AZ INFORMATIKAI TÉMATERÜLETRE FELVETT HALLGATÓK NUMERIKUS SOROKKAL KAPCSOLATOS TANULÁSI NEHÉZSÉGEINEK FELTÁRÁSÁRA IRÁNYULÓ HÁROMPILLÉRES FELMÉRÉS EREDMÉNYEINEK BEMUTATÁSA

Palencsár Enikő
BSc-hallgató, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar
3515 Miskolc-Egyetemváros, e-mail: palencsar.eniko@student.uni-miskolc.hu

Szilágyi Szilvia
egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet, Analízis Tanszék
3515 Miskolc-Egyetemváros, e-mail: szilvia.szilagyi@uni-miskolc.hu

Absztrakt
Az elmúlt évek tapasztalatai alapján elmondható, hogy a Matematikai analízis I. tárgy tananyagának szerves részét képző numerikus sorok konvergenciatulajdonságának vizsgálata gyakran jelent kihívást a Miskolci Egyetem elsőéves informatikai alapképzési szakjain tanulóknak. A 2022/2023-as tanév őszi félévében átfogó felmérést végeztünk a numerikus sorok konvergenciájának meghatározásával kapcsolatban felmerülő tanulási nehézségek és problémák feltérképezésére. Cikkünkben összefoglaljuk a hárompilléres felmérés eredményeit, valamint bemutatjuk azokat a tanulást támogató lehetőségeket, amelyek hozzájárulhatnak a vizsgált témakör eredményesebb elsajátításához és a kurzus sikeres teljesítéséhez.

Kulcsszavak: *informatikai alapképzés, numerikus sor, konvergenciakritérium, tanulási nehézségek, lemorzsolódás a felsőoktatásban*

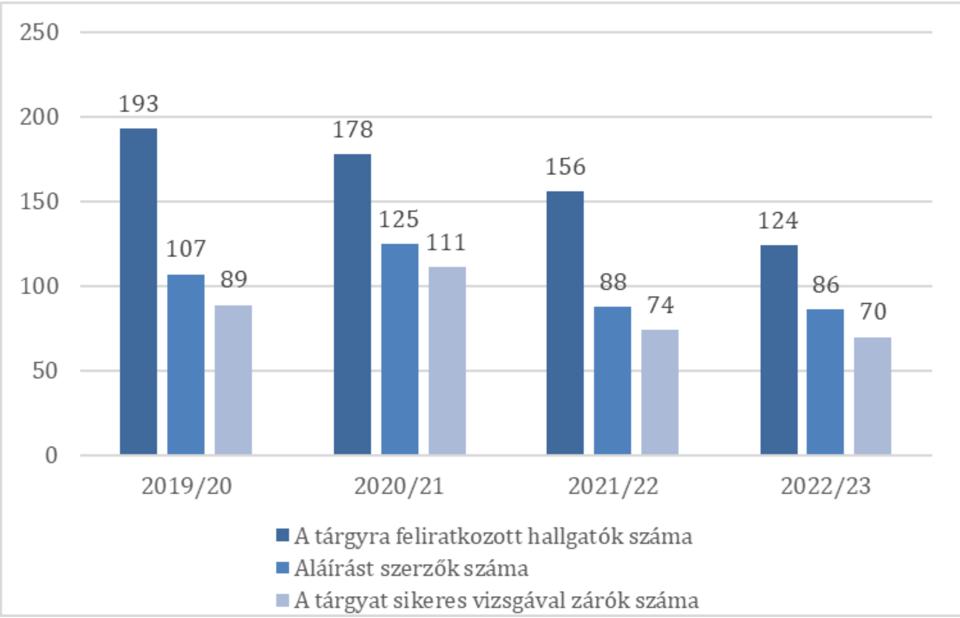
Abstract
Based on the experience of the past few years, the study of the convergence property of infinite series, which is an integral part of the curriculum of Analysis I, is often a challenge for first-year undergraduate students in the IT programs of the University of Miskolc. In the fall semester of the academic year 2022/2023, we conducted a comprehensive survey to identify the learning difficulties and problems related to the determination of the convergence property of infinite series. In this paper, we summarize the results of the three-pillar survey and present some learning aids that can contribute to a more effective mastery of the given topic and can, therefore, facilitate the successful completion of the course.

Keywords: *bachelor's programs in IT, infinite series, convergence test, learning difficulties, dropout in higher education*

1. Bevezetés

Magyarországon a hallgatói lemorzsolódás mértéke, tehát azok aránya, akik a felsőoktatást végzettség nélkül hagyják el, meghaladja a 30%-ot (Takács et al., 2022). A legkritikusabb szakaszt a lemorzsolódás szempontjából az alapképzés első két féléve jelenti. Ez több problémát is felvet, hiszen egyrészt a felsőfokú végzettség, az oklevél megszerzése növeli a versenyképességet a munkaerőpiacon, így lényegesen hozzájárul az anyagi biztonság megteremtéséhez; másrészt az iskolázottság mértékének növekedése az ország gazdaságára is pozitív hatással van, mert a munkavállalók szakértelme, képzettsége fontos erőforrás, a gazdasági növekedés alapvető feltétele (Varga, 1998; Nagy, 2016).

A Miskolci Egyetemen – más felsőoktatási intézményekhez hasonlóan – a Matematikai analízis I. kollokviummal záruló tantárgy, melynek teljesítése valamennyi elsőéves informatikai alapszakos hallgató számára kötelező. Az elmúlt négy év statisztikáját ***(1. ábra)*** alapul véve azonban jól látható, hogy a tárgyra feliratkozott hallgatóknak átlagosan közel fele tesz sikeres vizsgát a szemeszter végén. Az alacsony siker-ráta és az oktatói tapasztalatok egyaránt azt mutatják, hogy az informatikai alapszakok hallgatóinak jelentős hányada az első szemeszter egyik kardinális feladatát, a Matematikai analízis I. tantárgy abszolválását egyáltalán nem, vagy csak komoly nehézségek árán tudja megoldani. Tekintettel arra, hogy ez a tantárgy előfeltételként jelenik meg az informatikai alapszakok tantervi hálóiban (uni-miskolc.hu) több kötelezően teljesítendő tantárgy esetén, ezért érdemes figyelmet fordítani arra, hogy megkeressük és lehetőség szerint megoldjuk azokat a problémákat, amelyek gátolják a Matematikai analízis I. sikeres lezárását az első szemeszterben.



1. ábra. *A Matematikai analízis I. tárgy statisztikája éves lebontásban*
(az adatok forrása: Neptun Egységes Tanulmányi Rendszer)

A tantárgyi tematikában az első olyan tananyagrész, amely a középiskolai évek alatt érintőlegesen sem került tárgyalásra, a numerikus sorok elmélete. Általában négyszer negyvenöt percnyi előadáson és ugyanennyi gyakorlaton foglalkozunk ezzel a témával a kurzus során. A hallgatói visszajelzések és a zárthelyi dolgozatok eredményei ugyanakkor egyöntetűen azt mutatják, hogy sok hallgatónak ez kevés a vizsgált témakör készségszintű elsajátításához. Azonban a sorozatok és a sorok ismerete úgy a matematika, mind az informatika számos területén elengedhetetlen. A Taylor-sorok segítségével például függvényeket reprezentálhatunk, az adott pontban felvett függvényértéket közelíthetjük meg tetszőleges pontossággal, így az összetettebb integrálok értékére is tudunk közelítést adni. Ez a módszer lehetővé teszi azon differenciálegyenletek megoldását is, amelyek mozgást modellező számítógépes játékok, vagy természetes fizikai, kémiai és biológiai folyamatok szimulációinak fejlesztésekor merülnek fel.

A Matematikai analízis I. tárgy tekintetében a lemorzsolódás csökkentésének alapvető feltétele azoknak a témaköröknek, feladattípusoknak a feltérképezése, melyek a hallgatók számára a legnagyobb gondot jelentik. Ezek ismerete az oktatók számára lehetőséget biztosít arra, hogy részletesebben térjenek ki a problémás területekre, és a gyakorlatokon tárgyalt feladatok összeállításakor kiemelt figyelmet fordítsanak a hallgatók számára nagyobb kihívást jelentő feladattípusokra. Mindezekből kiindulva a 2022/23-as tanév őszi félévében a Miskolci Egyetem elsőéves hallgatóinak körében végeztünk egy hárompilléres felmérést, melynek fő célja az informatikai alapszakokra felvett hallgatók numerikus sorokkal kapcsolatos tanulási nehézségeinek tanulmányozása volt. A következő fejezetekben a felmérés módszertanát és eredményeit mutatjuk be, ezt követően pedig a feltárt problémák megoldásának lehetőségeit vizsgáljuk.

