

STABIL, EXPLICIT ÉS IMPLICIT NUMERIKUS ALGORITMUSOK TESZTELÉSE VEZETÉSES HŐÁTVITELI FELADATOKRA

Nagy Ádám 

Tanársegéd, Miskolci Egyetem GÉIK, Fizikai és Elektrotechnikai Intézet, Fizikai Tanszék
3515 Miskolc-Egyetemváros, e-mail: adam.nagy@uni-miskolc.hu

Kovács Endre 

Egyetemi docens, Miskolci Egyetem GÉIK, Fizikai és Elektrotechnikai Intézet, Fizikai Tanszék
3515 Miskolc-Egyetemváros, e-mail: endre.kovacs@uni-miskolc.hu

Házy Attila 

Egyetemi docens, Miskolci Egyetem GÉIK, Matematikai Intézet, Alkalmazott Matematikai Tanszék
3515 Miskolc-Egyetemváros, e-mail: attila.hazy@uni-miskolc.hu

Absztrakt

Ebben a munkánkban főként nemrég közölt explicit és stabil numerikus módszereket ismertetünk és hasonlítunk össze egymással és a szakirodalomból ismert explicit és implicit módszerekkel a hővezetési egyenlet megoldására. Ezen módszerek konvergenciáját és számítási teljesítményét megvizsgáltuk kétdimenziós, véletlen számok segítségével előállított inhomogén rendszereken végzett esettanulmányok segítségével. Egy közepesen merev, sőt egy erősen anizotrop rendszeren végzett numerikus tesztek eredményei azt mutatták, hogy az explicit numerikus módszerek jobban teljesítenek a széles körben alkalmazott implicit módszereknél.

Kulcsszavak: hővezetési egyenlet, explicit módszerek, implicit módszerek, merev számítási feladatok, feltétel nélküli stabilitás

Abstract

In this work, we present and compare recently published explicit and stable methods with each other and an explicit and some implicit methods which are known from the literature for solving the heat conduction equation. We examined the convergence and computational performance properties of these methods by performing case studies on two-dimensional inhomogeneous systems generated using random numbers. Numerical case studies which we performed on a moderately stiff system, and even on a strongly anisotropic system showed that the explicit numerical methods outperform to the widely used implicit methods.

Keywords: heat equation, explicit methods, implicit methods, stiff problems, unconditional stability

1. Bevezetés

A természetben, illetve a műszaki rendszerekben számos különféle transzportfolyamat játszódik le, ezek közül az egyik legközismertebb példa a diffúzió, amely a koncentrációkülönbség következtében létrejövő részecsketranszportot jelent; vagy a vezetések hőátvitel, amely a szilárd testekben levő hőmérséklet-különbség hatására lejátszódó energiáttranszportot jelent. Mind a diffúzió, mind a vezetések

hőátvitel az alábbi másodrendű lineáris parabolikus parciális differenciálegyenlettel (Kovács et al., 2018) modellezhető:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u, \quad (1)$$

ahol $u = u(\vec{x}, t)$ a helytől és az időtől függő ismeretlen függvény. Diffúzió esetében az u függvény a koncentrációt, a vezetések hőátvitel esetén a hőmérsékletet jelenti. Az α egy pozitív állandó, amelynek a neve diffúziós állandó, a hővezetés esetén pedig a termikus diffúzióviszonyos.

Speciálisan a vezetések hőátvitel esetében az iménti (1) parciális differenciálegyenletet kiegészítjük egy helytől és időtől függő $q = q(\vec{x}, t)$ hőforrás taggal:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \alpha \nabla^2 u + q, \quad (2)$$

amely az időegység alatt az anyagban létrejövő hőmennyiséget veszi figyelembe, ugyanis az anyagon belül esetlegesen lejátszódó kémiai reakciók vagy a radioaktív bomlások hőképződéssel járó folyamatok. Az előbbi (2) egyenletben szereplő α termikus diffúzióviszonyosról feltettük, hogy az állandó, így a (2) kizárólag homogénnek tekinthető rendszerekre alkalmazható. Azon rendszerek esetében, amelyek fizikai, kémiai tulajdonságai a hely függvényében változhatnak az előbbi (2) hővezetési egyenlet helyett, annak egy általánosított alakját szükséges alkalmazni:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{c\rho} \nabla(k\nabla u) + q, \quad (3)$$

ahol $u = u(\vec{x}, t)$ jelenti a hely- és az idő függvényében keresett hőmérsékletet; $c = c(\vec{x}, t)$, $\rho = \rho(\vec{x}, t)$, $k = k(\vec{x}, t)$ ismertnek tekinthető függvények, amelyek megadják az anyag fajhőjét, tömegsűrűségét és a termikus konduktivitást, mint helynek és az időnek a függvényeit.

A (3) parciális differenciálegyenlet, ill. annak különféle általánosításai alapvető jelentőségűek, hiszen a falakban (Kareem et al., 2022), vagy a félvezetőkben (Blaj et al., 2017) lejátszódó hővezetési folyamatok modellezhetőek a segítségükkel. A széles körben történő alkalmazás ellenére az analitikus megoldások (Mojtabi et al., 2015; Barna et al., 2020; Barna et al., 2010; Mátyás et al., 2021) nagy része kizárólag a fizikailag homogénnek tekinthető rendszert leíró (2) hővezetési egyenletre, vagy annak valamely általánosított esetére vonatkoznak. Az inhomogén rendszereket leíró (3) általánosított hővezetési egyenlet csak speciális kezdő- és peremfeltételek, illetve együttható függés esetén oldható meg analitikusan (Zoppou et al., 1999), így a (3) egyenlet numerikus módszerek alkalmazásával oldható meg.

A műszaki tekintetben realizisztikus rendszerek fizikai paraméterei gyakran kis távolságokon belül akár több nagyságrenden keresztül is változhatnak (Lienhard et al., 2017; Zimmerman, 2018), így a (3) egyenlet diszkrétizációja következtében előálló mátrixelemek értékei ugyancsak több nagyságrenden keresztül vehetnek fel értékeket, ami azt jelenti, hogy egy merev (angolul: „stiff”) számítási problémát kell megoldanunk.

A numerikus módszerek két jól elkülöníthető típusba sorolhatóak: az explicit és az implicit módszerekre. Az explicit módszereknek számos előnye van, mint például könnyen alkalmazhatóak és alacsony memóriakövetelményűek. Viszont a hagyományos explicit módszerek csak feltételesen stabilak, ami azt jelenti, hogy a numerikus megoldás során csak olyan időlépésközök alkalmazhatóak, amelyek az úgynevezett „CFL-limit” alatt vannak. Ez a „CFL-limit” sűrű térbeli háló, ill. erősen merev problémák esetén megle-

hetősen kis értékeket vehet fel, aminek a következtében a hagyományos explicit módszerek csak nehezen, vagy egyáltalán nem használhatóak. Ezen nehézségek elkerülése érdekében széles körben alkalmaznak implicit módszereket (Mascagni, 1990; Mbroh et al., 2021) a (3) és ahhoz hasonló egyenletek megoldásához. Az implicit módszerek többnyire feltétel nélkül stabilak, viszont azok alkalmazásához nagy méretű lineáris egyenletrendszerek megoldására van szükség minden egyes időlépés során. Ezen egyenletrendszerek megoldása időigényes és memóriagényes folyamat, mivel általában az egyenletrendszer együtthatómátrixa egy ritka mátrix és így annak az inverze egy sűrű mátrix. Léteznek olyan módszerek, amelyek részben impliciték és részben expliciték, de ezek nem teljes egészében különbözik ki az implicit módszerek imént említett hátrányait (Singh et al., 2022; Beuken et al., 2022).

