R}^+$	2	3	1	0	6
$\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$	2	3	1	0	6
$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$	1	1	1	1	4

3.2. Játékszabályok

A LimEszelős játékot kimondottan 4–10 fős csoportok számára hoztuk létre, de már két fő is játszhatja. A pakli megkeverését követően az osztó a játékosoknak kioszt az óramutató járásának megfelelően a különböző színű és határértékekkel ellátott alapkártyákból, valamint az akciókártyákból álló 110 lapos kártyapakliból hét-hét lapot. A többi lap képezi a húzó paklit, amely az asztal közepére kerül. A legfelső kártyát mindenki számára jól látható helyre tesszük a képes oldalával felfelé, a húzópaklitól nem túl messze. Ez a lap lesz a dobópakli első lapja. A LimEszelős játék célja, hogy minél hamarabb megszabaduljon a játékos attól a hét laptól, amelyet osztáskor kapott. A kezdő játékost a csoport kiválasztja. Ő dob először, majd a tőle balra ülő játékos következik, és így tovább. A soron következő játékos a dobópakli tetején lévő lap alapján minden körben – egyetlen lehetőségtől eltekintve – maximum egy kártyát tehet le. Általános szabály, hogy az eldobott kártyának vagy színben, vagy a lapon szereplő határértékben meg kell egyeznie az asztalon heverő kártyával. Csak akkor dobhat el több lapot egyszerre a játékos, ha van nála több teljesen megegyező színű és határértékű lap. Ez jelentheti két, három vagy négy lap egyszerre történő eldobását. Az utóbbi két eset bekövetkezési valószínűsége nagyon alacsony, ugyanis csak nullsorozat szerepel duplán az egyes színzériákban, azaz a 0 határérték minden szín esetén két kártyán számolható. Amikor egy játékos a dobópaklira lapot (vagy lapokat) tesz, akkor mindig hangosan mondania kell az eldobott lapon szereplő határértéket. Ez jelenti a játék tanulási szakaszát, hiszen akkor is ki kell számolni fejben a kártyalapon szereplő határértéket, ha vagy színegyezés miatt tesszük le a lapot, vagy pedig szívárványszínű lapra történik a dobás. A vizuális

információt tehát auditív információval erősítjük. Így több észlelési csatornán keresztül van lehetőségünk a kívánt tartalom közvetítésére. A játék során *közbedobás* is alkalmazható. Ez akkor történhet meg, ha valakinek van a kezében olyan lap, amelyik színben és értékben megegyezik az utoljára eldobott lappal. Ezt a lapot leteheti a játékos akkor is, ha éppen nem rajta van a sor. Közbedobást követően az a játékos lesz a soron következő, aki azután a játékos után következik, aki a közbedobás lehetőségével élt. Tekintettel arra, hogy adott színszériában két zérus határértékű sorozat van, a közbedobás akkor is érvényesíthető, ha a dobópakli tetején lévő lapon szereplő sorozattól különböző, de azonos színű kártyán szereplő nullsorozat határértéke van a játékos kezében. Annak a játékosnak, aki nem tud lapot lerakni, húznia kell a pakliból egy másikat, a játékot pedig a soron következő játékos folytathatja. A LimEszelöst az akciókártyák teszik változatossá, lendületessé. Ezekkel előnyre is szert lehet tenni, de hátrányba is lehet kerülni. Az akciókártyák akkor játszhatók ki, amikor a játékos azt szükségesnek ítéli és mindig csak egyet tehet le a játékos ebből a laptípusból, azaz itt két teljesen egyforma lap esetén sem engedélyezett az egyidejű páros laplerakás. A pakli hatféle szivárványszínű akciókártyát tartalmaz:

- A *Kimaradás kártya* segítségével a soron következő játékos kimarad a körből, ő nem dobhat, és lapot sem vehet fel.
- *Cserekártyát* használva lapjainkat kicserélhetjük egy másik játékos lapjaival.
- A *Húzz kettőt kártya* kijátszásakor játékosársunkat arra kényszeríthetjük, hogy vegyen fel két lapot a húzópakliból. A *Húzz kettőt kártyára* másik *Húzz kettőt kártya* ráhelyezhető, ekkor a következő játékosnak már négy lapot kell felvennie a húzópakliból, ha nincs nála ilyen típusú kártya és így tovább.
- A *Húzz hármát kártya* lerakásakor pedig három lapot kell felvennie a soron következőnek. Ezt elkerülheti a játékos abban az esetben, ha van nála is lapfelvételre kötelező lap. A *Húzz kettőt kártyára* a *Húzz hármát kártya* rátehető, fordítva viszont nem.
- Az *Adj át egy kártyát!* lap kijátszásakor a játékos a kezében tartott pakliból egy lapot átadhat az egyik játékosársának.
- A *Négylevelű lóhere* akciólap többfunkciós. A lapot letevő játékos kérheti a körkörös kártyacsere lehetőségét, vagy megfordíthatja a játék menetének irányát. Ezen túlmenően színkérésre is felhasználható.

Az akciókártyák szivárványszínűek, tehát kijátszásukat követően, ha a rajta szereplő utasítás érvényesítésre került, a soron következő játékos tetszőleges színű kártya lerakásával folytathatja a játékot. Amint egy játékosnak már csak két lap marad a kezében, és azok közül is ki tud játszani egyet, kötelessége bemondani, hogy *HÉ!*, ezzel figyelmeztetve a társakat, hogy neki már csak egyetlen lapja maradt. Ha elfelejti bemondani, és valaki ezt észreveszi, akkor büntetésből fel kell vennie két lapot. Ha a *HÉ!*-t mondó játékos ismételten sorra kerül, és le tudja tenni az utolsó lapját is, akkor az adott játéknak ő a nyertese. A többi játékos ekkor abba is hagyhatja, de folytathatja is a játékot, amíg már csak egyiküknek marad kártya a kezében. Az oktatónak vagy a csoportnak kell eldöntenie, hogy meddig tartson a játék. A *HÉ!* a határérték rövidítésére szolgáló betűszó miatt lett a játék végének közeledtét jelző figyelmeztetés.

