

EGY MÓDSZER A RÉSZLEGESEN KAPCSOLT KOMPOZIT RUDAK LEHAJLÁSÁNAK ÉS IGÉNYBEVÉTELEINEK SZÁMÍTÁSÁRA

Lengyel Ákos József¹, Ecsedi István²

¹PhD hallgató, ²egyetemi tanár

Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék,

Cím: 3515 Miskolc-Egyetemváros

e-mail: mechlen@uni-miskolc.hu, mechecs@uni-miskolc.hu

Összefoglalás

A tanulmány több rétegű, részlegesen kapcsolt rugalmas anyagú kompozit rudak statikai feladatainak megoldásával foglalkozik. A kidolgozott módszer szabadon felfekvő rudakra vonatkozik, vagyis a szélső keresztmetszetek elfordulását semmi sem gátolja, de a középvonalra merőlegesen a szélső keresztmetszetek elmozdulása nem lehetséges (simply supported beam). A rúdkomponensek kapcsolata normál irányban tökéletes, de axiális irányban, a terhelésre merőlegesen az egyes rétegek érintkezésénél szakadás lehetséges. A rétegek relatív elcsúszását a csúszás mértékétől függő, axiális irányú nyíróerő (kapcsolati nyíróerő) gátolja. A kapcsolati nyíróerő arányos a rétegek relatív elcsúszásával. A tanulmány két példán szemlélteti a kidolgozott módszert. Mindkét példában három rétegű rudat vizsgálunk.

Kulcsszavak: többrétegű kompozit rúd, részlegesen kapcsolt, szabadon felfekvő

Abstract

This paper deals with the solution of some statics problems concerning multi-layered beams with imperfect shear connections. The connections between the beam components in normal direction are perfect but the axial displacements on the common boundary surfaces of the layers may have jump. The slip is impeded by contact shear force acting in axial direction. The contact shear force is proportional to the interlayer slip. Two examples illustrate the application of the presented method. Both examples are related to three-layer beams.

Keywords: composite multilayer beam, imperfect shear connection, simply supported

1. Bevezetés

Rétegezett szerkezetű rugalmas kompozit rudakból felépített szerkezeti elemeket az ipar számos területén használnak, emiatt igen fontos mérnöki feladat azok mechanikai vizsgálata. A rudat alkotó rétegek egymáshoz történő kapcsolására különböző kapcsoló elemeket használnak, mint például csavarokat, szegecseket, csapokat. Sok esetben az említett kapcsoló elemek megengedik az általuk összekapcsolt rétegek egymáshoz viszonyított kis mértékű elcsúszását. Rugalmas kapcsolatot feltételezve az úgynevezett kapcsolati nyíróerő arányos a relatív elcsúszással. Lineárisan rugalmas részlegesen kapcsolt kétrétegű rudak statikai és dinamikai problémáival számos tanulmány foglalkozik [1-9]. E

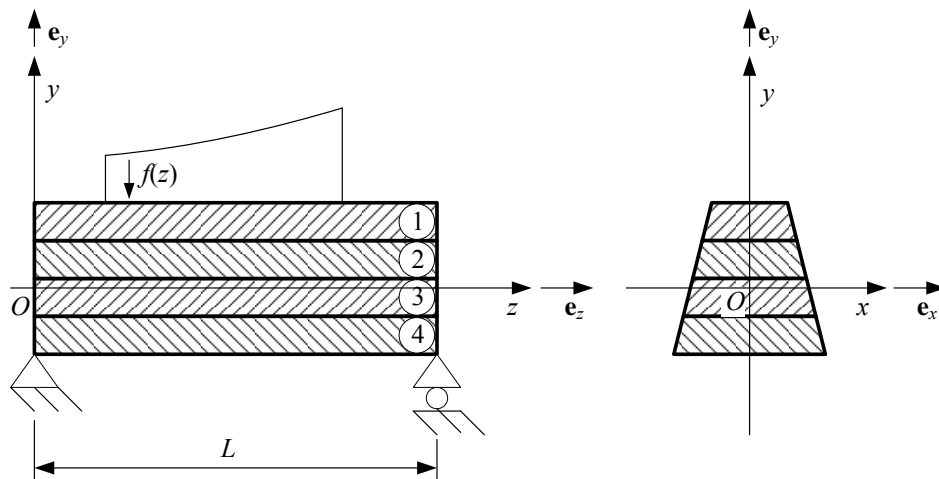
tanulmány többrétegű részlegesen kapcsolt, szabadon felfekvő kompozit rudak statikai feladatainak megoldására alkalmas módszert ismertet. Feltevés szerint minden rúdkomponens követi az Euler-Bernoulli rúdelmélet előírásait, továbbá a terhelés irányában az érintkező rétegek kapcsolata tökéletes, szakadás csak a tengelyirányú elmozdulásokban lehetséges. A többrétegű rugalmas anyagú kompozit rudat és terhelését az 1. ábra szemlélteti. Az yz sík a rúd szimmetriasíkja, amely egyben az alkalmazott terheléseket és megtámasztási kényszereket is tartalmazza. Jelölje B_i az i jelű rúdkomponenst, melynek keresztmetszete A_i és anyagának rugalmassági modulusa E_i . Nyilván $B_i = A_i \times [0, L]$. A feladat egyenleteinek felírásához az $Oxyz$ koordináta-rendszert használtuk, ahol z a rúd tengelyét jelöli, ennek következtében a rúdkeresztmetszetek síkjai az xy síkkal párhuzamosak. A z tengely tetszőleges helyzetű, ennek megfelelően az O pont a balszélső keresztmetszeti sík tetszőleges pontja lehet. Feltevés szerint a B_i rúdkomponensek mindegyike követi az Euler-Bernoulli rúdelméletben megfogalmazott követelményeket [10, 11]. Az $Oxyz$ koordináta-rendszerben a többrétegű rúd elmozdulás mezeje az alábbi alakban adható meg:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = u(x, y, z)\mathbf{e}_x + v(x, y, z)\mathbf{e}_y + w(x, y, z)\mathbf{e}_z, \quad (1)$$