A munkánk célkitűzése, hogy bemutassunk olyan explicit módszereket, amelyek kedvező stabilitási tulajdonságokkal rendelkeznek, és így erős versenytársai az imént említett implicit módszereknek a hővezetési problémák megoldása esetén. Több kutatás irányul arra, hogy jól használható explicit módszereket adjanak meg a hővezetési egyenlet, illetve annak általánosított alakjainak a megoldására (Appadu, 2017; Karahan, 2007; Sanjaya, 2017; Pourghanbar et al., 2020; Harley, 2010; Al-Bayati et al., 2011; Nwaigwe, 2022; Savović et al., 2022; Berger et al., 2020). A kutatócsoportunk az elmúlt években több olyan kedvező stabilitási tulajdonságokkal rendelkező teljes mértékben explicit módszereket fejlesztett ki és tesztelt különféle rendszereken, amelyek segítségével viszonylag rövid futási idő alatt nagy pontossággal megoldhatjuk a hővezetési egyenletet és annak az általánosításait merev problémákra is. Ezen módszereket nemrégiben publikáltuk angol nyelvű cikkekben (Kovács et al., 2018; Kovács, 2020; Saleh et al., 2020; Saleh, Nagy et al., 2020; Nagy, Saleh et al., 2021; Nagy, Omle et al., 2021; Kovács, Nagy et al., 2021; Jalghaf et al., 2021; Kovacs, 2020; Kovács, Nagy, Saleh, 2022; Koics et al., 2022; Majár et al., 2022; Omle, 2021; Saleh, Kovács, Nagy, 2023). A cikkünkben bemutatott nemrég publikált explicit módszereket megvizsgáljuk kétdimenziós inhomogén rendszerekre és összehasonlítjuk azokat implicit módszerekkel. A cikk a következő fejezetekre tagolódik: az első fejezetben bemutatjuk a megvizsgált problémát és annak a motivációit; a második fejezetben ismertetjük az általánosított hővezetési egyenlet tér-diszkretizációját; a harmadik és a negyedik fejezetekben röviden bemutatjuk azokat az explicit és az implicit módszereket, amelyekkel numerikusan megoldjuk a (3) általánosított hővezetési egyenletet; az ötödik fejezetben ismertetjük egy közepesen merev, illetve egy erősen anizotrop rendszeren végzett esettanulmányok eredményeit; és az utolsó hatodik fejezetben összefoglaljuk a kapott eredményeket.

2. Az általánosított hővezetési egyenlet térdiszkretizációja

2.1. Egydimenziós inhomogén rendszer egyenközű térhálóval való lefedése

Az első lépésben a (3) általánosított hővezetési egyenletet tekintjük egy inhomogén egydimenziós rendszerre a $\Omega = (x_0, x_N) \times (t_0, t_T)$ tartományon. A (3) egyenletben szerepel a keresett $u = u(x, t)$ függvénynek az x térváltozó szerinti másodrendű parciális deriváltja, amelyet egy tetszőleges (x, t) pontban a másodrendű centrális differencia formula felhasználásával közelítünk:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \approx \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} + \frac{u(x - \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} \right), \quad (4)$$

ahol $0 < \Delta x \ll |x_N - x_0|$ egy kicsiny megváltozása az x térváltozónak. A (4) egyenlettel megadott közelítő formulát felhasználva kapjuk az alábbi közelítő parciális differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{1}{c(x)\rho(x)} \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(k(x) \cdot \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} + k(x) \cdot \frac{u(x - \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} \right) + q(x). \quad (5)$$

A második lépésben egyenközű térhálót veszünk fel és csomóponti változókat vezetünk be. Az ismeretlen $u = u(x, t)$ függvény értékeit az alábbi diszkrét x_i csomópontokban közelítjük:

$$\bar{\Omega}_{\Delta x} = \{x_i \mid x_i = x_0 + i\Delta x, \quad i = 0, \dots, N\}, \quad (6)$$

ahol Δx két szomszédos csomópont távolságát jelöli, N a csomópontok száma, és $(N - 1) \cdot \Delta x = x_N - x_0$. Az (5) közelítő parciális differenciálegyenletben szereplő $u = u(x, t)$ kétváltozójú ismeretlen függvény helyett N darab egyváltozós függvényt vezetünk be, melyek az egyes x_i csomópontok hőmérsékleteit adják meg, mint az idő függvényét:

$$u(x_i, t) \equiv u_i(t). \quad (7)$$

A fajhőt, a tömegsűrűséget és a hőforrás tagot megadó folytonos függvények helyett, azoknak az adott i -edik csomóponti értékeiket használjuk fel:

$$c(x_i) \equiv c_i, \quad \rho(x_i) \equiv \rho_i, \quad q(x_i) \equiv q_i. \quad (8)$$

A csomópontok köré azonos hosszúságú cellákat veszünk fel úgy, hogy a csomópontok x_i koordinátái legyenek egyúttal a cellák középpontjai is! A bevezetett cellákhoz definiáljuk a következő cellákra vonatkoztatott mennyiségeket: A tetszőleges i -edik cellára vonatkoztatott $\langle u(x, t) \rangle_i$ hőmérsékleten az $u = u(x, t)$ függvénynek az adott cellára vett átlagát értjük. Az előre rögzített Δx cellahosszról felteszük, hogy az kellően kis értéket vesz fel ahhoz, hogy bármely cellán belül a hőmérséklet helyfüggését elhanyagolhatjuk, így a hőmérséklet cellára vett átlaga jól közelíthető a cellaközépponti hőmérséklettel, ami egyben az i -edik csomópont $u_i(t)$ hőmérséklete is:

$$\langle u(x, t) \rangle_i = \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i + \Delta x/2} u(x', t) dx' \approx \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i + \Delta x/2} u(x_i, t) dx' \approx u_i(t). \quad (9)$$

A tetszőleges i -edik cellára vonatkoztatott $\langle c(x) \rangle_i$ fajhő, $\langle \rho(x) \rangle_i$ sűrűség és a $\langle q(x) \rangle_i$ hőforrástagmennyiségeket, hasonlóan az adott cellára vett átlagaikkal értelmezzük. Ismételten feltesszük, hogy a fajhőt, a sűrűséget és a hőforrás tagot megadó függvények bármely cella esetében, azok cellán belüli helyfüggése elhanyagolható; azaz $c(x) \approx c(x_i)$, $\rho(x) \approx \rho(x_i)$, $q(x) \approx q(x_i)$ közelítések tehetőek, hogyha $(x_i - \Delta x/2) \leq x \leq (x_i + \Delta x/2)$, amiből következik:

$$\langle c(x) \rangle_i \approx c_i, \quad \langle \rho(x) \rangle_i \approx \rho_i, \quad \langle q(x) \rangle_i \approx q_i. \quad (10)$$

A két szomszédos cella közötti termikus konduktivitást pedig úgy vezetjük be, hogy a $k = k(x)$ függvény értékeit a megfelelő cellahatáron vesszük figyelembe, például $k_{i, i \pm 1}$ -en az i -edik és az $(i \pm 1)$ -edik cellák közötti termikus konduktivitást értjük és azokat a $k = k(x)$ függvénynek az $x_i - \Delta x/2$, illetve az $x_i + \Delta x/2$ helyeken felvett értékeivel közelítjük:

$$k_{i, i+1} \approx k\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right), \quad k_{i-1, i} \approx k\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}\right). \quad (11)$$

Az (5) közelítő parciális differenciálegyenletben szereplő mennyiségek helyébe behelyettesítjük a nekik megfelelő cellára vonatkoztatott mennyiségeket, a (9), a (10) és a (11) egyenletekben megfogalmazott közelítések figyelembevételével azt kapjuk, hogy az i -edik cella hőmérséklet deriváltját az alábbi közönséges differenciálegyenlet segítségével írhatjuk le:

$$\frac{d}{dt}u_i(t) = \frac{1}{c_i\rho_i\Delta x} \left[k_{i,i+1} \cdot \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{\Delta x} + k_{i-1,i} \cdot \frac{u_{i-1}(t) - u_i(t)}{\Delta x} \right] + q_i. \quad (12)$$

Az iménti (12)-ben megfogalmazott közönséges differenciálegyenlet, bármely $i = 2, \dots, N-1$ cellára felírható, így az (5) egyenletben szereplő közelítő parciális differenciálegyenletet helyettesítjük N darab csatolt közönséges differenciálegyenlettel.