2. A felmérés során használt módszertan

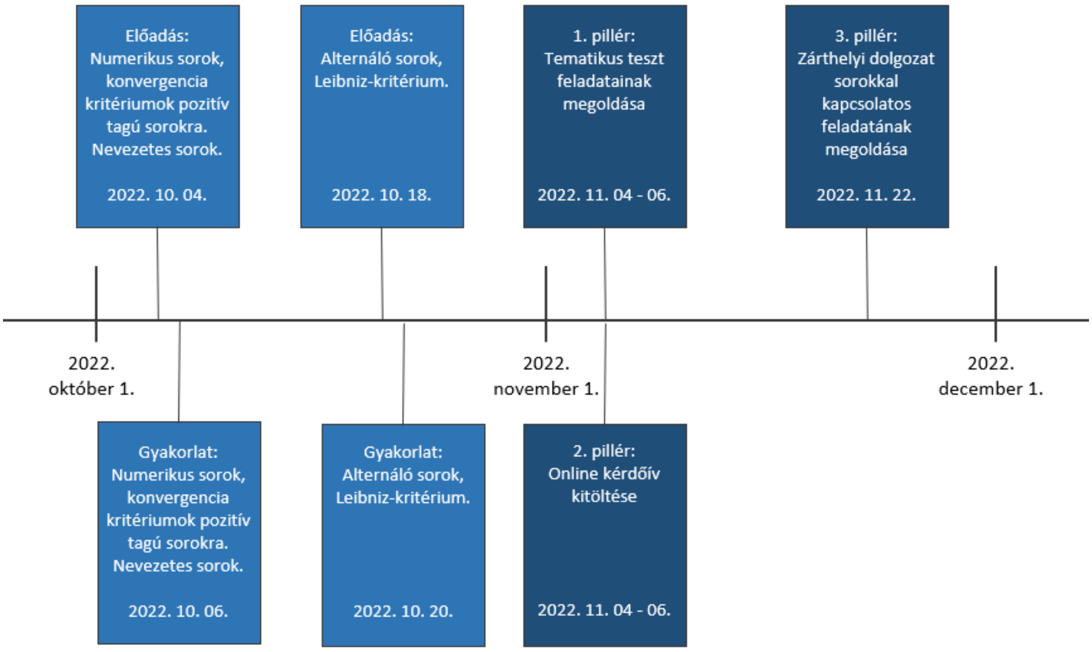
A Miskolci Egyetem gazdaságinformatikus, programtervező informatikus és mérnökinformatikus hallgatói vettek részt a felmérésben, többségük a 2022/23-as tanévben kezdte tanulmányait. A vizsgálat három pillérre épült:

1. *Tematikus teszt feladatainak megoldása:* A hallgatók – miután a Matematikai analízis I. előadásain megismerték a numerikus sorokkal kapcsolatos alapvető elméleti tudnivalókat, majd a gyakorlatokon sor került az elmélet alkalmazására a kitűzött feladatok megoldásával – először egy online tematikus tesztet töltöttek ki a Microsoft Forms felületén, mellyel felmértük a sorokkal kapcsolatos ismereteiket. A teszt kitöltése nem volt kötelező, de a hallgatók a zárthelyi dolgozatok eredményébe beszámítható plusz pontokat szerezhettek, ha küldtek be választ.
2. *Online kérdőív kitöltése:* Ezt követően egy online kérdőív keretei között arra kerestük a választ, hogy a hallgatók mit gondolnak a numerikus sorok témaköréről. Arra voltunk kíváncsiak, hogy a konvergencia meghatározásának mely aspektusa jelenti számukra a legnagyobb kihívást. A kérdőív kitöltése szintén önkéntes alapon zajlott, melyet a Google Űrlapok platformján bonyolítottunk le.
3. *Zárthelyi dolgozat sorokkal kapcsolatos feladatának megoldása:* A harmadik pillért a szemeszter végi zárthelyi dolgozat jelentette, melynek első feladata a numerikus sorok elméletéhez kapcsolódott. Tantermi körülmények között is megvizsgáltuk tehát, hogy mennyire szereztek szilárd ismereteket a hallgatók a numerikus sorokról a kurzus során.

Az online tematikus tesztet 87, a kérdőívet 86 fő töltötte ki, míg a zárthelyi dolgozatot 94 hallgató adta be a kurzusra jelentkezett 124 főből.

A felmérés időbeli ütemezésének ***(2. ábra)*** kidolgozásakor fontos szempont volt, hogy a sorokkal kapcsolatos tanulási nehézségek feltárása a részt vevő hallgatók számára ne jelentsen számottevő többletterhelést. Ezért a numerikus sorokat ismertető és gyakorló órákat, az online tesztet, valamint a tantermi mérést a félév során a lehetőségeinkhez mérten igyekeztük időben optimálisan széthúzva lebonyolítani, utóbbit a zárthelyi dolgozattal összekapcsolva. Annak érdekében, hogy a hallgatók valóban a legjobb tudásuk szerint válaszoljanak a feltett kérdésekre, a sorok megismerése és az online teszt kitöltése között hosszabb időt hagytunk a konvergenciakritériumok megértésére, a kapcsolódó készségek elsajátítására. A kérdőív kitöltését azért ütemeztük közvetlenül az online teszt beadása után, mert ekkor a hallgatók még biztosan emlékeztek arra, mely feladattípusok jelentették számukra a legnagyobb kihívást.

A tematikus teszt és a kérdőív eredményeit a beadási határidő lejártát követően .xlsx táblázatformátumba exportáltuk, az így nyert adatokat pedig a Microsoft Excel táblázatkezelő program beépített összesítőfüggvényei és diagramgenerátora segítségével elemeztük. A zárthelyi dolgozat első feladatának feladatrészenkénti pontszámait szintén egy Excel-táblázatba gyűjtöttük össze, majd az így kapott, megfelelően strukturált adathalmazon átlagoló, valamint számláló összesítéseket végeztünk.



2. ábra. *A felmérés idővonala*

3. A felmérés eredményei

3.1. Tematikus teszt

Az online tematikus teszt feleletválasztós volt, a hallgatóknak minden kérdésnél a, b, c és d lehetőségek közül kellett a helyeset megjelölni. A teszt húsz kérdésből állt és minden esetben egyetlenegy helyes válasz volt, amely 0,5 pontot ért, így összesen maximum 10 pontot lehetett szerezni. A teszt nem volt időkorláthoz kötve, a hallgatóknak a kitöltésre egy egész hétvége a rendelkezésükre állt.

A húsz kérdés mindegyike a numerikus sorok témaköréhez kapcsolódott, ezeket az alábbiak szerint öt csoportra osztottuk:

1. Elemi feladatok a konvergencia meghatározására, melyek a hiperharmonikus és a mértani sorokra vonatkozó tételek ismeretében egy lépésben megoldhatók (5 db).
2. Olyan feladatok, melyek az elmélet megértését kérik számon (4 db).
3. Sorok összegével kapcsolatos feladatok (3 db).
4. Összetettebb feladatok, melyek a tanult konvergenciakritériumok helyes alkalmazására épülnek (6 db).
5. Olyan feladatok, melyekben sorokkal kapcsolatos relációkról kell eldönteni, hogy igazak-e, azaz hogy az egyik sor majoránsa/minoránsa-e a másiknak (2 db).

1. táblázat. *A helyes választ adók százalékos aránya feladattípusonként*

Feladattípus	1.	2.	3.	4.	5.
Helyes válaszok (%)	94	80	74	74	60

A feleletválasztós tesztet a határidőig 87 hallgató töltötte ki, feladattípusonként a helyes választ adók arányát az ***1. táblázat*** foglalja össze. A tesztet kitöltők átlagpontszáma 8 pont volt, azaz a hallgatók átlagosan a numerikus sorokkal kapcsolatos feladatok 80%-ára tudtak helyes választ adni. Fontos ugyanakkor megjegyezni, hogy online teszt lévén a hallgatók a megoldás során külső segítséget is igénybe vehettek, akár egymással is egyeztethették a válaszokat.

A tesztet beadók az egyszerűen megoldható elemi feladatok esetén adták a legtöbb helyes választ (94%), míg a legtöbb problémát a sorok közötti relációkat elemző példák okozták, itt a sikeres megoldások aránya mindössze 60% volt. A sorok közötti kapcsolatok felismerése tehát – mely a majorálás és a minorálás központi lépése – sok hallgató számára jelentett nehézséget.

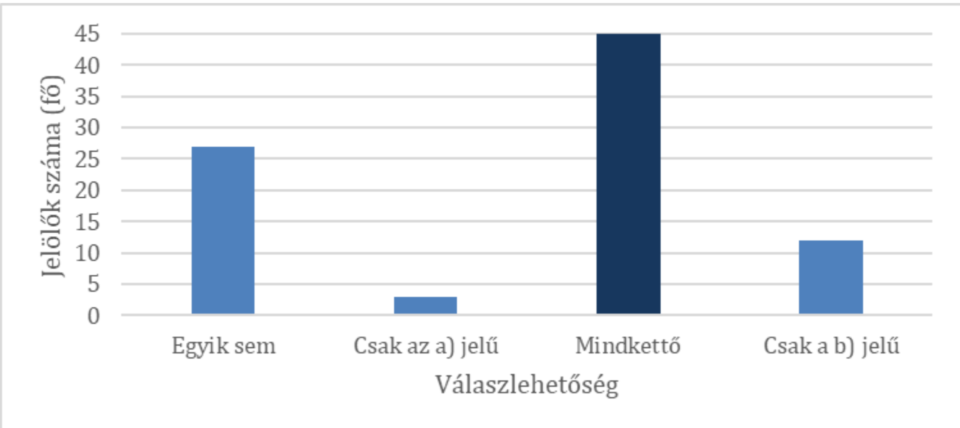
19. Az alábbi két állítás közül melyik igaz? * (0.5 pont)

$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e}{n-\sqrt{n}} \qquad b)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

- Egyik sem
- Csak az a) jelű
- Mindkettő
- Csak a b) jelű

3. ábra. *A tematikus teszt 19. számú feladata*

Ilyen típusú feladatra példa a 19. számú, melyet mindössze a kitöltők 52%-a, azaz 45 hallgató tudott helyesen megoldani. Ennél a példánál két állításról kellett eldönteni, igazak-e ***(3. ábra)***, a kitöltőknek azonban 31%-a (27 résztvevő) mindkét állításra vonatkozóan téves következtetést vont le az „Egyik sem” opciót jelölve ***(4. ábra)***.