ahol

$$u = 0, \quad v = v(z), \quad (x, y, z) \in B_i, \quad (2)$$

$$w(x, y, z) = w_i(z) - y \frac{dv}{dz}, \quad (x, y, z) \in B_i. \quad (3)$$



1. ábra. Rétegezett felépítésű részlegesen kapcsolt kompozit rúd.

A lineáris rugalmasságtan geometriai egyenletének az alkalmazásával azt kapjuk, hogy [10]

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \quad (4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw_i}{dz} - y \frac{d^2v}{dz^2}, \quad (x, y, z) \in B_i. \quad (5)$$

Az ε_z fajlagos nyúláshoz tartozó σ_z normál feszültségre a

$$\sigma_z = E_i \left(\frac{dw_i}{dz} - y \frac{d^2v}{dz^2} \right), \quad (x, y, z) \in B_i \quad (6)$$

eredmény adódik a Hooke-törvény alapján. Az A_i rúdkeresztmetszet igénybevétele húzásnyomás és hajlítás, így az N_i rúderő és M_i hajlító nyomaték értéke az alábbi

$$N_i = \int_{A_i} \sigma_z dA = E_i A_i \left(\frac{dw_i}{dz} - c_i \frac{d^2v}{dz^2} \right), \quad (7)$$

$$M_i = \int_{A_i} y \sigma_z dA = E_i A_i c_i \frac{dw_i}{dz} - E_i I_i \frac{d^2v}{dz^2}. \quad (8)$$

A fenti egyenletekben

$$c_i = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} y dA, \quad I_i = \int_{A_i} y^2 dA. \quad (9)$$

A rúdra csak y irányú terhelés működik, ennek megfelelően a teljes $A = \cup A_i$ rúdkeresztmetszetet terhelő rúderő zérus, azaz

$$N = \sum_i N_i = \sum_i E_i A_i \frac{dw_i}{dz} - Q \frac{d^2v}{dz^2} = 0, \quad (10)$$

ahol

$$Q = \sum_i E_i A_i c_i. \quad (11)$$

A teljes A rúdkeresztmetszeten működő hajlítónyomaték értéke

$$M = \sum_i M_i = \sum_i E_i A_i c_i \frac{dw_i}{dz} - I \frac{d^2v}{dz^2}, \quad (12)$$

ahol

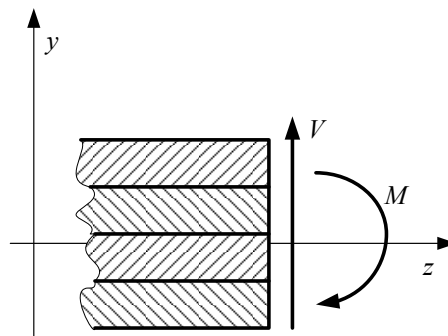
$$I = \sum_i E_i I_i. \quad (13)$$

A teljes keresztmetszetet terhelő nyíróerőt V jelöli. Ismeretes, hogy [10, 11]

$$V = \frac{dM}{dz}. \quad (14)$$

A 2. ábra szemlélteti a pozitív előjelű hajlító és nyíró igénybevételt. A (12) és (13) egyenletekből az következik, hogy

$$V = \sum_i E_i A_i c_i \frac{d^2 w_i}{dz^2} - I \frac{d^3 v}{dz^3}. \quad (15)$$