2.2. Egydimenziós inhomogén rendszer nem egyenközű térhálóval való lefedése

A most következő szakaszban a (12) közönséges differenciálegyenletek alkalmazhatóságát általánosítjuk tetszőleges, nem feltétlen egyenközű egydimenziós térrács esetére. Mivel az előző szakaszban bemutattuk az egydimenziós inhomogén rendszer egyenközű térhálóval való lefedésének a példáján a cellára vonatkoztatott mennyiségek konstrukcióját, így ebben a szakaszban már cellára vonatkoztatott változókat tekintünk. Legyen

$$\bar{\Omega}_\xi = \{x_i \mid x_i = x_0 + \xi_i(x_N - x_0), \quad i = 0, \dots, N\}, \quad (13)$$

ahol az egyes x_i koordináták az előre rögzített cellaközéppontok helyeit adják meg és a ξ_i egy rendezett számsorozat i -edik eleme és feltesszük, hogy $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{N-1} < \xi_N = 1$. Két cellaközéppont közti távolságot – például az i -edik és az $(i \pm 1)$ -edik cellaközéppont esetén – az alábbi egyszerű módon számítjuk ki:

$$d_{i,i-1} = x_i - x_{i-1}; \quad d_{i+1,i} = x_{i+1} - x_i. \quad (14)$$

A tetszőleges i -edik cella Δx_i cellahosszát a szomszédos cellaközéppontoktól mért $d_{i,i-1}$, $d_{i,i+1}$ távolságok súlyozott átlagával számíthatjuk ki:

$$\Delta x_i = \frac{1}{2}d_{i,i-1} + \frac{1}{2}d_{i,i+1} = \frac{1}{2}x_{i-1} + \frac{1}{2}x_{i+1}. \quad (15)$$

A (12) egyenletben a szögletes zárójelben szereplő törtek nevezőjébe a korábban egyenközű Δx cellaközéppont-távolságok helyébe beírjuk a nem egyenközű térháló esetén érvényes $d_{i,i-1} = x_i - x_{i-1}$ és a $d_{i+1,i} = x_{i+1} - x_i$ cellaközépponti távolságokat. Továbbá egy újabb közelítést téve, az $1/(c_i\rho_i\Delta x)$ együtthatóban levő Δx helyébe az egyes Δx_i cellahosszúságokat írva kapjuk az alábbi közönséges differenciálegyenletekből álló csatolt egyenletrendszert:

$$\frac{d}{dt}u_i(t) = \frac{1}{c_i\rho_i\Delta x_i} \left(k_{i,i+1} \cdot \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{d_{i,i+1}} + k_{i-1,i} \cdot \frac{u_{i-1}(t) - u_i(t)}{d_{i,i-1}} \right) + q_i, \quad (17)$$

amelynek a segítségével az i -edik cella hőmérséklet deriváltját számíthatjuk egydimenziós inhomogén rendszer esetén, melyet nem egyenközű térhálóval fedtünk le.

2.3. Egytől magasabb dimenziójú inhomogén rendszer nem egyenközű térhálóval való lefedése

Az utolsó lépésben az előbbi (17) egyenletek alkalmazhatóságát kiterjesztjük kettő- vagy háromdimenziójú tetszőleges elrendezésű térhálóval lefedett inhomogén rendszer esetére. A célunk eléréséhez továbbra is egy egydimenziós nem egyenközű hálóval lefedett inhomogén rendszert veszünk figyelembe. Ezen rendszerre vonatkozó (17) egyenletben szereplő fizikai mennyiségek helyett új mennyiségeket vezetünk be, azt olyan alakra hozzuk, amely könnyedén általánosítható magasabb dimenziójú tetszőleges elrendezésű térhálóval lefedett rendszer esetére is.

Bevezetjük az i -edik cellát jellemző C_i hőkapacitást, amelyet a $C_i = c_i \rho_i \Delta x_i$ egyszerű összefüggéssel számítunk ki. A villamos ellenállás analógiájára definiáljuk a konduktív termikus rezisztenciámmennyiséget és ezt az alábbi formulával határozzuk meg két szomszédos, például az i -edik és az $(i \pm 1)$ -edik cellákat tekintve:

$$R_{i,i\pm 1} \approx \frac{d_{i,i\pm 1}}{k_{i,i\pm 1} \cdot A_{i,i\pm 1}}, \quad (18)$$

ahol $A_{i,i\pm 1}$ a szomszédos cellák által átfedett közös felületet jelenti. Az egydimenziójú rendszer esetében az $A_{i,i\pm 1}$ átfedő felületeket egységnyi nagyságúaknak tekinthetjük. Ez utóbbi újonnan konstruált, cellára vonatkoztatott mennyiséget behelyettesítve az előbbi (17) egyenletbe, kapjuk az i -edik cella hőmérsékletderiváltját megadó közönséges differenciálegyenletrendszernek az alábbi, új alakját:

$$\frac{d}{dt} u_i(t) = \frac{u_{i-1}(t) - u_i(t)}{R_{i-1,i} C_i} + \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{R_{i+1,i} C_i} + q_i, \quad (19)$$

Hangsúlyozzuk, hogy az eddigiekben egy egydimenziójú inhomogén rendszer nem egyenközű térhálóval való lefedését valósítottuk meg. Ennek eredményét az iménti (19) kifejezés adja meg, amely már könnyedén általánosítható arra az esetre, amikor egy magasabb dimenziójú inhomogén rendszert fedünk le egy nem-egyenközű, tetszőleges elrendezésű térhálóval:

$$\frac{d}{dt} u_i(t) = \sum_{j \in I_i} \frac{u_j(t) - u_i(t)}{R_{j,i} C_i} + q_i, \quad (20)$$

ahol az i index a magasabb dimenziójú, inhomogén rendszer celláit „címkézi”. I_i -n az i -edik cellával szomszédos cellák indexeinek a halmazát értjük, tehát az iménti (20) egyenletben szereplő összegzés a megfelelő szomszédos cellákra történik. A (20) kifejezés megadható egy tömörebb mátrixegyenlet formájában is:

$$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = M \vec{u}(t) + \vec{q}, \quad (21)$$

ahol $\vec{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)]^T$; $\vec{q} = [q_1, q_2, \dots, q_N]^T \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ vektorok és az $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ általában egy ritka mátrix, amelynek a mátrixelemei a következő kifejezésekkel adhatóak meg:

$$m_{i,j} = \frac{1}{C_i R_{i,j}}, \quad m_{i,i} = -\sum_{j \in I_i} \frac{1}{C_i R_{i,j}}, \quad (22)$$

ahol a (22)-ben az $m_{i,i}$ diagonális elemet megadó kifejezésben levő összegzés az i -edik cella szomszédjaira vonatkozik. A térdiszkrétizáció ezen módjáról a (Munka et al., 2001) könyv 5. fejezetében lehet bővebb információt találni.