4. ábra. *A 19. példára adott hallgatói válaszok (a helyes válasz oszlopa sötétebb színezéssel jelölve)*

Problémát jelentettek a feltételes és abszolút konvergenciára vonatkozó feladatok is, ezek egyikét, az alternáló harmonikus sor vizsgálatát a hallgatók mindössze 46%-a oldotta meg jól, bár a hibázók között olyanok is akadhattak, akik a feladat leírását olvasták félre (azt az állítást kellett kiválasztani, amely a megadott sorra nem igaz).

3.2. Online kérdőív

A kérdőív két részből állt. Az első részben a hallgatóknak ötfokú Likert-típusú skálán kellett bejelölniük, mennyire értenek egyet a megadott állításokkal. A Likert-típusú skálák az attitűd mérésére szolgálnak, napjaink egyik legnépszerűbb skálázási eljárását jelentik (Forgács, 2017). Használatuk legnagyobb előnye az egyszerűség, amely mind a válaszadás, mind a későbbi adatfeldolgozás folyamatát megkönnyíti. A kérdőívben szereplő állítások a következők voltak:

1. Az előadáson elhangzott definíciók alapján sikerült tökéletesen megértenem a numerikus sorokkal kapcsolatos kritériumokat.
2. Az előadáson elhangzottak és a gyakorlatok anyaga alapján sikerült tökéletesen megértenem a numerikus sorokkal kapcsolatos kritériumokat.
3. Úgy érzem, magabiztosan meg tudom határozni egy sor konvergenciáját.
4. A numerikus sorok a félév egyik legnehezebb témakörét jelentik számomra.
5. Értem a különbséget sor és sorozat között.
6. Nehezen tanulok matematikát definíciók alapján, jobban szeretem a gyakorlati feladatokat.
7. Gyakran fordul elő, hogy nincs kedvem vagy türelmem otthon az analízis gyakorlásával foglalkozni.
8. Jobban tartok a számonkérésektől analízisből, mint más tárgyakból.

Az első öt állítás a hallgatók numerikus sorokhoz való aktuális viszonyulására vonatkozott, míg az utolsó három kijelentés általánosan kapcsolódott a Matematikai analízis I. kurzushoz. A válaszok skáláján az ötös jelentette a teljes egyetértést, míg az egyest akkor kellett a hallgatóknak megjelölniük, ha úgy vélték, hogy az adott állításnak éppen az ellenkezője igaz. Fontos ugyanakkor megemlíteni, hogy az ehhez hasonló, páratlan elemszámú Likert-skálák esetén a válaszadók hajlamosak a középső értéket megjelölni, amennyiben kevésbé érdeklődnek az adott téma iránt, és nem kívánnak mélyebben elgondolkodni a válaszaikon (Youn et al., 2017). Ezt a faktort nehéz kiküszöbölni. Az előadáson felhívtuk a hallgatók figyelmét arra, hogy a válaszaik fontosak, a visszajelzéseket egy kutatásban használjuk fel, ezért ne véletlenszerűen jelöljenek.

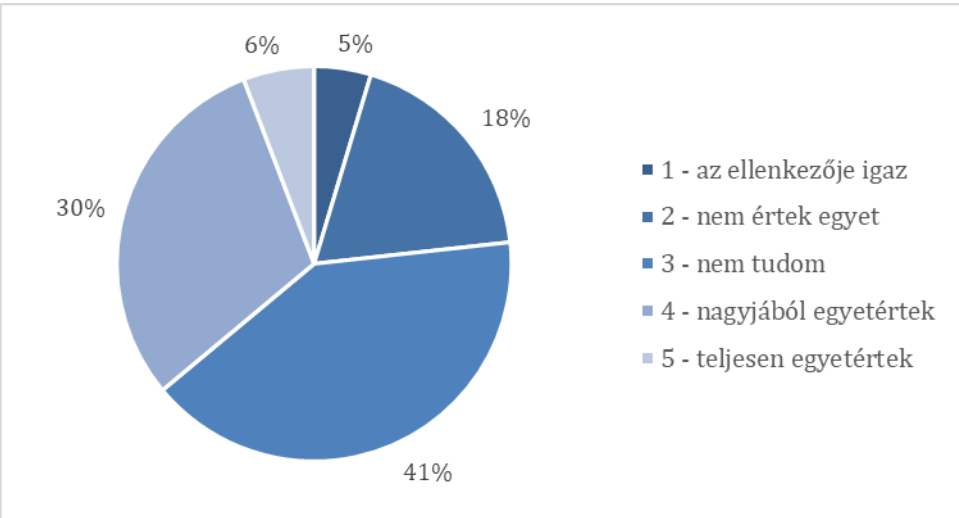
Az állítások értékelését követően, a második részben, a kérdőív kitöltőinek azt kellett kiválasztaniuk egy felsorolásból, hogy melyik kritériummal dolgoznak a legszívesebben és a legkevésbé szívesen, ha egy numerikus sor konvergenciáját vagy divergenciáját kell meghatározniuk. Végül pedig arra kértük a hallgatókat, hogy fogalmazzák meg röviden a saját szavaikkal, mit tartanak a legnagyobb kihívásnak egy numerikus sor konvergencia szempontjából történő vizsgálatakor.

Az első nyolc kérdésre adott válaszokat a ***2. táblázat*** összegzi. Ebből látható, hogy a kérdőívet kitöltő 86 hallgatónak mindössze 54%-a értett egyet (jelölte meg a teljesen egyetértek vagy a nagyjából egyetértek választ) azzal, hogy az előadáson elhangzott definíciók és a gyakorlatokon megoldott feladatok alapján megértették a numerikus sorokhoz kapcsolódó kritériumok használatát. 4 hallgató az előadások alapján egyáltalán nem értette meg a kritériumok használatát, ők az első kérdésre az „1 – az ellenkezője igaz" lehetőséget jelölték meg válaszként, a második állításnál közülük egy illető a „2 – nem értek egyet" lehetőséget választotta, hárman pedig a „4 – nagyjából egyetértek" választ jelölték meg, azaz nekik a gyakorlatokon megoldott feladatok segítettek felzárkózni.

2. táblázat. *Az egyes állításokhoz kapcsolódó válaszok statisztikája (fő/válaszlehetőség)*

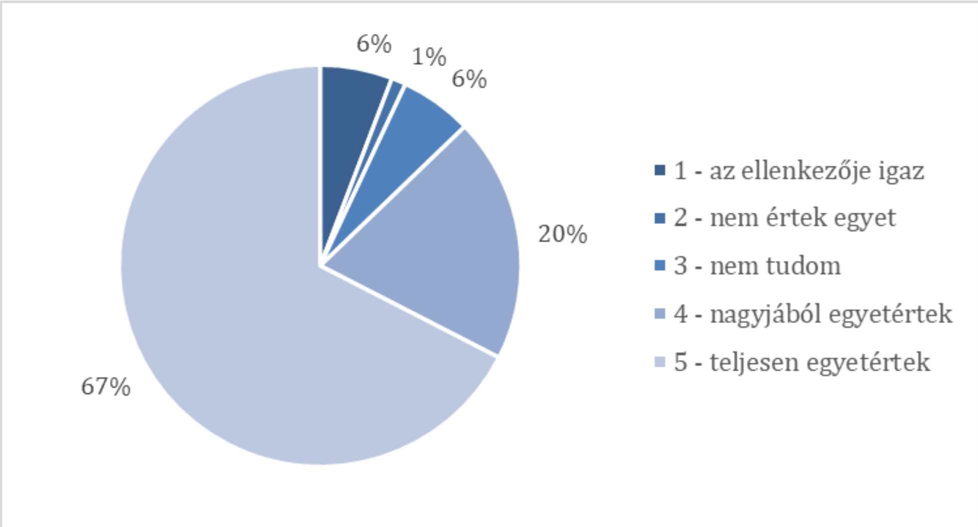
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1 – az ellenkezője igaz	4	0	4	2	2	5	3	5
2 – nem értek egyet	19	15	16	19	9	1	21	17
3 – nem tudom	25	25	35	22	10	5	16	11
4 – nagyjából egyetértek	37	41	26	23	35	17	33	25
5 – teljesen egyetértek	1	5	5	20	30	58	13	28

Mindezek ellenére kevesebben, csupán 31 fő (a kitöltők 36%-a) vélte úgy, hogy a szerzett ismereteit képes a gyakorlatba is átültetni, ennyien érezték azt, hogy magabiztosan meg tudják határozni egy sor konvergenciáját vagy divergenciáját ***(5. ábra)***. Ennél az állításnál volt a legmagasabb a bizonytalanok aránya, közel 41%. Ebből arra következtettünk, hogy hiába ismerték meg a hallgatók az előadásokon és a gyakorlatokon a numerikus sorokat, a tudásuk elmélyítéséhez, a magabiztos feladatmegoldáshoz és saját képességeik reális megítéléséhez sok esetben további gyakorlati tapasztalatokra, feladatmegoldásra, otthoni gyakorlásra lett volna szükségük. Ehhez képest sokkal kedvezőbb azoknak az aránya, akik megértették az alapvető különbséget sor és sorozat között, ez 76%, azaz 65 fő. A kérdőívet kitöltők éppen felének (43 hallgató) jelentették a numerikus sorok a szemeszter egyik legnehezebb témakörét.