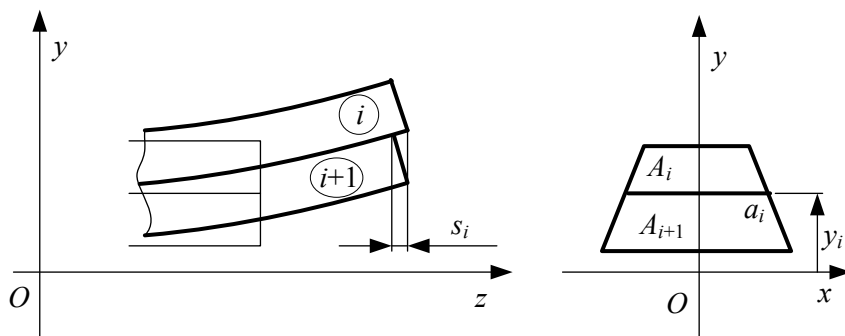
2. ábra. Pozitív előjelű igénybevételek.

Az egyes rétegek nem tökéletes kapcsolódását a szlip jellemzi. Jelölje az A_i és A_{i+1} keresztmetszetek közös határvonalát a_i (3. ábra), és legyen $b_i = a_i \times (0, L)$. Az i és $i+1$ jelű egymással kapcsolódó rúdelemhez rendelt szlip elmozdulás (s) és kapcsolati nyíró erő (T) az alábbi módon adható meg (3. ábra) [2, 4, 7]:

$$s_i(z) = w_i(z) - w_{i+1}(z), \quad (16)$$

$$T(z) = -k_i s_i(z) = k_i (w_{i+1}(z) - w_i(z)). \quad (17)$$

A (16) egyenlet felírásánál felhasználtuk a (3) egyenletet, továbbá a (17) egyenletben szereplő k_i állandó a nem tökéletes kapcsolat nyírási merevségét jelöli.



3. ábra. A szlip értelmezése.

2. A statikai feladathoz kapcsolódó kerületérték feladat megfogalmazása

Az i jelű réteg egyensúlyából következik a rétegre működő axiális erők összegének eltűnése, amely az alábbi egyenlettel írható le:

$$\frac{dN_i}{dz} + k_{i-1}(w_{i-1} - w_i) + k_i(w_{i+1} - w_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

$$k_0 = k_n = 0. \quad (19)$$

A fenti egyenlet részletesen kifejtve a következő alakba írható:

$$A_i E_i \frac{d^2 w_i}{dz^2} - A_i E_i c_i \frac{d^3 v}{dz^3} + k_{i-1} w_{i-1} - (k_{i-1} + k_i) w_i + k_i w_{i+1} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

A (20) egyenletrendszer n egyenlete $n+1$ darab ismeretlen függvényt tartalmaz. E függvények $w_i = w_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $v = v(z)$. A hiányzó egyenletet a (15) képlet adja, amelyben $V = V(z)$ függvényt adottnak tekintjük. Tekintettel arra, hogy a tartó szabadon felfekvő, egyszerű statikai számítással az alkalmazott terhelések ismeretében $V = V(z)$ meghatározható. Legyen

$$\mathbf{C}_1 = \langle A_1 E_1 \quad A_2 E_2 \quad \dots \quad A_n E_n \quad 0 \rangle \quad (21)$$

előírással definiált diagonál mátrix. A \mathbf{C}_2 kodiagonális mátrixot az alábbi képlet értelmezi

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 & 0 & \dots & 0 \\ k_1 & -(k_1 + k_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & -(k_2 + k_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & k_{n-1} & -k_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

A \mathbf{C}_3 mátrix utolsó sora és oszlopa tartalmaz csak zérustól különböző elemeket:

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_1 A_1 E_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -c_2 A_2 E_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_n A_n E_n \\ c_1 A_1 E_1 & c_2 A_2 E_2 & c_3 A_3 E_3 & \dots & c_n A_n E_n & -I \end{bmatrix} \quad (23)$$

A (21-23) képletekkel definiált mátrixok felhasználásával a (15) és (20) egyenletek az alábbi mátrix differenciál-egyenletbe tömöríthetők:

$$(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_3) \frac{d^2 \mathbf{X}}{dz^2} + \mathbf{C}_2 \mathbf{X} = \mathbf{Y}, \quad (24)$$

ahol

$$\mathbf{X}^T = \left[w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n \quad \frac{dv}{dz} \right], \quad (25)$$

$$\mathbf{Y}^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad V]. \quad (26)$$

Megjegyzendő, hogy a többrétegű nem tökéletes nyírási kapcsolattal rendelkező kompozit rúd szabadon felfekvő (simply supported) megtámasztású, továbbá a rúd szélső keresztmetszeteit axiális irányú erő nem terheli, ebből az következik, hogy a

$$v = 0, \quad M = 0, \quad N_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (27)$$

peremfeltételek érvényesek a $z = 0$ és a $z = L$ koordinátákkal kijelölt támaszoknál.