3. Az explicit módszerek rövid ismertetése

A most következő 3. fejezetben nemrég publikált explicit módszereket, és egy a szakirodalomból ismert módszert mutatunk be röviden, amelyek segítségével a közönséges differenciálegyenletekből álló (21) csatolt egyenletrendszert oldjuk meg numerikusan feltéve, hogy az M mátrix elemeit már meghatároztuk az előző 2. fejezetben ismertetett térdiszkretizációs eljárás megvalósítása során és továbbá ismerjük az $u_0(\bar{x}) = u(\bar{x}, t = t_0)$ kezdő időpillanatbeli hőmérsékleteket, mint helynek a függvényét.

Ezen módszerek mindegyike alkalmazható tetszőleges elrendezésű térbeli rácsra. Az inhomogén rendszerünk celláit továbbra is az i index „címkézi” és feltesszük, hogy az alábbi egyenközi idődiszkretizációt alkalmazzuk:

$$\bar{\Omega}_h = \{t_n \mid t_n = t_0 + nh, \quad n = 1, \dots, T\}, \quad (23)$$

ahol h az időlépést, T az időlépések számát jelenti és $T \cdot h = t_T - t_0$. A tér- és idődiszkretizáció eredményeképpen az ismeretlen hőmérsékleteket az előre megválasztott helyeken közelítjük: $u(\bar{x}_i, t_n) \approx u_i^n$.

3.1. A konstans- és a lineáris szomszéd közelítéseken alapuló LNe-, CCL- és CLL-módszerek bemutatása

Ezen egy lépéses módszerek megismeréséhez bemutatjuk a konstans szomszéd és a lineáris szomszéd közelítéseket.

A *konstans szomszéd* közelítés (Kovács, Nagy, Saleh, 2021) azon alapszik, hogy a (21) csatolt közönséges differenciálegyenletek megoldásánál, azzal az egyszerűsítő feltevéssel élünk, hogy az i -edik cella $(n+1)$ -edik időlépésen belüli u_i^{n+1} ismeretlen cellahőmérséklet kizárólag a szomszédos cellák aktuális időlépésbeli hőmérsékleteitől függ, és hogy azok hőmérsékletei egy h időlépés alatt állandónak tekinthetők. A közelítő feltevésnek köszönhetően a (21) csatolt közönséges differenciálegyenletekből álló rendszert szétcsatoljuk és az i -edik cella hőmérséklet deriváltját a következő lineáris egyenlettel közelítjük:

$$\frac{d}{dt} u_i(t) = a_i^n + m_{ii} u_i(t), \quad (24)$$

ahol az ismeretlen $u_i(t)$ hőmérséklet az időnek a folytonos függvénye és bevezetésre került az a_i^n aggregált mennyiség, amelyet a szomszédos cellákra történő összegzéssel és hőforrás tag figyelembevételével számítunk ki:

$$a_i^n = \sum_{j \in I_i} m_{i,j} u_j^n + q_i. \quad (25)$$

A (24) kifejezésben megjelenő szétcsatolt közönséges differenciálegyenleteknek az analitikus megoldása ismert:

$$u_i(t) = u_i^n \cdot e^{m_{ii} t} - \frac{a_i^n}{m_{ii}} \cdot (1 - e^{m_{ii} t}), \quad (26)$$

amelyet arra használunk fel, hogy a következő $(n+1)$ -edik időlépésen belüli új u_i^{n+1} cellahőmérsékleteket közelítő iteratív formulát kapjunk:

$$u_i^{n+1} = u_i^n \cdot e^{m_{ii}h} - \frac{a_i^n}{m_{ii}} \cdot (1 - e^{m_{ii}h}). \quad (27)$$

A (26) egyenlettel megadott explicit kifejezés önmagában is felhasználható a (21) mátrix-egyenlet megoldására. A módszert a (Kovács, Nagy, Saleh, 2021) cikkben konstans szomszéd módszer vagy rövidebben CNe-módszer néven publikálták.

A *lineáris szomszéd közelítés* módszere (Kovács, Nagy, Saleh, 2021) annyiban több ennél, hogy a (21) egyenletrendszer direkt megoldása helyett, ismételten egy egyszerűsítéssel élünk és feltesszük, hogy az ismeretlen u_i^{n+1} cellahőmérséklet egyedül a szomszédos cellák aktuális időlépésen belüli hőmérsékleteitől (u_j^n és $j \in I_i$) függ, és hogy azok egy h időlépés során az időben lineárisan változnak meg. Megjegyezzük, hogy a „lineáris szomszéd” közelítés alkalmazásának a feltétele, hogy egy másik numerikus módszer segítségével az $(n+1)$ -edik időlépésre vonatkozó $u_i^{n+1, \text{Pred}}$ prediktor hőmérsékletet már kiszámítottuk minden egyes cellára vonatkozóan! Az $u_i^{n+1, \text{Pred}}$ hőmérsékletek segítségével kiszámítjuk az „aggregált mennyiség” prediktor értékét:

$$a_i^{n+1, \text{Pred}} = \sum_{j \in I_i} m_{i,j} u_j^{n+1, \text{Pred}} + q_i. \quad (28)$$

A (25) egyenlettel bevezetett a_i^n aggregált mennyiség és a (19) egyenlettel megadott $a_i^{n+1, \text{Pred}}$ prediktor érték felhasználásával kiszámítjuk az s_i^n effektív meredekséget (angolul: „effective slope”):

$$s_i^n = \frac{a_i^{n+1, \text{Pred}} - a_i^n}{h}. \quad (29)$$

Ezt felhasználva, a (21) csatolt differenciálegyenlet-rendszert az alábbi lineáris közelítéssel szétcsatoljuk:

$$\frac{d}{dt} u_i(t) = s_i^n t + a_i^n + m_{ii} u_i(t). \quad (30)$$

Az előbbi (30) lineáris differenciálegyenletek analitikus megoldása szintén ismert és az alábbi egyszerű alakban adható meg:

$$u_i(t) = u_i^n e^{-m_{ii}t} - \left(\frac{a_i^n}{m_{ii}} + \frac{s_i^n}{m_{ii}^2} \right) (1 - e^{-m_{ii}t}) - \frac{s_i^n}{m_{ii}} t, \quad (31)$$

amit hasonlóan a „konstans szomszéd” közelítés esetében arra használunk fel, hogy a következő $(n+1)$ -edik időlépésen belüli u_i^{n+1} cellahőmérsékletet közelítő iterálható kifejezést állítsunk elő:

$$u_i^{n+1} = u_i^n e^{-m_{ii}h} - \left(\frac{a_i^n}{m_{ii}} + \frac{s_i^n}{m_{ii}^2} \right) (1 - e^{-m_{ii}h}) - \frac{s_i^n}{m_{ii}} h. \quad (32)$$

Az *LNe módszer* a lineáris közelítés módszerét használja úgy, hogy a közelítéshez szükséges prediktor $u_i^{n+1, \text{Pred}}$ hőmérsékletek a konstans szomszéd módszer segítségével lettek kiszámítva. Az LNe módszer egy stabil- és a h időlépésben másodrendben konvergens kétfázisú numerikus módszer.

Az imént bemutatott konstans és lineáris szomszéd közelítési módszereket használva komplexebb többfázisú, stabil, előnyösebb konvergenciatulajdonságokkal rendelkező numerikus explicit eljárásokat adhatunk meg a (2) általánosított hővezetési egyenlet numerikus megoldására, ezekre példa a következő bekezdésekben röviden ismertetett CCL és CLL háromfázisú módszerek.