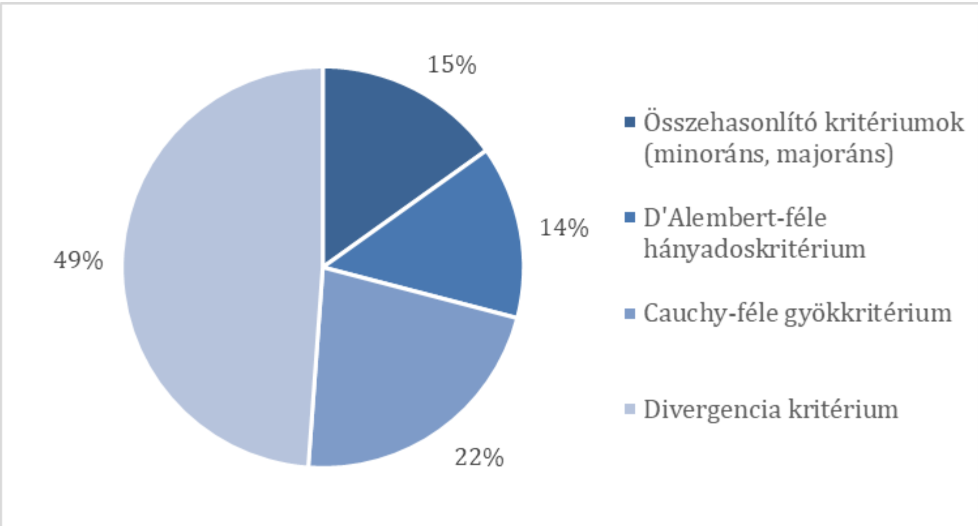
5. ábra. *Az „Úgy érzem, magabiztosan meg tudom határozni egy sor konvergenciáját" állításra vonatkozó statisztika*

A hallgatók döntő többsége, 75 fő (87%) nyilatkozott úgy, hogy a definícióknál jobban szeretik a gyakorlatiasabb megközelítést ***(6. ábra)***, amikor matematikát tanulnak, azonban 46 fő (53%) azt is bevallotta, hogy otthon gyakran nincs kedve vagy türelme az analízis gyakorlásával foglalkozni. Fény derült arra is, hogy a Matematikai analízis I. tárgyat az informatikus hallgatók többsége a nehezebben teljesíthető kurzusok csoportjába sorolja, 53 fő (62%) nyilatkozott úgy, hogy jobban tart a számonkérésektől analízisből, mint bármely más tantárgyból.



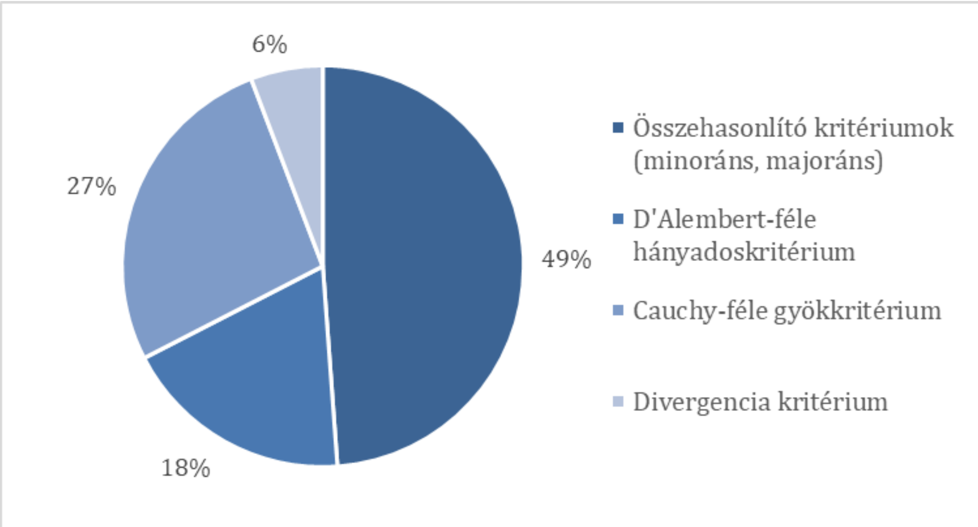
6. ábra. *A „Nehezen tanulok matematikát definíciók alapján, jobban szeretem a gyakorlati feladatokat." állításra vonatkozó statisztika*

A kérdőívet kitöltő hallgatóknak csaknem fele, 42 fő a divergenciakritériummal dolgozik a legszívesebben numerikus sorok vizsgálatakor ***(7. ábra)***. Bár az összehasonlító kritériumok használata általában kevésbé számolásigényes, mint a hányados- vagy a gyökkritériumé, mégis csupán 13 (15%) olyan hallgató volt, akik legszívesebben az összehasonlító kritériumokkal dolgoznak, míg a Cauchy-féle gyök- és a D'Alembert-féle hányadoskritériumot összesen 31 (36%) hallgató jelölte meg kedvenceként.



7. ábra. *A „Melyik kritériummal dolgozik a legszívesebben numerikus sorok vizsgálatakor?" kérdésre adott válaszok százalékos aránya*

Ami a legkevésbé szívesen használt kritériumokat illeti, a listát szintén 42 fővel (49%) az összehasonlító kritériumok vezetik. ***(8. ábra)***, ez egybevág az online teszt kiértékelésekor levont azon következtetéssel, miszerint sok hallgatónak meggyűlik a baja a sorok közötti kisebb-nagyobb relációk felismerésével. A legkevesebben (6%) a divergenciakritériumot jelölték meg, mint azt a kritériumot, amivel a legkevésbé szívesen dolgoznak.



8. ábra. *A „Melyik kritériummal dolgozik a legkevésbé szívesen numerikus sorok vizsgálatakor?" kérdésre adott válaszok százalékos aránya*

A kérdőív kitöltői tehát a legszívesebben a divergenciakritériummal dolgoznak, ezt a Cauchy-féle gyökkritérium és a D'Alembert-féle hányadoskritérium követik, a legtöbb kellemetlenséget pedig az összehasonlító kritériumok használata okozza számukra. Ezek az eredmények teljesen összhangban vannak az oktatói tapasztalatokkal. A divergenciakritériummal a valós számsorok esetén csak a divergencia ténye dönthető el, a konvergenciáé nem. Alkalmazásakor azt kell megvizsgálni, hogy a sort generáló sorozat nullsorozat-e, azaz egyetlen sorozat határértéke alapján meghozható a döntés. Hasonló a helyzet a Cauchy-féle gyökkritérium és a D'Alembert-féle hányadoskritérium esetén, ahol a kritériumot megfogalmazó tételben szereplő limesz 1-hez viszonyított értékének ismeretében a vizsgált pozitív tagú sorról általában el lehet dönteni, hogy konvergens vagy divergens-e. Jól látható, hogy a megoldás mindhárom esetben algoritmus alapján történik, nem okoz gondot a gyakorlatban történő alkalmazás. Más a helyzet az összehasonlító kritériumoknál, ahol az első lépés egy sejtés kialakítása a pozitív tagú sorra vonatkozóan. Konvergencia esetén konvergens majoránst, divergencia esetén pedig divergens minoráns sort kell keresni, hogy alá tudjuk támasztani a sejtést. Ehhez azonban számos nevezetes sornak ismerni kell a konvergencia tulajdonságát. Az összehasonlító kritériumok használatára nincs konkrét lépésenként követhető algoritmus, amelyet általános megoldási sémaként vehetünk igénybe, ezért nehéz elsajátítani ezeknek a kritériumoknak a készségszintű alkalmazását.

Az utolsó kérdésre *(„Fogalmazza meg röviden a saját szavaival, mit tart a legnagyobb kihívásnak a numerikus sorok konvergenciájának meghatározásakor!")* érkezett válaszok alapján a hallgatók többsége a numerikus sorokkal kapcsolatos legnagyobb kihívásként azt a döntést éli meg, hogy az adott sorra vonatkozóan mely kritérium használata lesz célravezető.