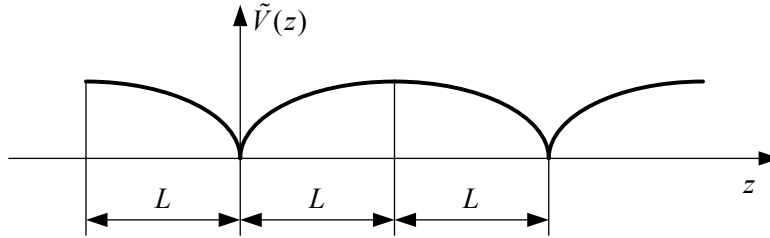
3. Megoldás Fourier-sorral

A $V = V(z)$ függvényt teljes számegegyenesre kiterjesztjük. A kiterjesztett $\tilde{V} = \tilde{V}(z)$ függvény értelmezése az alábbi (4. ábra)

$$\tilde{V}(z) = V(z), \quad 0 \leq z \leq L, \quad (28)$$

$$\tilde{V}(z) = V(2L - z), \quad L \leq z \leq 2L, \quad (29)$$

$$\tilde{V}(z) = \tilde{V}(z + 2pL), \quad -\infty \leq z \leq \infty, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (30)$$



4. ábra. A $\tilde{V} = \tilde{V}(z)$ függvény grafikonja.

A $\tilde{V} = \tilde{V}(z)$ függvény grafikonját a 4. ábra szemlélteti. A $\tilde{V} = \tilde{V}(z)$ definíciójából következik, hogy páros, $2L$ szerint periodikus függvény, és mechanikai jelentéséből még az is következik, hogy Riemann szerint integrálható a számsíkon bármely véges intervalluma felett. E függvény Fourier-sorba fejthető. Ennek a függvénynek a Fourier-sora

$$\tilde{V}(z) = \frac{V_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} V_j \cos j \frac{\pi}{L} z, \quad (31)$$

ahol

$$V_0 = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \tilde{V}(z) dz, \quad (32)$$

$$V_j = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \tilde{V}(z) \cos j \frac{\pi}{L} z dz. \quad (33)$$

Tekintettel a (27) peremfeltételekre, az ismeretlen $w_i = w_i(z)$ és $v = v(z)$ függvényeket az alábbi trigonometrikus polinomokkal reprezentáljuk:

$$w_i(z) = \sum_{j=1}^q w_{ij} \cos j \frac{\pi}{L} z, \quad (34)$$

$$v(z) = \sum_{j=1}^q v_j \sin j \frac{\pi}{L} z. \quad (35)$$

Könnyen belátható, hogy V_0 minden statikailag lehetséges keresztmetszeti nyíróerő függvény esetén zérus, hiszen

$$\int_0^{2L} \tilde{V}(z) dz = 2 \int_0^L V(z) dz = 2 \int_0^L \frac{dM}{dz} dz = 2(M(L) - M(0)) = 0. \quad (36)$$

A (35) egyenletből az következik, hogy

$$\frac{dv}{dz} = \sum_{j=1}^q j \frac{\pi}{L} v_j \cos j \frac{\pi}{L} z = \sum_{j=1}^q \tilde{v}_j \cos j \frac{\pi}{L} z. \quad (37)$$

Nyilván

$$v_j = \frac{\tilde{v}_j L}{j\pi}, \quad (j = 1, 2, \dots, q). \quad (38)$$

Legyen

$$\mathbf{x}_j^T = [w_{1j} \quad w_{2j} \quad \dots \quad w_{nj} \quad \tilde{v}_j], \quad (39)$$

$$\mathbf{y}_j^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad V_j], \quad (40)$$

$$\mathbf{C}_j = \left\{ -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_3) + \mathbf{C}_2 \right\}, \quad (j = 1, 2, \dots, q). \quad (41)$$

A (24) mátrix differenciálegyenletből az következik, hogy

$$\mathbf{C}_j \mathbf{x}_j = \mathbf{y}_j \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad (42)$$

vagyis

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{C}_j^{-1} \mathbf{y}_j, \quad (j = 1, 2, \dots, q). \quad (43)$$