A *CCL-módszer* (Kovács, 2020) felépítése a következő módon foglalható össze (Munka et al., 2001): A módszer első fázisában a konstans közelítés módszerét alkalmazzuk a $h_1 = p_1 h$ törtidőlépésre, azaz az ismert u_i^n hőmérsékletek segítségével kiszámítjuk az a_i^n aggregált mennyiségeket és kapjuk az új u_i^{n+1, Cp_1} prediktor hőmérsékleteket:

$$a_i^n = \sum_{j \in I_i} m_{i,j} u_j^n + q_i,$$

$$u_i^{n+1, Cp_1} = u_i^n \cdot e^{m_{ii} t} - \frac{a_i^n}{m_{ii}} \cdot (1 - e^{m_{ii} t}).$$

A második fázisban ismételen a konstans közelítés módszerét használjuk, de ezúttal a $h_2 = p_2 h$ törtidőlépésre: az első fázisban előállított u_i^{n+1, Cp_1} prediktor hőmérsékleteket felhasználva kiszámítjuk az újabb a_i^{n+1, Cp_1} aggregált értékeket és ezek segítségével meghatározzuk az újabb prediktor $u_i^{n+1, Cp_1 Cp_2}$ hőmérséklet értékeket:

$$a_i^{n+1, Cp_1} = \sum_{j \in I_i} m_{i,j} u_i^{n+1, Cp_1} + q_i,$$

$$u_i^{n+1, Cp_1 Cp_2} = u_i^{n+1, Cp_1} \cdot e^{m_{ii} t} - \frac{a_i^{n+1, Cp_1}}{m_{ii}} \cdot (1 - e^{m_{ii} t}).$$

A harmadik fázisban a lineáris közelítés módszerét használjuk a h teljes időlépésre vonatkoztatva: Az előző fázisban számított $u_i^{n+1, Cp_1 Cp_2}$ prediktor hőmérsékleteket felhasználva kiszámítjuk az $a_i^{n+1, Cp_1 Cp_2}$ prediktor aggregált értékeket és ennek a segítségével kiszámítjuk az $s_i^{n+1, Cp_1 Cp_2}$ effektív esést. A (32) egyenlettel megadott iterációs képlet segítségével kiszámítjuk az új u_i^{n+1} cellahőmérsékleteket:

$$a_i^{n+1, Cp_1 Cp_2} = \sum_{j \in I_i} m_{i,j} u_i^{n+1, Cp_1 Cp_2} + q_i,$$

$$s_i^{n+1, Cp_1 Cp_2} = \frac{a_i^{n+1, Cp_1 Cp_2} - a_i^n}{p_2 h},$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n e^{-m_{ii} h} - \left(\frac{a_i^n}{m_{ii}} + \frac{s_i^n}{m_{ii}^2} \right) (1 - e^{-m_{ii} h}) - \frac{s_i^{n+1, Cp_1 Cp_2}}{m_{ii}} h.$$

Megmutatható, hogy tetszőleges $p_1 \in \square$ és $p_2 = 3p_1(1 - p_1)$ paraméterválasztások mellett a módszer harmadrendben konvergens a h időlépésben.

A *CL*- módszer (Kovács, Nagy, Saleh, 2022) konstrukciója hasonló az előző bekezdésben ismertett CCL módszeréhez: Az első fázisban $h_1 = p_1 h$ törtidőlépésre vonatkozóan közelítést teszünk a konstans szomszéd közelítés módszerrel:

$$a_i^n = \sum_{j \in I_i} m_{i,j} u_j^n + q_i,$$

$$u_i^{n+1, \text{Cp}_1} = u_i^n \cdot e^{m_{ii} t} - \frac{a_i^n}{m_{ii}} \cdot (1 - e^{m_{ii} t}),$$

ahol a p_1 paraméterről feltesszük, hogy egy pozitív valós szám. A módszer második fázisában ezúttal a lineáris szomszéd közelítést alkalmazzuk. Az u_i^n hőmérsékletek ismeretében megbecsüljük a szomszédos cellák $p_1 h$ időtartam alatt bekövetkezett hőmérsékletváltozását a lineáris szomszéd közelítés módszerét használva. Az iménti első fázisban kiszámított u_i^{n+1, Cp_1} hőmérsékletek felhasználásával kiszámítjuk az a_i^{n+1, Cp_1} aggregált mennyiséget, melynek a segítségével meghatározzuk az s_i^{n+1, Cp_1} effektív esést, és ennek felhasználásával kiszámítjuk az új $u_i^{n+1, \text{Cp}_1 \text{Lp}_2}$ prediktor hőmérsékleteket:

$$a_i^{n+1, \text{Cp}_1} = \sum_{j \in I_i} m_{i,j} u_j^{n+1, \text{Cp}_1} + q_i,$$

$$s_i^{n+1, \text{Cp}_1} = \frac{a_i^{n+1, \text{Cp}_1} - a_i^n}{p_1 h},$$

$$u_i^{n+1, \text{Cp}_1 \text{Lp}_2} = u_i^n e^{-m_{ii} h} - \left(\frac{a_i^n}{m_{ii}} + \frac{s_i^n}{m_{ii}^2} \right) (1 - e^{-m_{ii} h}) - \frac{s_i^{n+1, \text{Cp}_1}}{m_{ii}} h.$$

A harmadik, és egyben az utolsó fázisban újra a lineáris közelítés módszerét alkalmazzuk ezúttal a teljes h lépésközre és kiszámítjuk az új $(n+1)$ -edik időlépésen belüli u_i^{n+1} hőmérsékleteket:

$$a_i^{n+1, \text{Cp}_1 \text{Lp}_2} = \sum_{j \in I_i} m_{i,j} u_j^{n+1, \text{Cp}_1 \text{Lp}_2} + q_i,$$

$$s_i^{n+1, \text{Cp}_1 \text{Lp}_2} = \frac{a_i^{n+1, \text{Cp}_1 \text{Lp}_2} - a_i^n}{p_2 h},$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n e^{-m_{ii} h} - \left(\frac{a_i^n}{m_{ii}} + \frac{s_i^n}{m_{ii}^2} \right) (1 - e^{-m_{ii} h}) - \frac{s_i^{n+1, \text{Cp}_1 \text{Lp}_2}}{m_{ii}} h.$$

Megmutatható, hogy tetszőleges $p_1 \in \square$ és $p_2 = 2/3$ paraméterválasztások esetén a CLL módszer harmadrendben konvergens a h időlépésben.

3.2. A DuFort–Frankel- (DF) módszer ismertetése

A DuFort–Frankel- (DF) módszer (Hirsch, 19988) egy ismert, de nem szokványos explicit, feltétel nélkül stabil, másodrendben konvergens numerikus séma. A módszer ötlete azon alapszik, hogy az

ismeretlen u függvény idő szerinti parciális deriváltját az első rendű középponti véges differenciával közelítjük:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(i,n)} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2h}, \quad (33)$$

és a másodrendű parciális deriváltat közelítő véges differencia kifejezésében a $u(x_i, t_n) \approx u_i^n$ függvényértékeket, annak az $(n-1)$ -edik és az $(n+1)$ -edik időlépcsőben vett értékek számtani átlagával közelítjük:

$$u_i^n \approx \frac{u_i^{n+1} + u_i^{n-1}}{2}. \quad (34)$$

A DuFort–Frankel-módszer (2) általánosított hővezetési egyenletre történő alkalmazásához a (21) mátrix egyenlet i -edik komponensét megadó egyenletből indulunk ki:

$$\frac{d}{dt} u_i(t) = \sum_{j \in I_i} m_{i,j} u_j(t) + m_{ii} u_i(t) + q_i. \quad (35)$$

A (33) és a (34) egyenletekkel megfogalmazott közelítéseket figyelembe véve kapjuk meg az alábbi véges differenciaegyenletet:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2h} = \sum_{j \in I_i} m_{i,j} u_j^n + m_{ii} \frac{u_i^{n+1} + u_i^{n-1}}{2} + q_i, \quad (36)$$

az iménti (36) egyenletet kifejezve az u_i^{n+1} ismeretlen hőmérsékletre, megkapjuk a DuFort–Frankel-módszer iterációs képletét. Mivel a (36) iterációs képlet tartalmazza az u_i^{n-1} hőmérsékletet, így ez egy kétlépéses módszer, ami azt jelenti, hogy az első időlépcső hőmérsékleteinek a kiszámításához más explicit módszerre van szükség. Erre a célra az FTCS algoritmust alkalmaztuk.