Erre utaló válaszok voltak például:

– *„Elkezdeni a feladatot [a legnagyobb kihívás], hiszen sokféle módszer van, de ha rájövök, hogyan is kell elindulni, akkor utána már egyszerűen meg tudom határozni a sorok konvergenciáját!”*
– *„A megfelelő kritérium kiválasztása [a legnagyobb kihívás], mivel sok gyakorlat alapján lehet mindig a leggyorsabban és legpontosabban meghatározni ezt.”*
– *„Rátérni a helyes megoldási módszerre [ez jelenti a legnagyobb kihívást]. Sokszor kell újrakezdenem.”*

Sokak számára jelentett problémát az elméleti ismeretek gyakorlatba történő átültetése:

– *„Bár a magyarázatot és a levezetést is sokszor hallottam és láttam, ennek ellenére még mindig nem igazán értem az eljárás módját.”*
– *„Az ahhoz szükséges definíciók, tételek megértése és helyes használata [a legnagyobb kihívás].”*

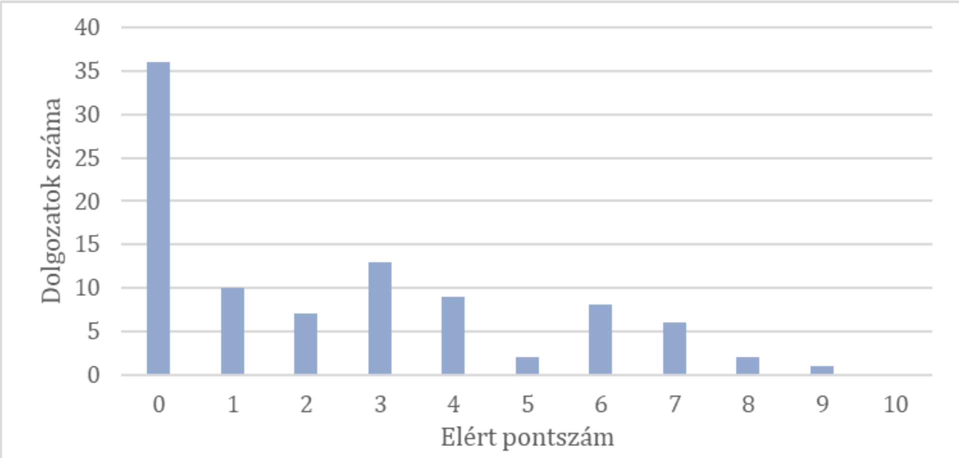
Visszatartó tényezőként jelentek meg továbbá az elfelejtett vagy hiányos matematikai alapismeretek is. Több hallgató nyilatkozott úgy, hogy leginkább az összetett képletek egyszerűsítésével gyűlik meg a baja:

– *„Szimplán a definíciókból nem igazán értem az egészet, de úgy gondolom, hogy a bonyolult és összetett képleteknek a leegyszerűsítése okoz nekem nagyobb gondot, mivel ennek köszönhetően nem jön ki jó eredmény.”*
– *„Nem mindig tudom a megfelelő alakra hozni a kifejezést, habár utólag megértem, hogyan kell.”*

Néhány hallgató számára a sorozatok és a sorok fogalma közötti különbség megértése jelentette a legnagyobb kihívást, de akadtak olyan válaszadók is, akik az anyagrész létjogosultságát kérdőjelezték meg az informatikai alapképzésben. Egy hallgató az önbizalom hiányát hozta fel problémaként, ami miatt ritkán tudja eldönteni a megoldásáról, hogy az valóban helyes, vagy csupán *„szerencsés volt”*. Volt, aki bevallotta, hogy a Matematikai analízis I. tantárggyal minden tekintetben hadilábon áll: *„Az egész tárgy kihívás számomra, nem értem a logikáját a feladatoknak.”* Több hallgató számára a határérték-számítás jelentett gondot a gyök- és a hányadoskritérium használatakor, és akadtak olyan kitöltők is, akik a mértani sorok összegének kiszámításával kapcsolatban fejezték ki bizonytalanságukat. Sajnálatos tény, hogy mindössze egyetlen egy olyan hallgató volt, aki kijelentette, hogy egyáltalán nem lát kihívást a konvergencia meghatározásában.

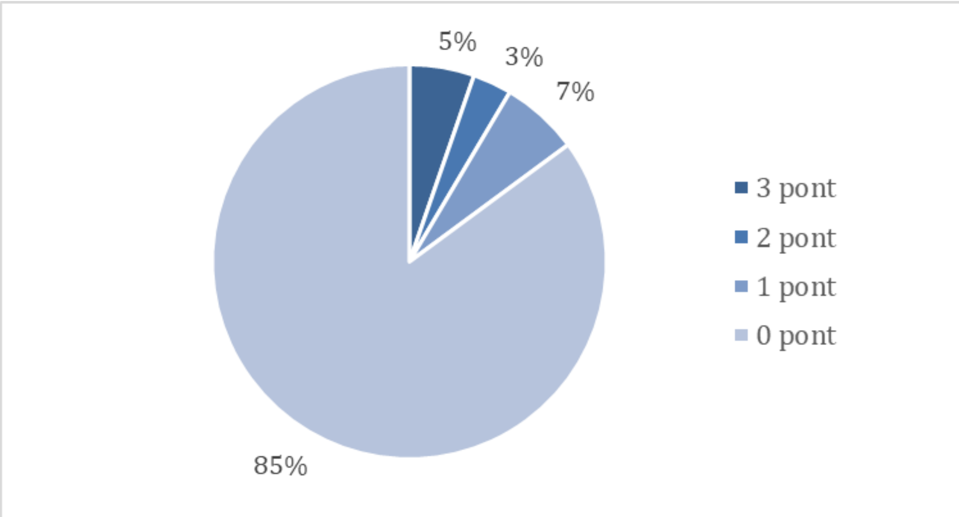
3.3. A félév végi zárthelyi dolgozat sorokkal kapcsolatos feladata

A szemeszter végi zárthelyi dolgozat első feladatában három numerikus sor konvergenciatulajdonságát kellett meghatározni. Ezek egyike egy mértani sor volt, amelynek az összegét is meg kellett adni. A maradék két sor közül az egyik a gyök- illetve a hányadoskritériumra volt példa (mindkét kritériummal megoldható volt a feladat), a másik pedig trigonometrikus függvényt tartalmazott, konvergenciáját a legegyszerűbben majorálással lehetett meghatározni. A feladat összpontszáma 10 pont volt, a konvergenciatulajdonság helyes meghatározásáért soronként 3 pont járt, a fennmaradó 1 pontot pedig akkor kapta meg a hallgató, ha a konvergens mértani sor összegét is helyesen számolta ki. A feladatra kapott pontok átlaga 2,4 (24%) lett. Az 50 pontos zárthelyi dolgozatból a hallgatók átlagosan 14,6 pontot szereztek (29%).



9. ábra. *A zárthelyi dolgozatok eloszlása a sorokhoz kapcsolódó feladatra kapott pontszám alapján*

A vizsgált feladat megoldásával 12-en meg sem próbálkoztak, és további 24 hallgató válasza nem ért pontot ***(9. ábra)***. Hibátlan feladatmegoldás nem volt, a legmagasabb pontszámnak számító 9 pontot egyetlen hallgatónak sikerült elérnie, ő a sorösszeg kiszámítását hagyta ki a megoldásából.



10. ábra. *Az összehasonlító kritériumokkal kapcsolatos feladatrészre kapott pontok százalékos eloszlása*

Ami a különböző feladatrészeket illeti, a legnagyobb kihívást kétségkívül a majorálás jelentette a hallgatók számára, az ezzel kapcsolatos c) feladatrészre mindösszesen 14 tanuló, a dolgozatot beadók 15%-a kapott pontot, tehát ezt a feladatot 80 hallgató egyáltalán nem tudta megoldani. Hibátlan megoldás mindössze 5 db született ***(10. ábra)***.

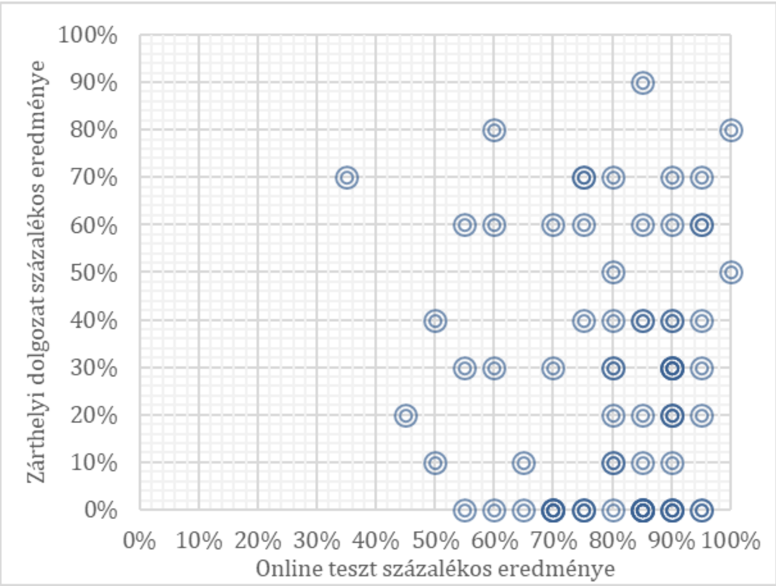
A legjobban a b) jelű, mértani sor konvergenciájával kapcsolatos feladatrész sikerült, ennél 30 fő (32%) a maximális 4 pontnak több mint felét megszerezte, bár itt is volt 43 olyan hallgató (46%), akik nem értek el egyetlen pontot sem. Ebben a feladatrészben a hallgatók átlagosan az összpontszám 35%-át szerezték meg, míg az a)-val jelölt, Cauchy- vagy D'Alembert-kritérium segítségével megoldható feladatrészre vonatkozó átlagpontszám a maximális pontszám 23%-a lett. Bár ezek a százalékos értékek sem nevezhetők magasnak, hozzájuk viszonyítva is kirívóan alacsony az összehasonlító kritériumokhoz kapcsolódó c) feladatrészhez tartozó 10% ***(3. táblázat)***.