3.3. A LimEszelős didaktikai játék integrálása az oktatásba

Az első féléves matematikai analízis kurzusok esetén, klasszikus oktatási formában, a sorozatok témakörhöz kapcsolódó előadásokon az elméleti alapozás történik meg általában három órában. Ezt követően a gyakorlati órákon a témakörhöz tartozó feladatok megoldására kerül sor. A tesztelési időszak

során két kétórás gyakorlaton foglalkoztunk a valós sorozatok határértékének kiszámításával és a fontosabb tulajdonságok vizsgálatával, ebből kb. 30 percet használtunk arra, hogy játékos formájú tanulást valósítsunk meg a LimEszelős pakli alkalmazásával. Időt vett igénybe a tesztek megírása is, de erre a mérés miatt szükség volt. Összességében kb. 60 percet szántunk egy-egy csoport esetén a projekt megvalósítására.

Az első gyakorlaton, valamint a második kétórás gyakorlat első órájában a korábban megszokott módon a témakörhöz tartozó feladatok megoldására került sor, majd egy rövid teszt írásával mértük fel a tudásszintet ennek az órának a végén. A kilenc kérdésből álló teszt megoldásával lehetőség nyílt a nevezetes határértékek, valamint a szükséges elméleti háttéranyag felelevenítésére is. Didaktikai szempontból lényeges momentum, hogy az ellenőrző fázis ne maradjon el, ezért minden kérdésre közös ellenőrzés keretei között megadtuk a helyes választ. Ekkor lényegében már a játék előkészítését végeztük. A LimEszelős paklival a második gyakorlat második órájában játszottunk. A szabályok pár perc alatt ismertethetők, így a 4–10 fős heterogén csoportok kialakítását követően kezdődhetett a játék.



4. ábra. LimEszelős játék litván hallgatókkal.

A csoportok kialakításánál csak a létszámot korlátoztuk. Ha az alapjáték nem ismert a hallgatók között, akkor a Solo játékkal érdemes játszani egy bevezető játékot, bár erre a kétéves tesztelési időszak során egyetlen alkalommal sem volt szükség, ugyanis tapasztalataink szerint nagyon kevés olyan hallgató van, aki nem ismeri az alapjáték valamilyen verzióját. A LimEszelős paklival legalább három partit játszottunk minden esetben, ami kb. 30 percet vett igénybe. A feldolgozott tananyag ekkor került rögzítésre, gyakorlásra. Az első játék során az oktató is bekapcsolódott a játékba, mert így a hibásan bemondott határértékek azonnal korrigálásra kerültek. A 4. ábrán látható egy ilyen parti, ekkor hat hallgató vett részt a játékban és az oktató. A későbbi játékok során azonban az irányító szerepből visszahúzódtott az oktató, mert a csoport tagjai biztosították a kontrollt, a visszajelzést. A játék hatékonyságát egy záróteszt írásával mértük fel a gyakorlati óra végén.

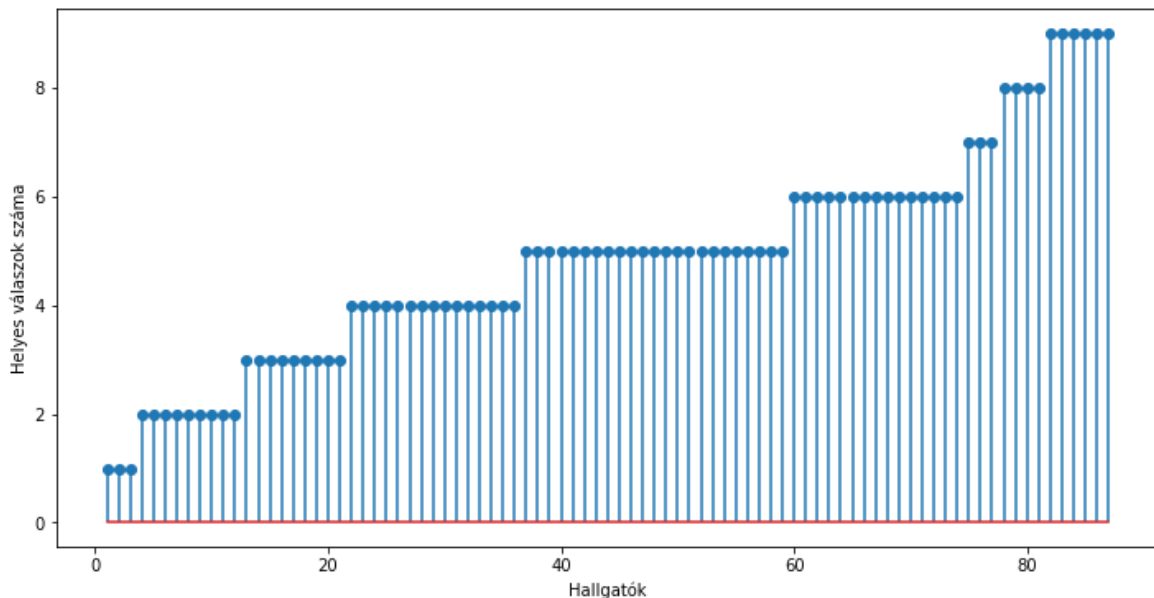
4. A FELMÉRÉS EREDMÉNYEINEK ELEMZÉSE

Az összegyűjtött mérési eredményeket a webalapú Jupyter Notebook interaktív számítási környezetben elemeztük. Az adatok feldolgozásához a két teszthez és a kérdőívhez is egy-egy 87 soros Excel-táblázatot készítettünk. Mindhárom táblázat első oszlopa a hallgatók anonim azonosítóját tartalmazta.