4. Az implicit módszerek rövid bemutatása

Az implicit módszerek lényege, hogy a megoldandó parciális differenciálegyenletet, annak a tér- és időváltozóinak a diszkrétizálásával egy algebrai egyenletrendszerre alakítjuk, és ezt az egyenletrendszert oldjuk meg a benne szereplő hőmérsékletekre. Először tekintsünk ismét egy egydimenziójú inhomogén rendszert, melyet azonos térfogatú cellák összességéként kezelünk. A (3) egyenlet diszkrétizálásakor az időderiváltat az elsőrendű haladó differenciával közelítjük:

$$\frac{d}{dt} u_i(t_n) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h}, \quad (37)$$

a térváltozó szerinti második deriváltat pedig a centrális differencia formulával, de ezúttal a benne szereplő hőmérsékleteket nem az ismert n -edik időlépcsőben vesszük, hanem az $(n+1)$ -edik időlépcsőben, amiből következik:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h} = \frac{1}{c_i \rho_i \Delta x} \cdot \left[k_{i+1,i} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta x} + k_{i-1,i} \frac{u_{i-1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta x} \right] + q_i, \quad (38)$$

ahol felhasználtuk a 2. fejezetben bevezetett cellaváltozókat. Az iménti (38) egyenletet kifejezve a korábban bevezetett cella-hőkapacitások és a termikus rezisztenciák segítségével, kapjuk:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{C_i R_{i,i+1}} + \frac{u_{i-1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{C_i R_{i,i-1}} + q_i, \quad (39)$$

amely, a 2. fejezetben már bemutatott módon könnyedén általánosítható tetszőleges elrendezésű térháló esetére:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h} = \sum_{j \in I_i} \frac{u_j^{n+1} - u_i^{n+1}}{C_i R_{j,i}} + q_i, \quad (40)$$

ahol az összegzés a i -edik cellával szomszédos cellákra történik. Hasonlóan, ahogyan ezt a 2. fejezet utolsó 2.3. alfejezetében tettük, a (40) csatolt egyenletrendszer megadható egy tömörebb mátrixegyenlet formájában:

$$(E - hM)\bar{u}^{n+1} = h\bar{q} + \bar{u}^n, \quad (41)$$

ahol az $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ mátrix elemeit a (22)-ben megadott kifejezésekkel számítjuk ki és az $E \in \mathbb{R}^{N \times N}$ az egységmátrixot jelöli. Továbbá $\bar{u}^n = [u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n]^T$; $\bar{q} = [q_1, q_2, \dots, q_N]^T \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ ismertnek tekinthető vektorok, az ismeretlen, új $(n+1)$ -edik időponthoz tartozó hőmérsékletek pedig az $\bar{u}^{n+1} = [u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_N^{n+1}]^T \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ vektorral adhatóak meg. Ahogyan azt már korábban említettük a (41) egy csatolt algebrai egyenletrendszer, amelynek az együttható mátrixa általában egy nagy méretű ritka mátrix. (41) megoldására egyik kézenfekvő lehetőség az *implicit Euler-módszer*, amelynek talán leggyakoribb implementációja az $(E - hM)$ együttható mátrix inverzének a meghatározása, amely direkt módon határozza meg az ismeretlen hőmérsékleteket:

$$\bar{u}^{n+1} = (E - hM)^{-1}(h\bar{q} + \bar{u}^n). \quad (42)$$

Az implicit Euler-módszer feltétel nélkül stabil, de az alkalmazhatóságára erős korlátot jelent, hogy az invertált mátrix általában egy ritka nagy méretű mátrix, ami azt jelenti, hogy az inverzmátrix egy ugyancsak nagy méretű, de sűrű mátrix, amely elemeinek az eltárolásához nagy memóriakapacitás szükséges. Ezért a gyakorlatban a (41) megoldására az inverzmátrix konkrét meghatározása helyett leginkább különböző iteratív módszereket használnak, amelyek segítségével az ismeretlen \bar{u}^{n+1} hőmérsékletek közelítő értékei állíthatóak elő. Az imént említett iteratív módszerek közül talán a leginkább használt módszerek a Krylov-altér módszerek, melyek lényege, hogy egy adott rangú Krylov-altéren keresik meg az ismeretlen \bar{u}^{n+1} értékekre vonatkozó legjobb közelítést.

Az egyik legalapvetőbb Krylov-altér-módszer a *gradiens módszer*, amely szimmetrikus és pozitív definit együtthatómátrixszal rendelkező egyenletrendszerek megoldására szolgáló variációs módszer (Faragó et al., 2013; Hestenes et al., 1952). A módszer alapötlete, hogy megkonstruálunk egy többváltozójú skalárértékű függvényt, amely egy abszolút minimumhellyel rendelkezik, és ez a minimumhely az egyenletrendszer keresett megoldása. Feltesszük, hogy a módszer végrehajtásához egy kezdeti becsléssel rendelkezünk. Minden egyes iterációs lépés során kiszámoljuk az egyenletrendszer reziduális vektorát, amely egyben a megkonstruált függvény gradiensének a mínusz egyszerese. Ismeretes, hogy egy többváltozójú függvény annak a gradiensével ellentétes irányban csökken a leggyorsabban, így az

egy-egy iterációk során meghatározott reziduális vektorok egyben a minimumkeresés irányát is megadják és már csak az adott irány mentén keressük azt a pontot, ahol a többváltozójú függvény a lehető legkisebb (az adott irány mentén!) értékét veszi fel, ezzel egy új és egyben egy pontosabb becslést kapunk az egyenletrendszer ismeretlen vektorára. Az előbbieket miatt a gradiens módszert a legmeredekebb esés (angolul: „steepest descent”) módszerének is szokták nevezni. A módszer előnye, hogy pontos megoldást ad, de hogyha az együtthatómátrix kondíciószáma nagy, akkor a módszer lassan konvergál, azaz nagyszámú iteráció és ezáltal nagy futási idő jellemzi.

A gradiens-módszer javított változata a *konjugált-gradiens módszer* (Faragó et al., 2013; Hestenes et al., 1952), amelyben az egyes iterációs lépések során alkalmazott keresési irányok célszerűbb megválasztásával az imént említett lassú konvergencia gyorsítható.

Az iterációs módszerek konvergenciasebessége erősen függ a megoldandó egyenletrendszer együtthatójának a mátrixától. Hogyha az együtthatómátrix sajátértékei nagy intervallumon keresztül változhatnak, akkor általában igaz, hogy több iterációra van szükség. Ezen probléma kiküszöbölése érdekében különféle prekondicionálási eljárásokat szoktak alkalmazni, melyek lényege, hogy olyan prekondicionáló mátrix(okkal) megszorozzuk a megoldandó mátrix egyenletünket, amely hatására a megoldás kismértékben változik meg, de az új együttható mátrix kedvezőbb spektrális tulajdonságokkal rendelkezik. A MATLAB programrendszeren belül a prekondicionált konjugált gradiens algoritmus (Barrett, et al., 1994) megvalósítására a pcg beépített függvény szolgál, amelyet mi is felhasználtunk a numerikus vizsgálatok során.