3. táblázat. *A zárthelyi dolgozat első feladatára kapott pontszámok feladatrészenként*

Feladatrész	Maximális pontszám	Átlagpontszám (pont)	Átlagpontszám (%, kerekítve)
a) Gyök-/hányadoskritérium	3	0,7	23
b) Mértani sor és összege	4	1,4	35
c) Összehasonlító kritérium	3	0,3	10
Teljes feladat	10	2,4	24

Érdemes megfigyelni, hogy bár a sorok témaköréhez kapcsolódó online teszten a kitöltők többsége magas pontszámot ért el (átlagosan 80%), a zárthelyi dolgozat eredményei mégis a sorokkal kapcsolatos alapvető ismeretek hiányát tükrözik (átlagosan 24%).

A feleletválasztós teszt kitöltői közül 76 fő írta meg a zárthelyi dolgozatot. Amennyiben a hallgatói pontszámokat az összes elérhető pontszám százalékában összehasonlítjuk, azt láthatjuk, hogy az online teszthez képest a zárthelyi dolgozatban mindössze 4 fő javított az eredményén, míg 1 tanuló azonos százalékot ért el. A fennmaradó 71 fő egytől egyig rontott az eredményén az online teszthez képest ***(11. ábra)***. Ennek több oka is lehet: egyrészt a teszt feleletválasztós jellege miatt tippelés esetén is jó esélyük volt a hallgatóknak eltalálni a helyes választ, megoldásuk nem feltétlenül tükrözött logikus, következetes gondolatmenetet. Másrészről a teszt kitöltőinek a világháló valamennyi forrása, online kalkulátora a rendelkezésükre állt, sőt, szükség esetén a társaikhoz is fordulhattak segítségért. Ezzel szemben a zárthelyi dolgozatot tantermi, ellenőrzött körülmények között írták a hallgatók, akiknek így teljes mértékben a saját tudásukra kellett hagyatkozniuk.



11. ábra. *A mindkét számonkérésben részt vevő hallgatók százalékos eredményei*

Elmondható tehát, hogy a zárthelyi dolgozat objektívebben mérte fel a hallgatók numerikus sorokhoz kapcsolódó ismereteit, javarészt emiatt figyelhetjük meg a teljesítmény nagymértékű romlását az online teszt eredményeihez képest. Ezt alátámasztja az is, hogy a legnagyobb mértékű rontást két olyan tanulónál tapasztalhattuk, akik csaknem hibátlan, 95%-os online tesztet küldtek be, a zárthelyi dolgozat sorokkal kapcsolatos feladatára azonban egyetlen pontot sem kaptak.

3.4. Az eredmények összegzése

A három különböző típusú felmérés eredményeit összegezve be kell látnunk, hogy az informatikai alapszakokon tanuló hallgatók numerikus sorokhoz való viszonyulására a bizonytalanság jellemző. A hallgatók gyakran saját bevallásuk szerint is idegenkednek a témakörtől, mely részben a hiányos matematikai alapismeretekből ered, részben pedig abból, hogy a numerikus sorokat nem tudják kontextusba helyezni, nem ismerik jelentőségüket sem a matematika, sem az informatika világában. A numerikus soroktól való ódzkodás abban is megnyilvánult, hogy a velük kapcsolatos feladatot a zárthelyi dolgozatban a hallgatók több, mint 10%-a teljesen üresen hagyta.

Bár az online kérdőívben többen a mértani sorok összegének kiszámítását jelölték meg legnagyobb kihívásként, a zárthelyi dolgozat tapasztalatai arra engednek következtetni, hogy a mértani sorok konvergenciájának meghatározása és ezt követően az összegszámítás egyáltalán nem a témakör legtöbb gondot okozó része. A hallgatók kiemelkedően magas arányban kaptak 0 pontot az összehasonlító kritériumok ismeretét mérő feladatrészre, és az online teszt eredményei is azt igazolják, hogy a hallgatók számára nehézséget jelent a konvergens majoráns, illetve a divergens minoráns sor keresése.

A kérdőív alapján a numerikus sorok konvergenciájának meghatározásakor a hallgatók számára a legnagyobb kihívást az adott sorra alkalmazható kritérium megtalálása, továbbá az összetett alakok egyszerűsítése jelentette. Ezek mind olyan problémák, amelyek fokozott gyakorlással, tapasztalatszerzéssel kiküszöbölhetők, hiszen a helyes kritérium kiválasztásához bizonyos fokú intuícióra van szükség, az egyszerűsítés pedig rutinfeladat.

Az oktatóknak érdemes azon dolgozniuk, hogy közelebb hozzák a sorok világát a hallgatókhoz, mert ezzel mind a kezdeti bizonytalanság, mind a sorok hasznosításával kapcsolatos kételyek feloldhatók. Javasolt az előadások során az adott tananyag gyakorlati alkalmazásainak felsorolása, és a tanulók biztatása az otthoni gyakorlásra. A gyakorlatokon különös figyelem fordítandó a majorálás-minorálás módszerére, hiszen ezzel a többségnek gondja volt a zárthelyi dolgozatban.

Megfigyelhető ugyanakkor az a tendencia is, hogy a Z generációs fiatalok kevésbé fogékonyak a frontális oktatási módszerre (Prensky, 2001; Körei et al., 2021). Be kell hát látnunk, hogy a monoton feladatmegoldás nem lesz célravezető. Különösen igaz ez a házi feladatokra, melyekkel az a legnagyobb probléma, hogy otthon a hallgató visszajelzés hiányában nem tudja, jól oldott-e meg egy feladatot, sőt, előfordulhat az is, hogy a megoldás első lépéséhez a tanulónak kezdetben külső segítségre lenne szüksége. A házi feladatok egy bizonyos tudásszint alatt inkább kudarc-, mintsem sikerélményt adnak, így a gyakorlás ösztönzése helyett továbbmélyítik azt a szakadékot, ami a sikeres feladatmegoldás és az egyéni képességek között tátong.

Új, a házi feladatoktól különböző eszközök alkalmazását kell tehát fontolóra vennünk annak érdekében, hogy a hallgatókat gyakorlásra ösztönözzük. Kulcsfontosságú, hogy ezek az eszközök élménycentrikusan tárjanak egy adott témakört a tanulók elé, továbbá az is, hogy a hallgatók ingyenesen, akár otthonról is elérhessék őket. A következő fejezetben a numerikus sorok témaköréhez a fenti feltételeket kielégítő, könnyen elérhető oktatási segédeszközöket tekintjük át.

4. A numerikus sorok tanulását hatékonyan támogató eszközök

4.1. WolframAlpha

A világhálón több online kalkulátor elérhető, ezek közül az egyik legismertebb és legkiterjedtebb eszközkészlettel rendelkező a WolframAlpha (wolframalpha.com). Az ilyen kalkulátorok elsősorban egyéni feladatmegoldás esetén alkalmazhatók önellenőrzésre. Fontos azonban megjegyezni, hogy a jobb minőségű online kalkulátorok általában csak angol nyelven érhetők el.

A WolframAlpha képes numerikus sor konvergenciáját meghatározni, összegét kiszámítani (ha létezik). A kalkulátor ingyenes verziója tetszőleges böngészőből, bejelentkezés nélkül is elérhető. A sorok keresőbe illesztésekor intuitív grafikus felület segíti a felhasználót a billentyűzeten nem fellelhető szimbólumok (szummázás, végtelen jel) begépelésében, tehát a program használatához nem szükséges bonyolultabb parancsokat megjegyezni. Az Enter billentyű megnyomását követően a kalkulátor megadja az inputként megadott sor összegét (ha létezik), betűkkel is kiírja, hogy konvergens vagy divergens az adott sor, majd grafikonon ábrázolja a hozzá tartozó részletösszeg sorozat első néhány tagját. A megjelenített tagok száma tetszőlegesen növelhető vagy akár csökkenthető is. A konvergenciát megadó ablak felajánlja a *„Step-by-step Solution”* lehetőséget, azaz a konvergencia meghatározásának lépései is nyomon követhetők a WolframAlpha segítségével, de ezeket már csak előfizetett felhasználók tekinthetik meg. A WolframAlphát önellenőrzésre használó hallgatók tehát a végeredményeiket összehasonlíthatják a program által kalkulált értékekkel, arra viszont nem nyílik lehetőségük, hogy hibás végeredmény esetén, vagy akkor, ha elakadnának valahol a megoldásban, ingyenesen megtekintsék a megoldás menetét. Ez a „szűkszavúság”, a megoldási menet ismertetésének hiánya általánosságban véve az online kalkulátorok egyik legnagyobb gyengeségének tekinthető. Ezt az okozza, hogy az online kalkulátorok mögött számítógépes programok futnak, melyek nem esetileg, kritériumok alkalmazásával oldják meg a konvergenciával kapcsolatos feladatokat, hanem szoftverszinten sokkal könnyebben implementálható és szélesebb körben alkalmazható közelítő számítások segítségével. Ezért egyáltalán nem szabad meglepődni, ha a kalkulátor – bár egy sor összegét képes megfelelő pontossággal kiszámítani – azt már nem tudja megadni, hogy melyik kritériumot tudnánk az adott sorra eredményesen alkalmazni.