Egyszerű választásos tesztek állítottunk össze a tudásszint mérésére, tehát minden kérdésre csupán egyetlen helyes választ kellett megadni a négy lehetőség közül a kitöltéskor, ezt szöveges instrukcióként a tesztre is ráírtuk, de szóban is felhívtuk rá a figyelmet. Az első és a második teszt esetén ezért 1-es került a mátrixba, ha jó volt a kérdésre adott válasz, míg 0-át vittünk be adatként, ha rossz választ jelölt meg a hallgató. Az értékelő kérdőív kitöltésekor ötfokozatú skálán adták a résztvevők a pontokat, itt tehát 1-től 5-ig kerültek értékek az összesítő táblázatba. A Jupyter Notebook számára csv kiterjesztésű fájlokba konvertáltuk a táblázatokat.

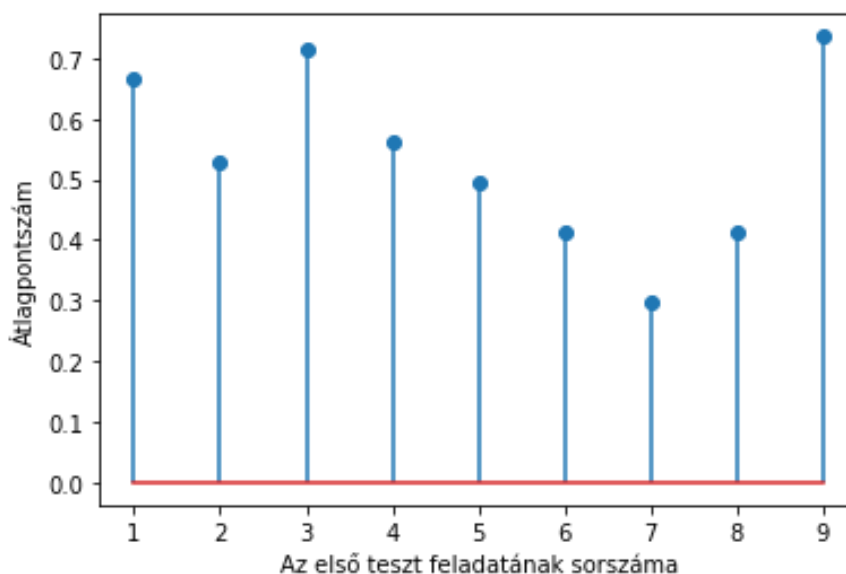
4.1. A tesztek eredményeinek összegzése

Az első teszt kilenc kérdést tartalmazott. 15 perc állt a hallgatók rendelkezésére, hogy a papír alapú tesztet kitöltsék. A pontok átlaga 4,83 pont lett, ez az elérhető pontszám 53,64%-a. Az elemzés során megállapítottuk, hogy a legtöbb hallgató a kilencből öt kérdésre adott jó választ. A helyes válaszok számának eloszlását az 5. ábrán látjuk. Minden hallgató adott legalább egy jó választ és kevés olyan hallgató volt, aki háromnál kevesebb jó választ adott. Hat résztvevő írt hibátlan első tesztet.



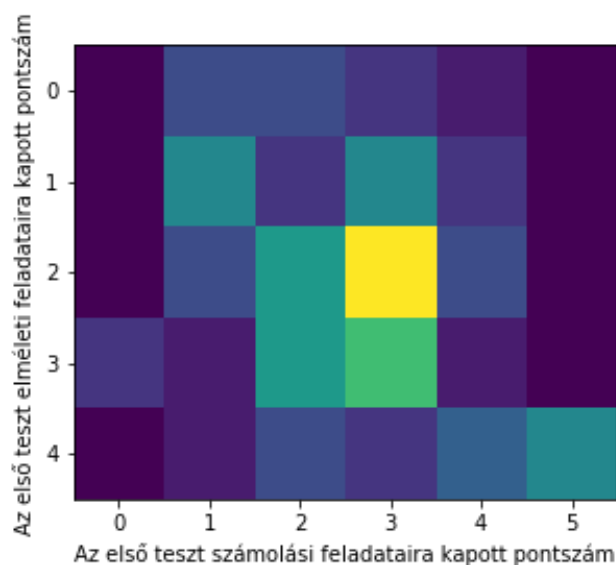
5. ábra. Az első tesztre kapott helyes válaszok száma

Feladatonként is elvégeztük az elemzést, ennek eredményei láthatók az 6. ábrán. Legtöbbször a 9. feladatra válaszoltak helyesen, míg legnehezebbnek a 7. feladat bizonyult. A 9. feladatra a hallgatók 73,56%-a adott jó megoldást, míg a 7. esetén csupán 29,89%. A 9. feladat az Euler-féle számot megadó határértékre kérdezett rá és az első válasz éppen a definiáló határértéket tartalmazta a négy lehetséges válasz közül, így nem meglepő, hogy erre a kérdésre sok hallgató tudott helyes megoldást adni. A 7. feladatra viszont csak az tudott jól válaszolni, aki mind a négy megadott határértéket kiszámolta, ugyanis ezek közül kellett a pozitív értékűt megadni. Ez a kérdés egyértelműen nehezebb volt. A 3. feladatban a nullsorozatot kellett kiválasztani a négy megadott sorozatból, ami a nevezetes határértékek ismeretében könnyen megválaszolható kérdés. Ennek köszönhető, hogy a 3. feladatra a hallgatók 71,26%-a válaszolt helyesen, ami kevéssel marad el a 9. kérdésre helyesen válaszolók százalékos értékétől.