A (38) és (43) egyenletek alkalmazásával közvetlenül megkapjuk a (34) és (35) trigonometrikus polinomokban szereplő együtthatókat, amelyek segítségével a v lehajlás és a w_i ($i = 1, 2, \dots, n$) axiális elmozdulás előállítható. A v és w_i ismeretében az $N_i = N_i(z)$ igénybevételeket közvetlenül tudjuk számítani a (8) képlet alkalmazásával. A (12) képlet pedig a bemutatott közelítő módszer pontosságának ellenőrzésére használható, mint hiba indikátor, hiszen a statikailag határozott megtámasztású tartó hajlító nyomaték függvénye a terhelés ismeretében közvetlenül előállítható.

4. Példák

Mindkét számpéldában az 5. ábra szemlélteti a rúd keresztmetszetét, és az alábbi adatok is megegyeznek:

$$h_1 = 0.02 \text{ m}, h_2 = 0.04 \text{ m}, h_3 = 0.03 \text{ m}, b = 0.03 \text{ m}, E_1 = 10^{10} \text{ Pa}, E_2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa},$$

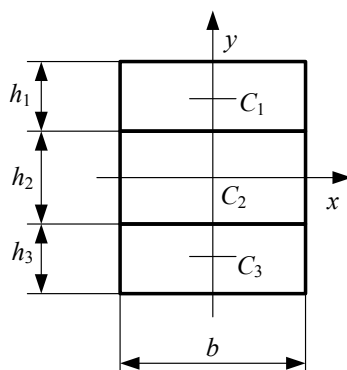
$$E_3 = 0.5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, k_1 = 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, k_2 = 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, L = 2 \text{ m}, q = 50.$$

Evidens, hogy jelen esetben

$$A_1 = h_1 b = 0.006 \text{ m}^2, A_2 = 0.0012 \text{ m}^2, A_3 = 0.0009 \text{ m}^2, c_1 = 0.03 \text{ m}, c_2 = 0,$$

$$c_3 = -0.035 \text{ m}, I = \left\{ \frac{1}{12} (E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3 + E_3 h_3^3) + E_1 h_1 c_1^2 + E_2 h_2 c_2^2 + E_3 h_3 c_3^2 \right\} b = 38102.875 \text{ Nm}^2,$$

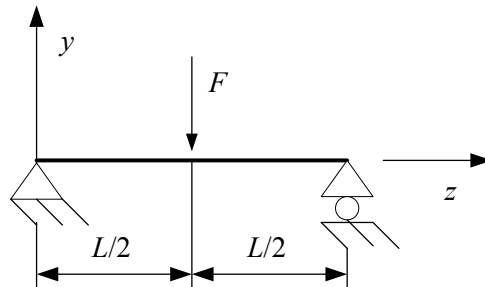
$$Q = E_1 h_1 c_1 + E_2 h_2 c_2 + E_3 h_3 c_3 = 22500 \text{ Nm}.$$



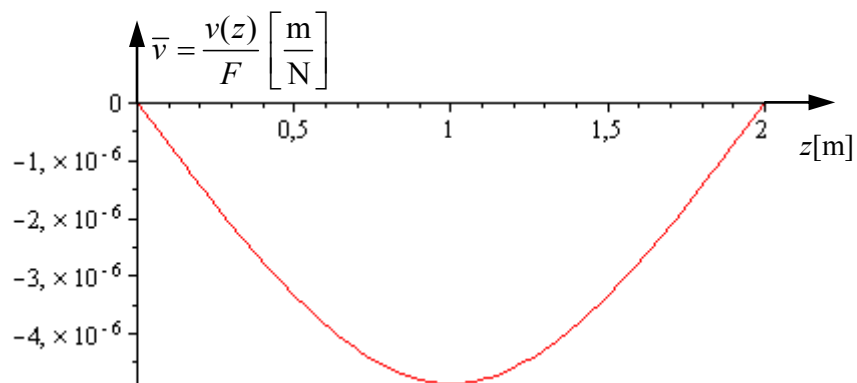
5. ábra. Háromrétegű kompozit rúd keresztmetszete.

4.1. Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó.