Be kell látnunk továbbá, hogy bár a kalkulátorok használata az otthoni feladatmegoldást segítheti, a gyakorlás élményszerűségét nem növeli meg számottevően, nem járul hozzá ahhoz, hogy huzamosabb ideig fenn tudjuk tartani a hallgatók figyelmét.

4.2. Khan Academy

A Khan Academy egy nonprofit szervezet, mely azzal a céllal jött létre, hogy *„ingyenes, világszínvonalú oktatást biztosítson minden tanulni vágyónak, bárhol is legyenek a világon”* (khanacademy.org). Előnye egyéb online tudástárakkal szemben, hogy a weboldalon néhány leckének már a magyar fordítása is megtekinthető. A sorozatok és sorok témaköréhez kapcsolódó leckét tartalmazó Kalkulus kurzusnak ugyanakkor jelen pillanatban még nem létezik magyar verziója, a tananyag csupán angolul érhető el. Az említett lecke 15 témakörre tagolódik, 3 köztes kvízzel és egy leckevégi nagy teszttel. A tananyag rövid, körülbelül ötperces magyarázó videókból és a hozzájuk kapcsolódó rövid tesztekből épül fel, ezek akár regisztráció nélkül is elérhetők a tanulni vágyók számára. Pozitívum, hogy a videók narrációja minden tananyagnál külön leírásban is szerepel. Bár a videók hossza meg sem közelíti a 45 percet, jellegüket tekintve hasonlítanak a frontális egyetemi előadásokra, a szóbeli magyarázattal párhuzamosan egy virtuális táblára kerülnek fel az adott témához kapcsolódó képletek és ábrák. A videók alatt található kommentszekcióban a regisztrált felhasználók feltehetik a kérdéseiket a tárgyalt témakörrel kapcsolatban, és a kapott válaszok értékelésére is adott a lehetőség.

A kvízek feleletválasztós és rövid választ igénylő kérdéseket egyaránt tartalmaznak. A példákhoz segítség is kérhető, ekkor a megoldás menete lépésről lépésre megjelenik a képernyőn. A kvíz kitöltésekor a helyes válaszok számának függvényében skillszinteket lehet ugrani, továbbá a hibáink alapján ajánlást kapunk arról, mely leckéket nézzük át még egyszer. A tanulók az előrehaladásukat a leckében egy összesítő oldalon követhetik nyomon, valamint a kvízek teljesítésével energiapontokat szerezhetnek.

A sorokhoz kapcsolódó tananyag tartalmazza bevezetésként a sorozatokat is, részletesebben taglalja a mértani sorok konvergenciáját és összegét, kitér a hiperharmonikus sorokra, továbbá a Cauchy-féle gyökkritériumot leszámítva valamennyi olyan konvergenciakritériumra, melyek a Matematikai analízis I. tárgy tananyagának részét képezik. Ezenkívül egyéb kritériumok, a hatványsorok, továbbá a Taylor- és Maclaurin-sorok is definiálásra kerülnek.

A Khan Academy oldalán fellelhető numerikus sorokkal kapcsolatos tudásanyag széles körű, erőssége a lényeg kiemelése és az egyes új koncepciók példákon keresztül történő bevezetése. A videós tananyagok rövid terjedelme, a teljes tudásanyag kis részekre tagolása segít abban, hogy a tanulók figyelme ne terelődjön másra gyakorlás közben, továbbá ez a szerkezet az egyes részek ismétlését, bizonyos videók újranézését is támogatja. A rövid videók könnyedén beilleszthetők a tanulók zsúfolt mindennapjaiba, reggeli kávézás közben vagy akár a buszon ülve is megtekinthetők. A tesztek és kvízek kitöltésével a hallgatók az egyetem falain kívül is visszajelzést kaphatnak a tudásszintjükről, a megszerzett ismereteikről. Élményszerűség szempontjából a Khan Academy sem nyújt sokkal többet egy egyetemi kurzusnál. Bár az energiapontok és skillek rendszere, az előrehaladási statisztika egy bizonyos szintig motivációs tényezőként hat a tanulókra, a leckék felépítésében továbbra is a frontális oktatási módszer köszön vissza. Megjegyzendő továbbá az is, hogy a konvergens majoráns és divergens minoráns sorok keresését, ami az elsőéves informatikai alapszakok hallgatói számára a zárthelyi dolgozatban a legnagyobb kihívást jelentette, a Khan Academy tematikus tesztjei csupán felületesen érintik, a majorálást-minorálást a legtöbb kvízben előre elvégzik, a tanulóknak csak a konvergenciát vagy a divergenciát kell meghatározniuk a feltüntetett relációk alapján.

A Khan Academy alkotói a gamifikált (játékosított) tanítási módszert valósították meg online környezetben. A gamifikáció számos esetben bizonyítottan hatékony tanítási forma a matematika oktatásában (Takács, 2023), azonban a hátrányairól sem szabad megfeledkeznünk (Toda et al., 2018; Queirós és Pinto, 2022).

4.3. Egyéb lehetőségek

A mértani sorokkal kapcsolatos problémák kiküszöbölésére érdemes olyan szöveges feladatokat megoldani a gyakorlatokon, amelyek megragadják a hallgatók figyelmét. Talán a legismertebb ilyen példa Akhilleusz és a teknős paradoxona, amellyel az ókorban Zénón a mozgás létét cáfolta (Mendelson, 1995; Southwell, 2021). Tapasztalataink alapján a szöveges feladatok megoldásánál a nehézséget az ábra hiánya jelenti, ezért érdemes olyan egyszerűbb feladatok kitűzésével kezdeni a mértani sorokhoz kapcsolódó szöveges feladatok megoldást, amelyek könnyen vizualizálhatók. Néhány példa:

- Legyen $r > 0$ tetszőleges valós szám. Egy félegyenesre mérjük fel a $2r$ távolságot, amit meghosszabbítunk a kezdőpontból felmért távolság felével, majd ehhez hozzáadjuk a meghosszabbítás felét és így tovább. Ezen távolságok, mint átmérők fölé váltakozva felül, majd alul félköröket rajzolunk. Mekkora az így keletkező kígyóvonal hossza? (Matematikai feladatgyűjtemény III., 1978)

- Egy gumilabdát 10 méter magasból ejtünk le. Minden alkalommal az előző magasság feléig pattan vissza. Mekkora utat jár be a labda, amíg nyugalomba kerül? (Mendelson, 1995)
- A legújabb kutatások alkalmával rábukkantak egy eleddig ismeretlen egyiptomi piramis romjaira. A piramis lépcsőzetes volt, sok emelettel, de hogy pontosan hány emeletes volt, azt nem tudni. Fennmaradt viszont egy töredékes építészeti leírás, miszerint „...az első emelet hossza és szélessége legyen 288 könyök, magassága 40 könyök... Minden emelet legyen arányosan kisebb, mint a megelőző... a harmadik emelet szélessége tehát már csak 200 könyök..." Hány könyök lehetett legfeljebb a piramis teljes magassága? (Gáspár, 2006)

Az informatika alapszakos hallgatók érdeklődése olyan feladatokkal is felkelthető, amelyekhez a kézzel rajzolt vázlatok helyett javasolhatjuk kódolást igénylő matematikai, mérnöki szoftverrel (MATLAB, GNU Octave, Julia, SageMath stb.) készített szemléltető ábrák létrehozását. Ez a lépés egy komplex feladat esetén didaktikailag kifejezetten előnyös, mert így már a rajzolás fázisában szükség van a megfelelő összefüggések jelentős hányadának felírására, felhasználására, továbbá a tantárgyközi kapcsolatok erősítésére jól kiaknázható lehetőségét teremt. Ezek a feladatok egyéni vagy csoportos projektek keretében is kiadhatók megoldásra a hallgatóknak, így nem jelent problémát a gyakorlatok időkorlátja sem, ha konzultációs lehetőséget biztosítunk a projektek gondozására. A projektek megvalósításánál a differenciálásra is lehetőség nyílik. Projektekhez javasolt feladatok:

- Egységsugarú körbe szabályos nyolcszöget írunk. Kiválasztjuk a nyolcszög egyik csúcsát, ebből a szomszédos csúcsba húzott sugárra merőlegest állítunk. A merőleges talppontjából ismét merőlegest állítunk a következő csúcsba húzott sugárra. Az eljárást így folytatjuk, mindig azonos irányban haladva. Határozzuk meg az n-edik és az $n+1$-edik lépésben kapott talppontokat összekötő szakaszok hosszát! Jelölje S_n az első n lépésben kapott szakaszok hosszának összegét! Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty} S_n$ határértéket! (Urbán, 1994)
- Egy a élű kocka lapjainak középpontjai egy oktaéder csúcsai. Ezen oktaéder lapjainak középpontjai ismét egy kockának a csúcsai. Ebbe a kockába az előbbi módon újabb oktaédert és ebbe ismét kockát képzelünk, és így tovább. Hányszorosa az így elképzelt kockák felszíneinek összege az oktaéderek felszínei összegének? (Matematikai feladatgyűjtemény III., 1978)
- A Koch-féle hópehelygörbék első tagja egy egységoldalú szabályos háromszög. Ennek minden oldalának kivesszük a középső harmadát és helyére egy kifelé álló kisebb szabályos háromszöget helyezünk. Így kapjuk a második Koch-féle hópelyhet. Az n-edik hópehely is egymáshoz kapcsolódó egyenlő hosszú szakaszokból álló zárt töröttvonal, amiből úgy kapjuk az $n+1$-edik hópelyhet, hogy minden szakaszának középső harmadára kifelé szabályos háromszöget állítunk. Mekkora a Koch-féle hópehely kerülete és területe? (Hegyvári et al., 2013)

Fontos mozzanat a projektalapú tanulásnál, hogy a hallgatók lehetőséget kapjanak arra, hogy az összes projektbe bepillantást nyerjenek, ne csak abba az egybe, amin dolgoztak, tehát a projektek zárását egy bemutatóval érdemes összekötni.