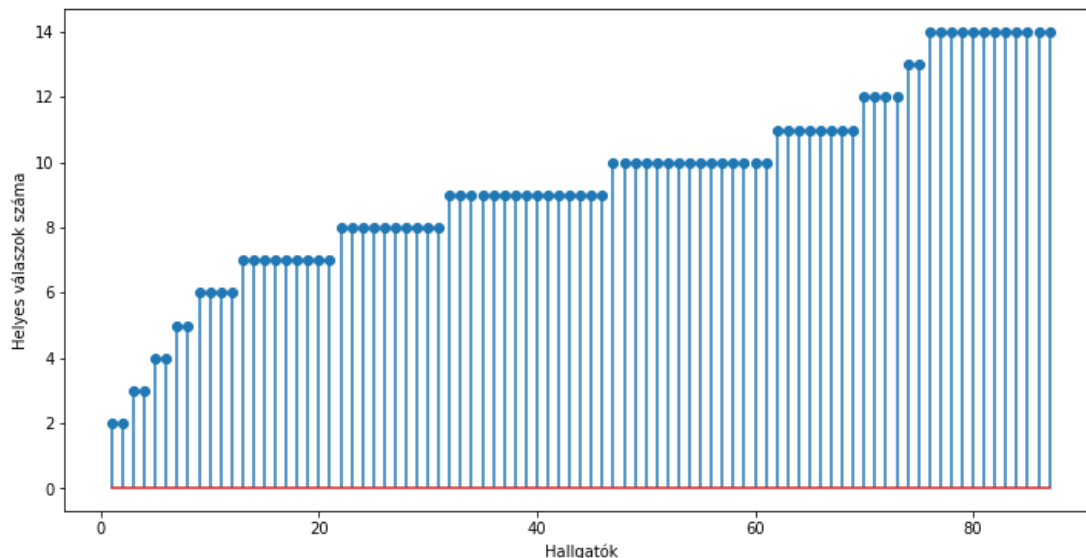
6. ábra. Az első teszt feladatainak átlagpontszáma

A 6. ábrán jól látható, hogy hat kérdésre érkezett legalább a kitöltők felétől jó válasz. Öt feladatnál jó megoldást akkor tudott adni a hallgató, ha kiszámolta a válaszokban megadott határértékeket. Négy feladatnál az elmülethez kapcsolódó kérdésekre vártunk megoldást. Arra is kerestük a választ, hogy milyen összefüggést mutatnak az adatok az elméleti és a számolási feladatokra kapott pontszámok tekintetében. A vizsgálat eredményét az 7. ábrán látjuk. A legsötétebb mezők 0 értékűek. A nagyobb gyakoriságot egyre világosabb szín jelöli. A sárga négyzet mutatja a minta legnagyobb gyakoriságát. Látható, hogy ezek a kitöltők 2 pontot szereztek az elméletből és 3 számolást tartalmazó feladatra adtak helyes választ.



7. ábra. Az első teszt feladatainak átlagpontszáma

A második teszt több kérdésből állt, mint az első. 14 számolást igénylő feladatra vártunk választ a játékos tanulást követően. Csak az elmélet ismerete alapján, azaz számolás elvégzése nélkül megválaszolható kérdést nem tettünk fel, hiszen a projektben a játékalapú tanulás során elsajátított számolási készséget mértük. Ugyanúgy 15 perc állt a hallgatók rendelkezésére, mint az első teszt kitöltésekor. Sokkal összetettebb feladatokat kérdeztünk, mint az első tesztben, mert a tanulási fázis eredményességét így tudtuk jól mérni.



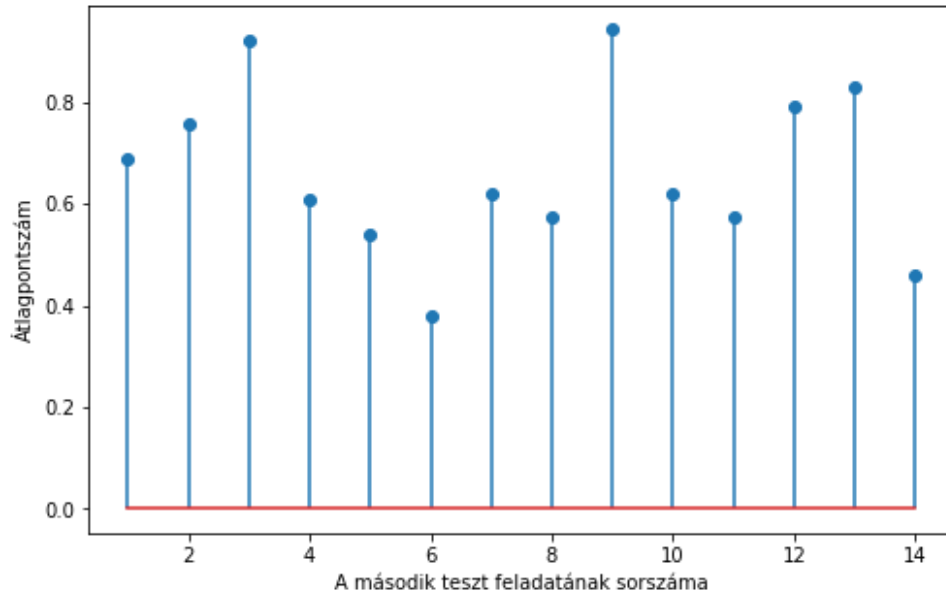
8. ábra. A második tesztre adott helyes válaszok száma

Az átlag 9,31 pont lett, ami 66,50%-os eredményességet jelent. Az első teszthez viszonyítva ez 12,86%-os javulást jelent. A helyes válaszok számát a 8. ábrán látjuk. A kilenc és a tíz helyes választ adók voltak a legtöbben, de jelentős a hibátlan tesztet írók száma is. Ez a szám itt 14, ami 2,33-szor több, mint az első tesztet hibátlanul kitöltők száma. Összességében a hallgatók 86,2%-a válaszolt helyesen legalább a kérdések felére, ez a 8. ábrán jól látszik. Kevesen vannak, akik kevés pontot szereztek. Nem volt olyan hallgató, aki egyetlen kérdésre sem tudott válaszolni és csupán nyolcan voltak a teljes mintában, akik legfeljebb öt kérdésre adtak helyes választ.