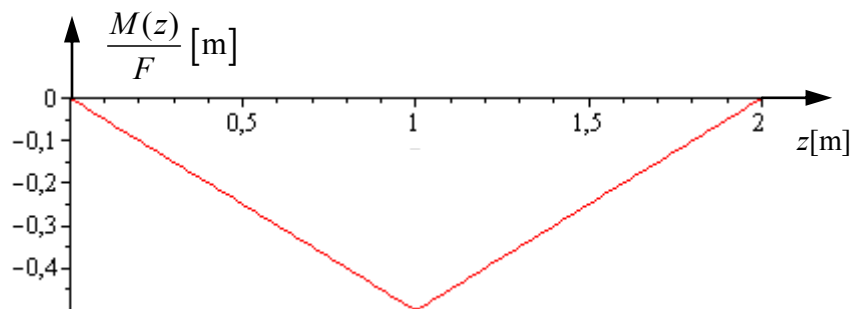
Az F koncentrált erő támadáspontjának $L/2$ a z koordinátája (6. ábra). A 7. ábra szemlélteti a $v = v(z)$ lehajlás függvényt, a 9. ábra pedig a $w_i = w_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) függvényeket. Az $N_i = N_i(z)$ igénybevételeket a 10. ábra, a (12) képlet alkalmazásával nyert hajlító nyomatéki függvényt pedig a 8. ábra mutatja.



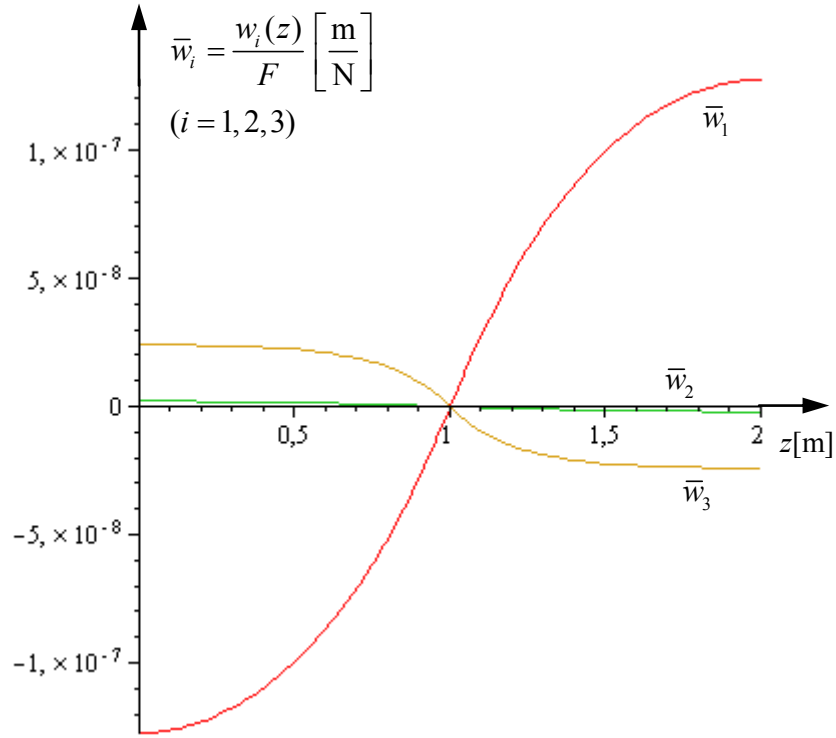
6. ábra. Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó.



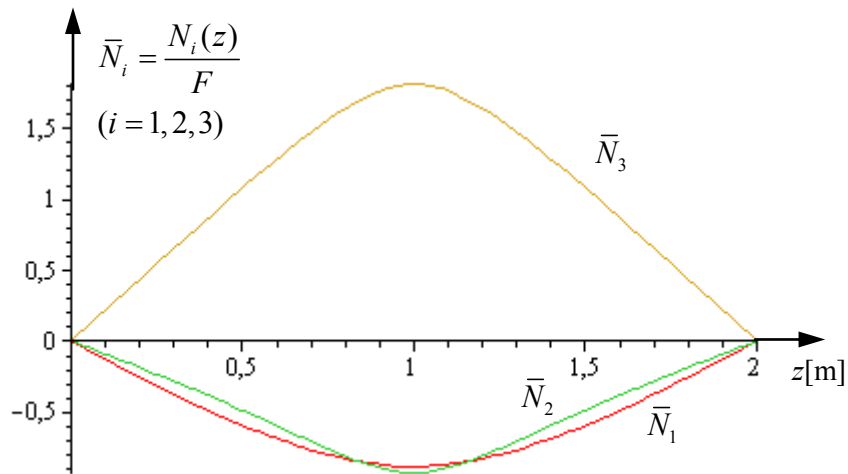
7. ábra. Lehajlás függvény.



8. ábra. Hajlítónyomatéki függvény.