A tanulás élményszerűvé tételére a projektalapú tanulás biztosítása mellett didaktikai játékokon keresztül is lehetőség nyílik, gondolunk itt nemcsak az infokommunikációs eszközökön futó alkalmazásokra, hanem a fizikai társasjátékokra is. Az internet világában élő Z generációs hallgatóknál igen eredményesen használhatók a játékalapú tanulási módszerek (Körei et al., 2021). A fizikai játékokkal a gyakorlati órák alatt akkor is játszhatnak a hallgatók, ha az órát nem gépteremben tartják. Bár a trigonometrikus függvények fontosabb azonosságaihoz (Dudás et al., 2019) és a valós számsorozatok határértékének számolásához (Szilágyi és Körei, 2021; Szilágyi és Körei, 2022; Szilágyi et al., 2022) már vannak a Miskolci Egyetemen saját fejlesztésű didaktikai társasjátékok, a sorokhoz kapcsolódóan még nem készült el hasonló játék, mert a fejlesztői munka meglehetősen időigényes folyamat. A felmérésből kapott visszajelzések után nyilvánvalóvá vált, hogy tovább nem halogatható ennek a témakörnek a játékos alapokra helyezése, így nekiláttunk egy kooperatív didaktikai játék megalkotásának.

5. Összefoglalás

A 2022/23-as tanév őszi félévében lebonyolított hárompilléres felmérés alátámasztotta azt a sejtést, miszerint az elsőéves informatikai alapszakok hallgatóinak jelentős hányada idegenkedik a numerikus sorokkal kapcsolatos feladatok megoldásától, a konvergenciakritériumok használatában bizonytalanok, a sorozat és a sor fogalmát gyakran összekeverik. A legtöbb probléma az összehasonlító kritériumok használatakor jelentkezik, de gondot okoz a sorösszeg kiszámítása és az összetett formulák egyszerűsítése is. A felmérésből látható továbbá az is, hogy a zárthelyi dolgozaton elért eredmények mielőbbi javításra szorulnak, hiszen a hallgatók által átlagosan elért 15 pont messze elmarad az elégségeshez szükséges szinttől (25 pont). Bár a lemorzsolódás csökkentése érdekében a félév közben számos pluszpont szerzésére biztosítunk lehetőséget, fontos szempont a kurzus lezárásával kapcsolatban, hogy a Matematikai analízis I. szilárd alapokat nyújtson a ráépülő Matematikai analízis II. tavaszi féléves tantárgy teljesítéséhez és megadja az informatikai alapszakok hallgatóinak azokat a matematikai alapismereteket, melyekre későbbi tanulmányaik, munkájuk során szükségük lehet. Ezen alapismeretek közé tartozik a numerikus sorok konvergenciájának vagy divergenciájának meghatározása. Éppen ezért szükség van olyan tanulást támogató eszközök használatára – akár a tantárgy gyakorlatainak keretein belül, akár otthoni feladatként –, amelyek közelebb hozzák a hallgatókhoz a numerikus sorok és a végtelen koncepcióját, segítenek megérteni a sorok jelentőségét, relevanciáját az informatika világában. Fontos szempont ugyanakkor az is, hogy ezek az eszközök hosszú távon is képesek legyenek fenntartani a hallgatók figyelmét és sikerélményt nyújtsanak. Ilyen tanulást támogató eszköz például a WolframAlpha, vagy a Khan Academy. Úgy gondoljuk, hogy a projektalapú és a játék alapútanulás eredményességét ezen a területen is érdemes lenne kihasználni, gondolunk itt olyan projektek kialakítására, illetve didaktikai játékok fejlesztésére, amelyekkel a vizsgált témakör tanítási-tanulási folyamata eredményesen javítható.

6. Köszönetnyilvánítás

A Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-1 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS MINISZTÉRIUM

Irodalom

[1] Takács R., Takács Sz., T. Kárász J., Horváth Z., Oláh A. (2022). Oktatási reform hatékonyságának vizsgálata – Tantárgyak nehézségi elemzése IRT-modell segítségével programtervező informatikus hallgatók körében. *Magyar Pszichológiai Szemle*, 77, 209–229. **https://doi.org/10.1556/0016.2022.00014**

[2] Varga, J. (1998). *Oktatás-gazdaságtan*. Közgazdasági Szemle Alapítvány. http://www.kszemle.hu/kiadvany/Varga_-_Oktatas-gazdasagtan/.

[3] Nagy, K. (2016). Az oktatás gazdasági értékei. *Opus et Educatio*, 3 (3), 312–323. **https://doi.org/10.3311/ope.106**

[4] *Oktatási programok – Alapképzési szakok (BSc, BProf)*. Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar. (2023. február 21.) https://gepesz.uni-miskolc.hu/alapszak.

[5] Forgács A. (2017). *Fejezetek a kommunikáció szociálpszichológiájából*. Budapest, Akadémiai Kiadó, **https://doi.org/10.1556/9789634541059.**

[6] Youn, S., Roberts, K., Swanson, I., Hankinson, A. (2017). Evidence-based survey design: the use of a midpoint on the Likert scale. *Performance Improvement*, 56 (10), 15–23. **https://doi.org/10.1002/pfi.21727**

[7] Prensky, M. (2001). Digital Natives, Digital Immigrants Part 1. *On the Horizon*, 9 (5), 1–6. **https://doi.org/10.1108/10748120110424816**

[8] Körei, A., Szilágyi, S., Török, Z. (2021). Integrating didactic games in higher education: Benefits and challenges. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 19 (1), 1–15. **https://doi.org/10.5485/TMCS.2021.0517**

[9] Wolfram|Alpha: *Computational Intelligence*. Wolfram|Alpha. https://www.wolframalpha.com/.

[10] *Khan Academy*. https://www.khanacademy.org.

[11] Takács A. M. (2023). Élmény – Gamifikáció – Matematika oktatás: Moodle. *Danubius Noster*, 9 (1), 49–58., **https://doi.org/10.55072/DN.2023.1.49.**

[12] Toda, A., Valle, P. H., Isotani, S. (2018). *The dark side of gamification: An overview of negative effects of gamification in education*. **https://doi.org/10.1007/978-3-319-97934-2_9**

[13] Queirós, R., Pinto, M. (2022). The dangers of gamification. In: Guarda, T., Portela, F., Augusto, M. F. (eds.). *Advanced Research in Technologies, Information, Innovation and Sustainability. ARTIIS 2022*, Springer, Cham., **https://doi.org/10.1007/978-3-031-20319-0_12.**

[14] Mendelson, E. (1995). *Matematika példatár: 3000 megoldott feladat*. Budapest, Panem Kft.

[15] Southwell, G. (2021). *Paradoxonok*. Budapest, Scolar Kiadó.

[16] *Matematikai feladatgyűjtemény III.* (1978). Budapest, Tankönyvkiadó.

[17] Gáspár, Cs. (2006). *Analízis*. Győr, Széchenyi István Egyetem.

[18] Urbán, J. (1994). *Határértékszámítás*. Szeged, MOZAIK Oktatási Stúdió.

[19] Hegyvári N., Hraskó A., Korándi J., Török J. (2013). *Elemi matematika feladatgyűjtemény*. http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/78.pdf.

[20] Dudás M., Lengyelné Szilágyi S., Piller I. (2019). Az Ékkővadászok elnevezésű matematikai készségfejlesztő kártyajátékok létrehozását támogató alkalmazás bemutatása. *Gradus*, 2019/6 (4), 17–27.

[21] Szilágyi, S., Körei, A. (2021). "LimStorm" – A didactic card game for collaborative math learning for Gen Z students. In: Auer, M.E., Rüütmann, T. (eds.). *Educating engineers for future industrial revolutions. ICL 2020.* Springer, Cham., **https://doi.org/10.1007/978-3-030-68198-2_42.**

[22] Szilágyi, S., Körei, A. (2022). Using a math card game in several ways for teaching the concept of limit. In: Auer, M. E., Hortsch, H., Michler, O., Köhler, T. (eds.). *Mobility for smart cities and regional development – Challenges for higher education. ICL 2021.* Springer, Cham. **https://doi.org/10.1007/978-3-030-93904-5_85**

[23] Körei A., Szilágyi S., Török Z. (2022). Az informatikus hallgatók tanítási-tanulási folyamatának javítása játékalapú tanulással: A limeszelős didaktikai játék fejlesztésének és eredményeinek bemutatása. *Multidiszciplináris Tudományok*, 12 (1), 26–45. **https://doi.org/10.35925/j.multi.2022.1.3**