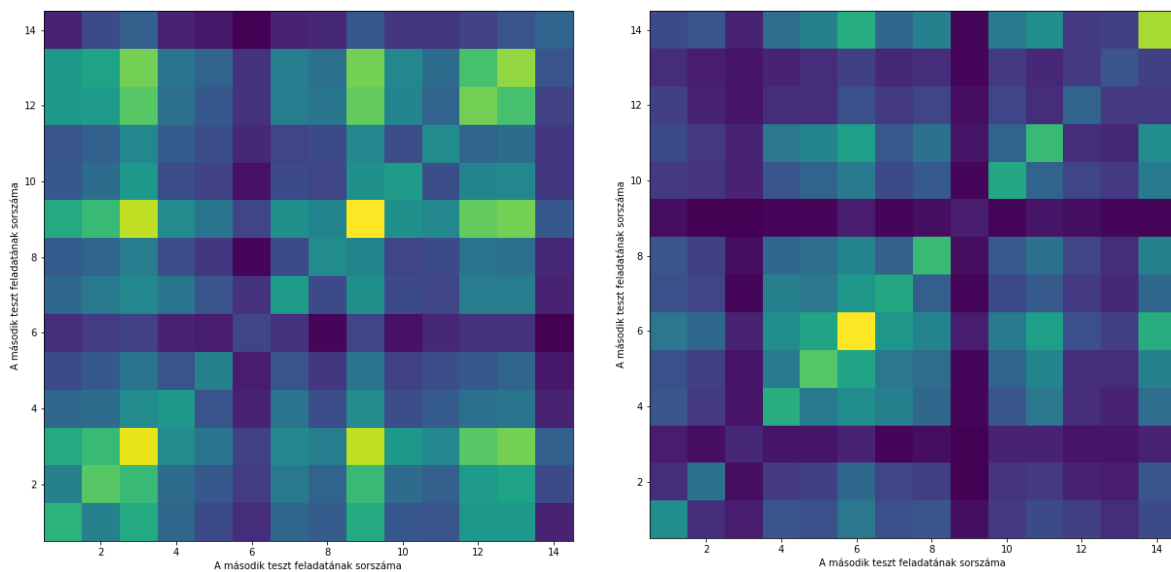
Ugyanúgy, mint az első teszténél, a második teszt esetén feladatonként is elvégeztük az elemzést. Az eredmények a 9. ábrán láthatók. A legtöbben a 9. feladatra válaszoltak helyesen, de a 3., 12. és 13. sorszámú feladatokra is sok helyes válasz érkezett. Legnehezebbnek a 6. és a 14. feladat bizonyult. A 6. feladatra 33 jó választ adtak a hallgatók, ami 37,93%-ot jelent. Látható, hogy a korábbi 29,89%-ot jóval meghaladja a legnehezebbnek bizonyuló feladatra érkező helyes válaszok százalékos értéke. A 6. feladat esetén a nehézséget az jelentette, hogy a jó válaszhoz tudni kellett a

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

összefüggést és azt is, hogy alternáló sorozat is lehet konvergens. Bár a sárga széria egyik lapján szerepelt a tesztben kért határérték (lásd a 3. ábrán), egyértelművé vált, hogy 6. feladat helyes megoldásához ez kevésnek bizonyult. Sikerült azonban feltárni egy olyan problémát, amelyre a jövőben nagyobb figyelmet kell fordítani.



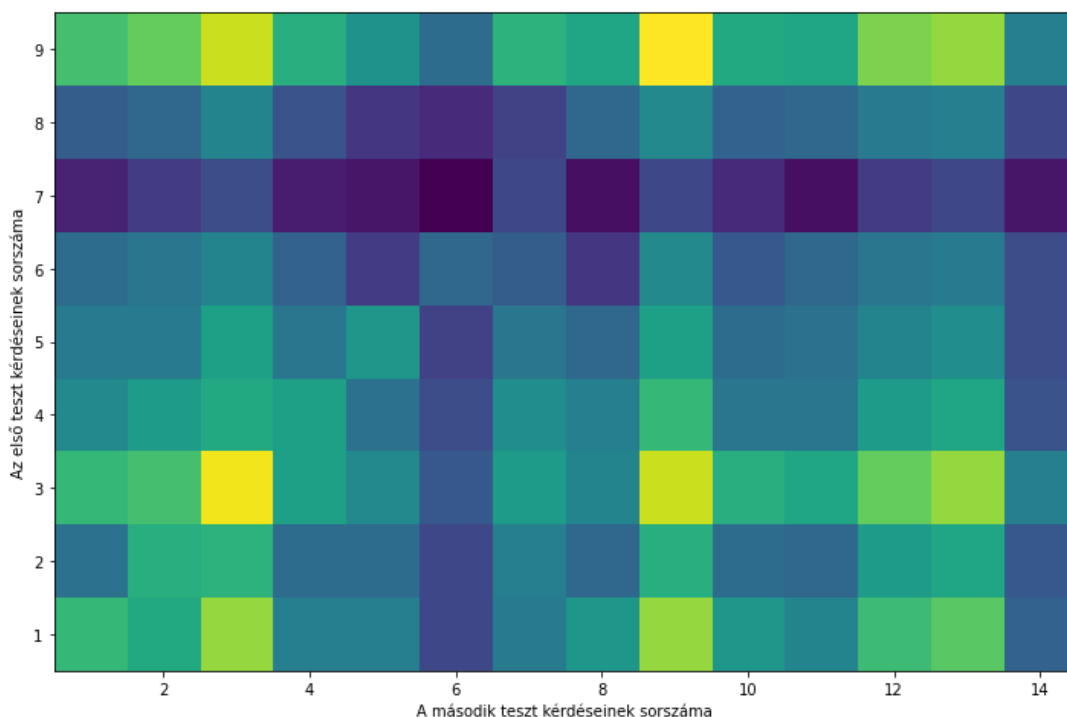
9. ábra. A második teszt feladatainak átlagpontszáma



10. ábra. Kereszt-korrelációs mátrixok a második teszt helyesen, illetve rosszul megoldott feladataira

Megvizsgáltuk, hogy a helyes válaszok között milyen kapcsolat tárható fel. A 10. ábra bal oldali kereszt-korrelációs mátrixa egyértelműen mutatja, hogy aki a 3. feladatot megoldotta, annak a 9. feladatot is sikerült helyesen megválaszolni, valamint további négy feladatra is (1.,2.,12.,13.) többségük jó megoldást adott. Akinek a 6. feladatot nem sikerült megoldani, annak általában további hét feladat megoldásával is gondjai voltak, ezt látjuk a 10. ábra jobb oldali kereszt-korrelációs mátrixán. A két teszt