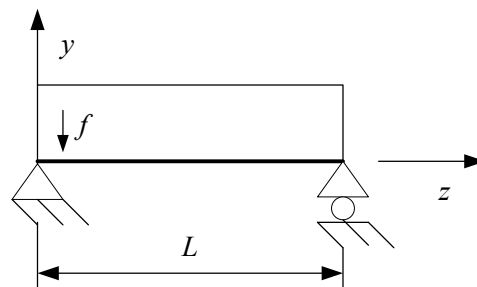
9. ábra. „Axiális” elmozdulások grafikonja.



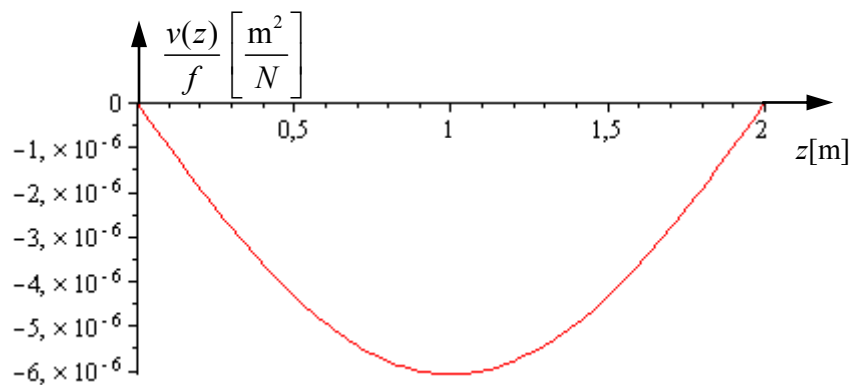
10. ábra. Rúderők grafikonja.

4.2. Teljes hosszában egyenletesen megoszló erőrendszerrel terhelt kéttámaszú tartó.

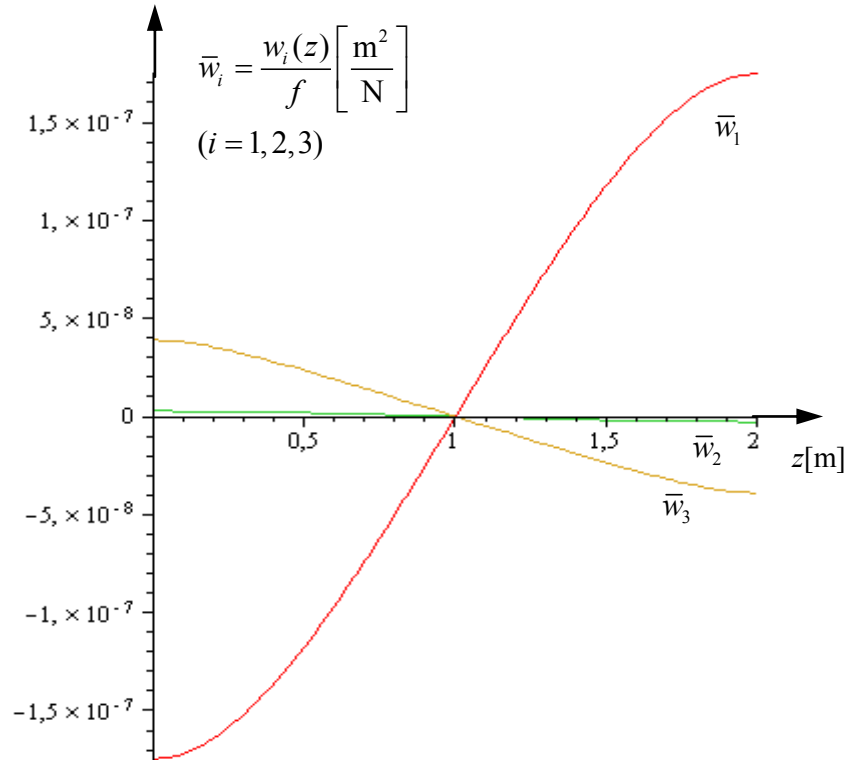
Az egyenletesen megoszló erőrendszerrel terhelt szabadon felfekvő tartót a 11. ábra szemlélteti. A $v = v(z)$ lehajlás és $w_i = w_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) elmozdulások grafikonjai a 12 és 13. ábrákon láthatóak. Az $N_i = N_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) igénybevételi függvényeket és a (12) képlet alapján meghatározható hajlítónyomatéki függvényt pedig a 14-15. ábrák szemléltetik.