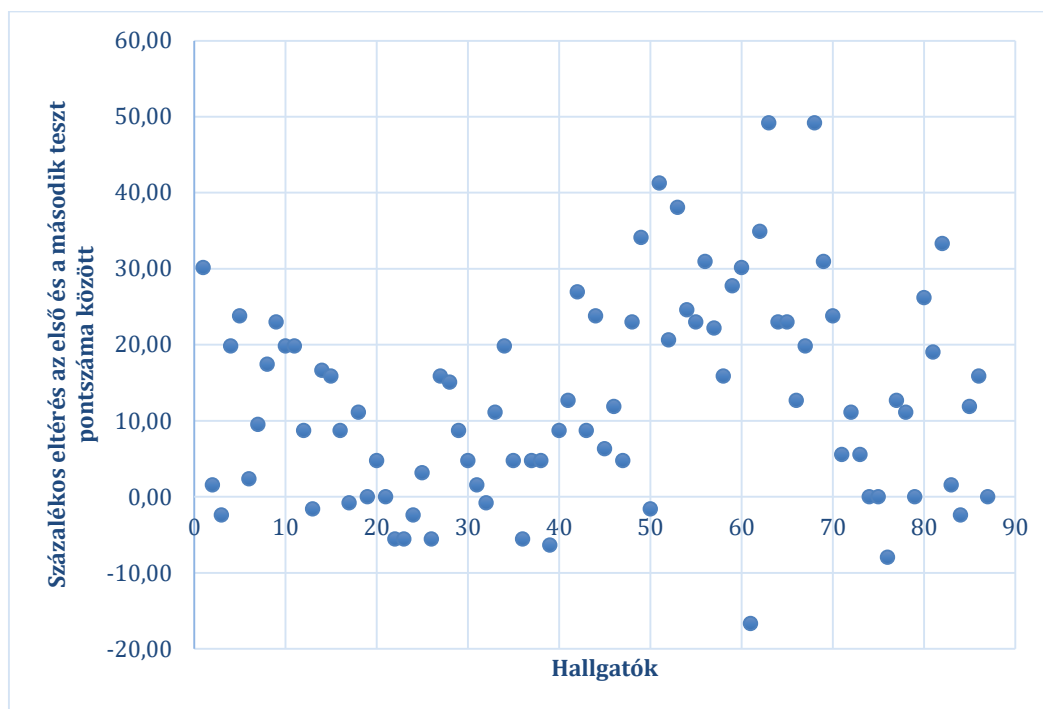
feladataira is elkészítettük a kereszt-korrelációs mátrixot (11. ábra). Az első teszt 9, míg a második teszt 14 kérdést tartalmazott, ezért ez a mátrix nem négyzetes.



11. ábra. A tesztek feladatainak kereszt-korrelációs mátrixa

Mindkét teszt harmadik feladata egyszerű nullsorozat határértékére kérdezett rá. A sárga négyzet mutatja, hogy itt nagyon erős összefüggés mutatkozik, 62-en választották meg helyesen mindkét kérdést. Ilyen erős kapcsolat mindkét teszt kilencedik kérdése között áll még fenn, itt azonban nem egyezik a határérték típusa, amelyre a feladatok rákérdeznek. Az első teszt 9. feladata az Euler-szám definiáló határértékének ismeretében azonnal megválaszolható, míg a második teszt 9. feladata lényegesen nehezebb, számolást igénylő kérdés, amely irracionális kifejezést tartalmazó törtfüggvény határértékéhez kapcsolódik. Érdekes, hogy ennek ellenére 63 hallgató mindkét kérdésre helyes választ adott. A mátrix túlnyomórészt világos tónusú, ami arra utal, hogy az elméleti alapozás során megszerzett, majd a didaktikai játékkal elmélyített ismereteket jól használták a résztvevők a tesztek kitöltésekor, sok helyes válasz született, a második teszt komplexebb feladatai sem okoztak számottevő problémát a projektben részt vevő hallgatóknak. Ennél az ábrázolási módnál is egyértelműen kiderült, hogy az első teszt esetén a 7. és 8. kérdés, míg a második tesztnél a 6. és 14. feladat okozta a legnagyobb nehézséget a tesztek kitöltőinek, ahogy ezt már korábban is láttuk (5. ábra, 9. ábra).

Az összesített adatok egyértelműen bizonyítják a LimEszelős kártyajátékkal végzett tanulás eredményességét. Öt hallgatónak úgy az első, mind a második tesztje hibátlan volt, náluk nincs mérhető változás. A 87 résztvevőből 67 hallgató esetében mutatható ki javulás, ha összehasonlítjuk az első és a második tesztek eredményeit. A százalékos különbségeket a 11. ábrán látható pontdiagram szemlélteti. Szignifikáns változás, azaz 20%-os vagy annál nagyobb teljesítményben bekövetkező javulás 31 résztvevőnél volt.



12. ábra. Az első és a második teszt százalékos eltérésének pontdiagramja.

4.2. A kérdőív analitikája

A legelterjedtebb közvélemény-kutatási eszközök egyike a kérdőív, amelyben a kérdező és a válaszadó közvetve, a kérdőív szövegén keresztül kommunikál egymással. Úgy gondoltuk, hogy a véleményező kérdőív kitöltése már nem fér bele abba az időkeretbe, amit a LimEszelős játékra a gyakorlati órából elkülönítettünk, ezért online formában tölthették ki a résztvevők. A Google Tantermen keresztül elérhető kérdőív az alábbi tíz kérdést tartalmazta:

1. Mennyire érdeklődik a játékalapú oktatási módszerek iránt?
2. Mennyire tűnt játéknak a tanulási folyamat a LimEszelős játékkal?
3. Mennyire találta könnyűnek az 1. teszt kérdéseit?
4. Mennyire tetszett a LimEszelős játék?
5. Mennyire találta könnyűnek a 2. teszt kérdéseit?
6. A 2. teszt megírásakor mennyiben segített a két teszt közötti tanulási fázis?
7. Örömmel venné-e, ha az analízis gyakorlatokon lehetőség nyílna játszani a LimEszelős kártyajátékkal?
8. Ha a szűkös időkeret miatt a gyakorlaton nincs mód kipróbálni a játékot, külön időpontban hajlandó lenne-e a játék kedvéért bejönni az egyetemre?
9. Ön szerint a kártyajáték alkalmazásával könnyebb elsajátítani a határérték kiszámításának technikáját?
10. A matematikatanítás más területén is hasznosnak tartaná hasonló játékok bevezetését?

Minden résztvevő kitöltötte és visszaküldte az értékelő kérdőívet, továbbá valamennyi feltett kérdésre választ adott. A kérdésekre 1-től 5-ig adtak értékelést (1 = egyáltalán nem, 2 = egy kicsit, 3 = közepesen, 4 = az átlagosnál jobban, 5 = határozottan). Az összegyűjtött adatok alátámasztják a Z generációs hallgatók játék iránti erős igényét, ugyanis a játékalapú tanulási módszerek iránt a megkérdezettek 79,31%-a érdeklődik az átlagosnál jobban vagy határozottan. A 2. kérdésre a válaszadók 71,26%-a adott legalább 4-es értéket, ami azt jelenti, hogy valódi játékelményel gazdagodtak a játékalapú tanulás során.

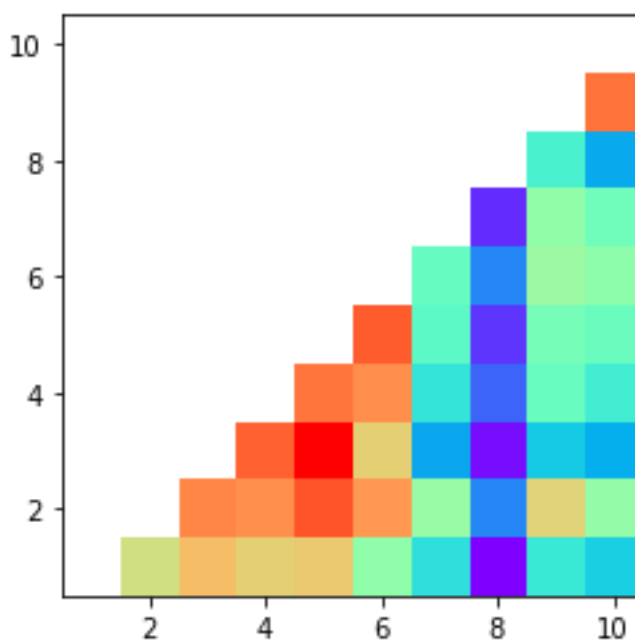
A kérdésekre kapott válaszok között fennálló kapcsolat milyenségének és irányának meghatározására valamennyi lehetséges kérdéspár esetén generáltunk a Jupyter Notebook keretrendszerben egy-egy gyakoriságokat tartalmazó mátrixot, így 45 darab 5*5-ös mátrix, valamint a kiszámított korreláció alapján kerestük az összefüggéseket. A 12. ábrán egy ilyen mátrixot látunk.

A korreláció segítségével az egyes változók együtt mozgásáról kaptunk képet, nem pedig az okozati összefüggésről. Az első és a második kérdésre adott válaszok esetén a korreláció 0,66, ami közepesnél erősebb kapcsolatra utal. Magasabb, 0,77 korrelációs értéket kaptunk, amikor a második és a harmadik kérdésre adott értékeket vetettük össze, tehát aki könnyűnek találta az első teszt kérdéseit, az inkább érezte játéknak a LimEszelős játékkal való tanulást. Kicsivel kevesebb, 0,71 a számított korreláció az első és a harmadik kérdésre adott értékek között.

Question 2 vs Question 5					
	1	2	3	4	5
1	5	0	0	0	0
2	0	3	1	1	0
3	0	2	7	4	0
4	0	3	5	12	2
5	0	0	2	12	28
corr: 0.8099357561009335					

13. ábra. A 2. és az 5. kérdésre adott értékek és a kiszámított korreláció

A második és a negyedik kérdés viszonylatában a korreláció 0,75, vagyis akiknek játéknak tűnt a tanulás, azoknak tetszett a LimEszelős játék. A 0,8 feletti korreláció erős kapcsolatra utal. A 2. és 5. kérdések között (lásd 12. ábra) erős kapcsolat mutatkozott. Aki játéknak érezte a tanulást, annak a 2. teszt könnyűnek tűnt. Erős kapcsolatot a 3. és 4., a 3. és 5., az 5. és 6., valamint a 9. és a 10. kérdés között tapasztaltunk, ahogyan ezt a 13. ábra kereszt-korrelációs mátrixa mutatja. A legerősebb kapcsolatot a piros, a leggyengébbet a kék szín érzékelteti. Esetünkben a legerősebb kapcsolat a 3. és az 5. kérdések között áll fenn. A két teszt között nem éreztek nehézségben különbséget a hallgatók, annak ellenére, hogy a második teszt több kérdést tartalmazott és valamennyi feladatát csak számolással lehetett helyesen megoldani. Az 5. és 6. kérdések erős korrelációja azt szemlélteti, hogy aki könnyűnek érezte a 2. tesztet, az úgy vélte, hogy segített a tanulási fázis, amely a LimEszelős játék felhasználásával valósult meg. A 3. és a 4. kérdésre adott válaszok egyértelműen azt mutatják, hogy jobban tetszett a játékalapú tanulás azoknak a hallgatóknak, akiknek könnyűnek tűnt az 1. teszt. Az utolsó két kérdés erős korrelációja pedig arra enged következtetni, hogy a projekt résztvevői szerint, ha a határértékszámítás elsajátításához eredményesen használható didaktikai játék, akkor a matematika oktatásának egyéb területein is.