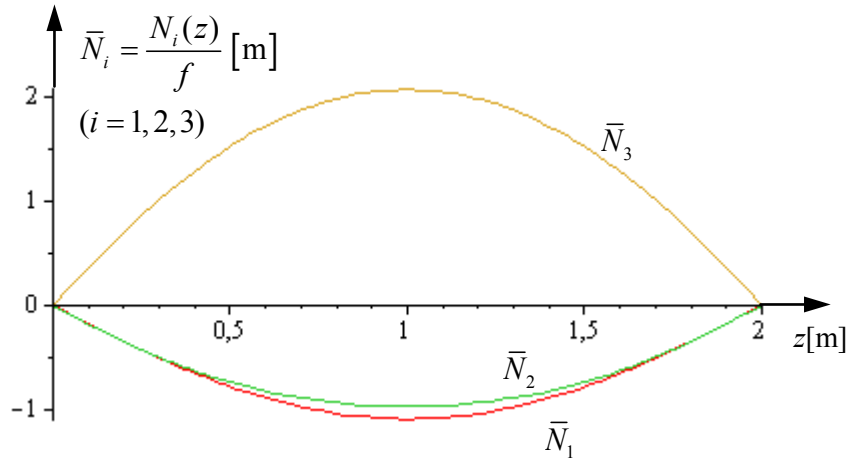
11. ábra. Egyenletesen megoszló erőrendszerrel terhelt kéttámaszú tartó.



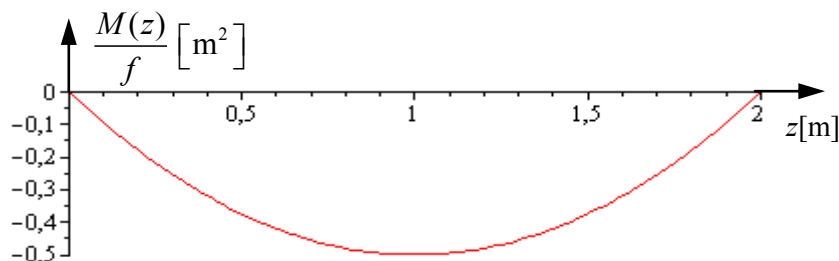
12. ábra. Megoszló terheléshez tartozó lehajlás függvény.



13. ábra. Axialis irányú elmozdulások megoszló terhelésre.



14. ábra. Rúderők megoszló terhelésre.



15. ábra. Hajlítónyomatéki függvény.

5. Köszönetnyilvánítás

E tanulmány a TÁMOP_4.2.2.B-10/1-2010-0008 projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

6. Irodalom

- [1] Campi, F., Monelto, I.: *Analytical solutions of two-layer beams with interlayer slip and bi-linear interface law*, International Journal of Solids and Structures, (50), 2013. pp. 687-698.
- [2] Girhammar, U. A., Gupu, V. K. A.: *Composite beam-columns with interlayer slip – exact analysis*. Journal of Structural Engineering, (119), 1993. pp. 1265-1282.
- [3] Planinc, I., Schnabl, S., Saje, M., Lopatič, I., Čas, B.: *Numerical and experimental analysis of timber composite beams with interlayer slip*, Engineering Structures, (30), 2008., pp. 2959-2969.
- [4] Newmark, N. M., Seist, C. P., Veist, C. P.: *Test and analysis of composite beams with incomplete interaction*, Proceedings of the Society of Experimental Stress Analysis 9(1), 1951. pp. 75-92.
- [5] Ranzi, G., Zona, A.: *A steel-concrete composite beam model with partial interaction including the shear deformability of the steel component*, Engineering Structures, 29(11), 2007. pp. 3026-3041.
- [6] Nguyen, Q. H., Martinelli, E., Hjiaj, M.: *Derivation of the exact stiffness matrix for a two-layer Timoshenko beam element with partial interaction*. Engineering Structures, 33(2), 2011. pp. 298-307.
- [7] Ecsedi, I., Baksa, A.: *Static analysis of composite beams with weak shear connection*, Applied Mathematical Modelling 35, 2011. pp. 1739-1750.
- [8] Lengyel, Á. J., Ecsedi, I.: *Analitikus módszer részlegesen kapcsolt, rétegzett kompozit rudak szilárdságtani feladatainak megoldására*, Multidiszciplináris Tudományok 2, 2012. pp. 89-102.
- [9] Lengyel, Á. J., Ecsedi, I.: *Normál és csúsztató feszültségek számítása részlegesen kapcsolt kompozit rudakban*, GÉP LXIV. (5), 2013. pp. 22-27.
- [10] Ugural, A. C., Fenster, S. K.: *Advanced Strength and Applied Elasticity*, Edward Arnold, London, 1984.
- [11] Chandramouli, P. N.: *Fundamentals of Strength of Materials*, PHI Learning Private Limited, Delhi, 2013.