14. ábra. A kérdőívre adott válaszok kereszt-korrelációs mátrixa

5. ÖSSZEFOGLALÁS

Cikkünkben a LimEszelős projekt első két évének eredményeiről számoltunk be. Az első féléves matematika tantárgyak szinte minden felsőoktatási intézményben tartalmazzák a valós számsorozatok témakört, amelyben a határértékszámítás központi helyen szerepel. A LimEszelős elnevezésű didaktikai játékot a határérték kiszámításának gyakorlására, a nevezetes határértékek fejszámolás során történő alkalmazására dolgoztuk ki. A kontaktórákba integrált játékos tanulást megvalósító oktatási kísérletben 87 hallgató próbálhatta ki ezt a játékot. Mérési eredményeinket és a véleményező kérdőív válaszait egyaránt bemutattuk és elemeztük. Tapasztalataink szerint a hallgatók szívesen vettek részt a jó hangulatú közös játékban, ami azon felül, hogy játékelményt adott számukra, a tantárgyi tudásukat is erősítette, fejlesztette.

A felsőoktatás matematika tanításának is követnie kell azt az irányvonalat, amellyel az optimális tudásátadás sikerre vihető. Úgy gondoljuk, hogy ehhez a didaktikai játékok szervesen hozzátartoznak. A rendelkezésre álló lehetőségek számát gyarapítani célszerű, hogy minél szélesebb palettáról válogathassunk az oktatás tervezésekor. Ehhez egy új lehetőséget ad a LimEszelős. A játék paklijával nemcsak a gyakorlaton játszhatnak a hallgatók. Az oktató által felügyelt órai játékon felül érdemes lenne lehetőséget biztosítani a hallgatóknak arra, hogy a felkészülés során is tudjanak játszani. A játék teszteléséhez három paklit rendeltünk meg a nyomdából, így jelenleg maximum 30 főből álló tanulói csoporttal tudunk játszani. Egyetlen oktató felügyelete mellett nagyobb létszám egyébként sem indokolt. Tervezzük további paklik megrendelését is, amelyekkel az otthoni tanulást tudjuk majd támogatni, valamint a LimEszelős játék online verziójának elkészítését is megkezdtük.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Jelen publikáció/kutatás az Innovációs Technológiai Minisztérium, a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Hivatal által támogatott NLP-08 azonosító számú *Társadalmi Innovációs Nemzeti Laboratórium* című projekt keretében jött létre.

IRODALOM

- [1] Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (3), pp. 217–233. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9128-2>
- [2] Roh, K. H. (2010). How to help students conceptualize the rigorous definition of the limit of a sequence. *PRIMUS*, 20 (6), pp. 473–487. <https://doi.org/10.1080/10511970802441704>
- [3] Tall, D. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151–169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- [4] Kidron, I. and Zehavi, N. (2002). The role of animation in teaching the limit concept. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 9, pp. 205–227.
- [5] Flores, A. and Park, J. (2016). Students' guided reinvention of definition of limit of a sequence with interactive technology. *Contemporary Issues in Technology & Teacher Education*, 16 (2), <https://citejournal.org/volume-16/issue-2-16/mathematics/students-guided-reinvention-of-definition-of-limit-of-a-sequence-with-interactive-technology>
- [6] Cory, B. and Garofalo, J. (2011). Using dynamic sketches to enhance preservice secondary mathematics teachers' understanding of limits of sequences. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42 (1), pp. 68–100. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.42.1.0065>
- [7] Watts, E. (2019, February 13). University students who play calculus video game score higher on exams. *Texas A&M Today*. <https://today.tamu.edu/2019/02/13/university-students-who-play-calculus-video-game-score-higher-on-exams/>
- [8] Bősze B. és Devosa I. (2021). A digitális játékok oktatásban történő alkalmazásának lehetőségei. *Gradus*, 8 (1), pp. 80–89. <https://doi.org/10.47833/2021.1.ART.005>
- [9] Mohr, K. A. J. and Mohr, E. S. (2017). Understanding generation Z students to promote a contemporary learning environment. *Journal on Empowering Teaching Excellence*, 1 (1), Article 9. <https://doi.org/10.15142/T3M05T>
- [10] Hyrynsalmi, S., Smed, J. and Kimppa, K. K. (2017). The dark side of gamification: How we should stop worrying and study also the negative impacts of bringing game design elements to everywhere. *Proceedings of the 1st International GamiFIN Conference*, pp. 96–104. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08234-9_138-1
- [11] Schäffer, B. (2015). *A legifjabb titánok*. Book Kiadó Kft., Budapest.
- [12] McGonigal, J. (2011). *Reality is broken: Why games make us better and how they can change the world*. Penguin Press, New York.

- [13] Kordaki, M. and Gousiou, A. (2017). Digital card games in education: A ten year systematic review. *Computers & Education*, 109, pp. 22–161. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.02.011>
- [14] Szilágyi, S. and Körei, A. (2021). “LimStorm” – A Didactic Card Game for Collaborative Math Learning for Gen Z Students. In: Auer, M. E., Rüttmann, T. (eds.). *Educating Engineers for Future Industrial Revolutions*. ICL 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing (vol 1328). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-68198-2_42
- [15] Dudás M., Lengyelné Szilágyi Sz. és Piller I. (2019). Az Ékkővadászok elnevezésű matematikai készségfejlesztő kártyajátékok létrehozását támogató alkalmazás bemutatása. *Gradus*, 6 (4), pp. 17–27.
- [16] Körei, A., Szilágyi, S. and Török, Zs. (2021). Integrating didactic games in higher education: Benefits and challenges, *Teaching Mathematics and Computer Science*, 19 (1), pp. 1–15. <https://doi.org/10.5485/TMCS.2021.0517>
- [17] Körei A. és Szilágyi Sz. (2020). Didaktikai játékok integrálásának lehetőségei a felsőoktatásban. *Multidiszciplináris Tudományok*, 10 (3), pp. 221–232. <https://doi.org/10.35925/j.multi.2020.3.27>