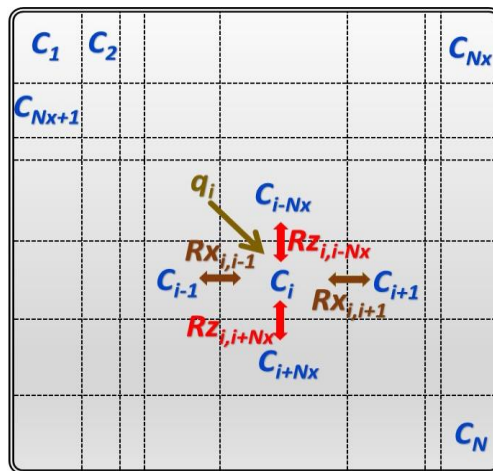
A GMRES (angolul: „generalized minimal residual method”) módszer egy iterációs módszer nem szimmetrikus, lineáris egyenletrendszerek megoldására. A módszer alkalmazásakor feltesszük, hogy az ismeretlen vektorra egy \bar{x}_0 kezdeti becsléssel rendelkezünk és ez által a reziduális vektorra is van egy \bar{r}_0 kezdeti becslésünk. A módszer az egyenletrendszer együtthatómátrixa – A -val jelölve – és a kezdeti reziduális vektor által kifeszített – egy adott m rangú – Krylov-altéren keresi az ismeretlen vektorra vonatkozó legjobb \bar{x}_m közelítést. A GMRES algoritmus (Wikipedia weboldal, megtekintés: 2023. február 16.) lépései a következőkben foglalhatóak össze: az első lépésben az Arnoldi-iteráció segítségével meghatározzuk a szóban forgó Krylov-altér bázisvektorjait, s ezekből egy ortonormált vektorrendszert állítunk elő. Második lépésben definiáljuk a H_m felső Hessenberg-mátrixot és az ortonormált vektorrendszer vektorjaiból álló V_m mátrixot. Bevezetjük a következő funkcionált:

$F(\bar{y}) = \|\bar{b} - A\bar{x}\| = \|\bar{r}_0 - AV_m\bar{y}\|$, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi normát jelöli; és meghatározzuk azt az \bar{y} vektort, amely minimalizálja az F funkcionált, majd kiszámítjuk az ismeretlenre vonatkozó új becslést: $\bar{x}_m := \bar{x}_0 + V_m\bar{y}$. Az algoritmus jellegéből adódóan, a módszer az euklideszi norma szerint történő közelítésre van kihegyezve. A MATLAB programrendszeren belül a módszer megvalósítására a gmres beépített függvény szolgál, amelyet a numerikus tesztek során felhasználtunk.

5. Numerikus esettanulmányok

Az előző 3. és a 4. fejezetekben bemutatott numerikus módszerek összehasonlításához numerikus esettanulmányokat végeztünk a MATLAB R2019b programrendszer segítségével. A tesztek egy két-dimenziós, négyzetrács elrendezésű inhomogén rendszeren végeztük. A rendszer celláinak a száma $N = N_x \times N_z$, ahol N_x , N_z az x - és a z - irányban levő cellák száma és N pedig a teljes cellaszám. A tesztek elvégzése során a von Neumann-peremfeltételt alkalmaztuk, s rendszerünket termikusan izolálnak tekintettük, lásd az 1. ábrát! A rendszert megadó paraméterek előállításához véletlen szá-

mokat használtunk fel, amelyeket a MATLAB beépített `unifrnd` függvényével generáltunk. A numerikus teszteléshez szükséges $u_{0,i}$ kezdeti hőmérsékletekre és a q_i hőforrásértékekre egyenletes eloszlású véletlen számokat használtunk. Az M mátrixelemek előállításához szükséges C_i cellakapacitásokra, illetve, az $R_{x,i}$ x -irányú és az $R_{z,i}$ z -irányú termikus rezisztenciákra logaritmikusan egyenletes eloszlású véletlen számokat generáltunk. Ezek felhasználásával a (22) egyenletben megadott képleteket alkalmaztuk – az 1. ábrán bemutatott kétdimenziójú négyzettrácsos rendszerre –, hogy kiszámítsuk a szükséges $m_{i,j}$ mátrixelemeket.



1. ábra. A numerikus tesztekhez használt négyzettrács elrendezésű inhomogén rendszer. Az ábra feltünteti a rendszert jellemző cellakapacitásokat, termikus rezisztenciákat és a hőforrás tagokat. A rendszert határoló kettős vonal a hőszigetelést jelképezi.

A logaritmikusan egyenletes eloszlású cellakapacitások és termikus rezisztenciák előnye, hogy segítségével egy merevebb rendszert tudunk előállítani. A legenerált rendszer merevsége számszerűleg is jellemezhető a merevségi hányados (vagy angolul „Stiffness Ratio”) segítségével, amely nem más, mint az M mátrix legnagyobb abszolút értékű (λ_{MAX}) és a legkisebb abszolút értékű, de nullától különböző ($\lambda_{MIN} \neq 0$) sajátértékei hányadosának az abszolút értéke:

$$\text{"Stiffness Ratio"} = \left| \frac{\lambda_{MAX}}{\lambda_{MIN}} \right|. \tag{43}$$

Általában igaz, hogy minél szélesebb tartományon generáljuk az M mátrix előállításához szükséges cellakapacitás és termikus rezisztencia paramétereket, annál nagyobb intervallumon vehetnek fel értékeket az M mátrix sajátértékei, ami azt jelenti, hogy egy merevebb rendszert generálunk és látható, hogy ennek következtében a merevségi hányados is nagyobb értéket vehet fel. Szintén fontos jellemzője a megvizsgált rendszernek az úgynevezett időlépésre vonatkozó CFL-küszöbérték, amelyet itt "hMax"-szal jelölünk. Korábban említettük, hogy az FTCS-séma csak feltélesen stabil, ami azt jelenti, hogy csak ezen CFL-küszöb alatti h időlépés esetében konvergens. Analitikusan megmutatható, hogy ez a "hMax" küszöbérték alábbi egyszerű módon számítható ki:

$$"hMax" = \left| \frac{2}{\lambda_{MAX}} \right|. \quad (44)$$

Megjegyezzük, hogy általában a Δx egyenközü egydimenziós rácsra, Δt időlépésköz mellett a CFL-feltétel a következő kifejezéssel adható meg: $\Delta t \leq (\Delta x)^2 / (2\alpha)$. A numerikus tesztek során a referenciamegoldás előállításához az ode15s beépített MATLAB megoldó rutint használtuk. Az ode15s segítségével közönséges differenciálegyenletekből álló csatolt egyenletrendszert oldhatunk meg numerikusan. A megoldó rutinban egy váltakozó lépésközöket alkalmazó és váltakozó rendben (az első rendtől az ötödik rendig) közelítő implicit séma van implementálva. Az ode15s megoldó rutint kifejezetten nagy merevségű problémák numerikus megoldásához fejlesztették ki. Az ode15s rutin felhasználásakor az 'AbsTol' és a 'RelTol' paraméterekkel állíthatjuk be a módszer hibatűrését. A numerikus esettanulmányaink során mindkét paraméter értékét 10^{-12} értékre állítottuk be. A tesztek során megvizsgáltuk azt, hogy a 3. és a 4. fejezetben ismertetett numerikus módszerekkel nyert megoldások, hogyan konvergálnak az ode15s beépített MATLAB megoldó rutinnal előállított megoldáshoz, hogyha a h lépésköz értékét szisztematikusan csökkentjük. A konvergencia vizsgálatánál a "MaxD" maximum- és az "AveD" átlagos hibát vettük alapul. Az előbb említett maximumhibát az alábbi módon határozzuk meg:

$$"MaxD" = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i^{Ref} - u_i^{Num}|, \quad (45)$$

ahol az u_i^{Ref} -n a tetszőleges i -edik cellára vonatkozó a referencia ode15s módszerrel kapott referenciamegoldást és az u_i^{Num} -n szintén az i -edik cellára vonatkozó, a tesztelt numerikus módszerrel nyert megoldást értjük. Látható, hogy ahogyan azt a maximumhiba megnevezés és ahogyan a (45) egyenlet is mutatja, itt az u_i^{Ref} és u_i^{Num} megoldások különbségének abszolút értékét képezzük mindegyik i -edik cellára vonatkozóan és az így kapott eltérések közül a legnagyobb abszolút értékűt vesszük figyelembe. A maximumhiba mintájára bevezethető az "AveD" átlagos hiba fogalma is, amelyet az alábbi módon számíthatunk ki:

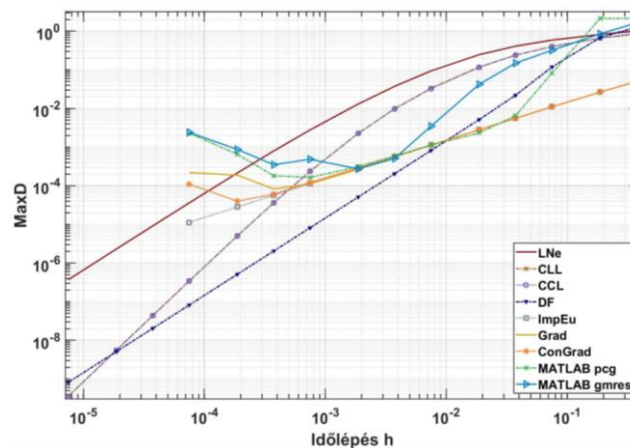
$$"AveD" = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N |u_i^{Ref} - u_i^{Num}|, \quad (46)$$

ahol a maximumhibához hasonlóan képezzük a referencia ode15s módszerrel kapott referenciamegoldások és a megvizsgált numerikus módszerrel kapott megoldások különbségének az abszolút értékét minden egyes cella esetében, de itt most nem azok maximumát keressük meg, hanem az eltérések átlagát számítjuk ki.

Ez egyes h időlépésekhez tartozó maximum-, illetve átlagos hibákat kétszer logaritmikus rendszerben ábrázoljuk és a kapott görbék meredekségét leolvastva a megvizsgált numerikus módszer konvergenciájának a rendjét állapíthatjuk meg, illetve több tesztelt módszert figyelembe véve összehasonlíthatjuk azok hibáit. A konvergenciavizsgálatok mellett, az egyes numerikus módszerek számítási teljesítményét is összehasonlítottuk. Megmértük az egyes algoritmusok futási idejét minden egyes h lépésköz mellett a MATLAB beépített tic-toc függvényével és a megmért futási idők függvényében ábrázoltuk a (45) és a (46) definíciókkal bevezetett maximum- és átlagos hibákat. Az ábrákon felvett görbék segítségével információt kapunk az egyes numerikus módszerek gyorsaságáról.

5.1. Esettanulmány I.: Egy közepesen merev rendszer vizsgálata

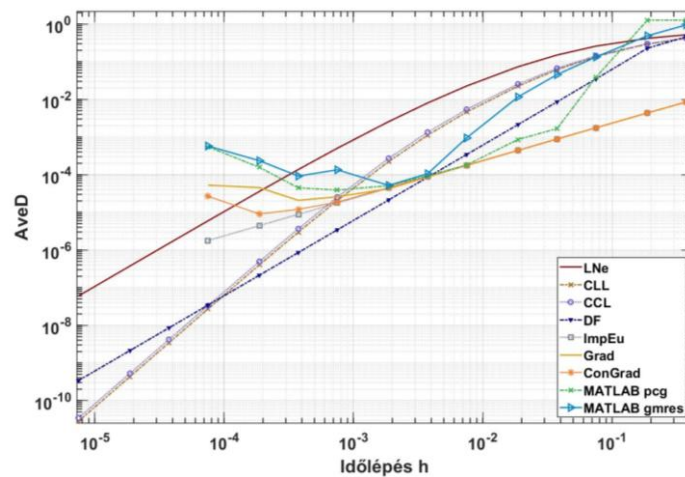
Elsőként egy közepesen merev rendszeren végeztünk numerikus teszteket. A rendszer méretei $N_x = 20$ és $N_z = 20$, azaz $N = 400$ a teljes cellaszám. A hőforrás tag és a $t_0 = 0$ időpontban felvett kezdeti hőmérsékletek értékeit az egységintervallumból vettek fel értékeket, azaz $u_{0,i}; q_i \in (0,1)$. A cellák hőkapacitásai $C_i \in (10^{-1}, 10^1)$; továbbá az x és a z irányú termikus rezisztenciák $R_{x,i}; R_{z,i} \in (10^{-2}, 10^2)$ intervallumon lettek generálva. Az egyes intervallumhatárok megválasztásából adódóan egy közepesen merev rendszert kaptunk, amelynek a merevségi hányadosa: "Stiffness Ratio" = $2,38 \cdot 10^5$ és a CFL-limit értéke: " $hMax$ " = $1.012 \cdot 10^{-3}$. A referencia megoldást, ahogyan azt korábban említettük, az ode15s beépített MATLAB rutin segítségével kaptuk meg és az 'AbsTol' és a 'RelTol' toleranciaparamétereket 10^{-12} -re állítottuk be. Az egyes cellák hőmérsékletét a $t_T = 1,5$ másodpercre vonatkozóan kerestük. A gradiens-, a konjugált gradiens, a pcg és a gmres módszerek esetében a toleranciát 10^{-6} -ra állítottuk be. A kapott eredményeket a 2–5. ábrák mutatják be.



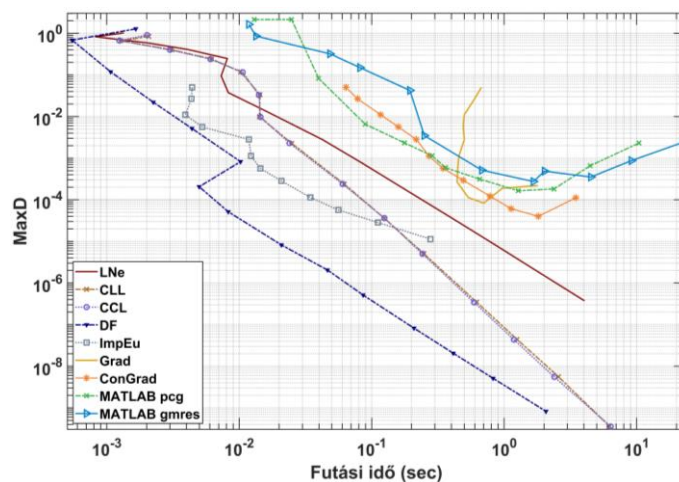
2. ábra. A közepesen merev rendszer esetében kapott maximumhiba értékek az alkalmazott időlépés függvényeként (Esettanulmány I.)

A 2. és a 3. ábrákon a h időlépés függvényében a " $MaxD$ " maximum hibák, illetve az " $AveD$ " átlagos hibák láthatóak. Az ábrákról leolvasható, hogy a CCL és a CLL módszerek harmadrendűek, míg a DuFort–Frankel- (DF) és az LNe-módszerek másodrendűek, illetve az implicit módszerek elsőrendűek. Látható, hogy a DuFort–Frankel módszer a $10^{-2} \leq h \leq 10^{-4}$ tartományban a legkisebb hibákat adó módszer, de az ettől kisebb időlépések $h \leq 2 \cdot 10^{-4}$ esetében a CCL- és CLL-módszerek adják a legkisebb hibákat. Az implicit módszerek hibagörbéi pedig a nagyobb időlépések tartományában $10^{-2} \leq h$ egymáshoz közel haladnak, de az egyre kisebb időlépések irányába haladva egyre nagyobb hibákat eredményeznek. Ennek egyik oka a kerekítési hibák lehetnek. A 4. és az 5. ábrák az egyes módszerek futási idejének a függvényében ábrázolják a " $MaxD$ " maximum hibákat, illetve az " $AveD$ " átlagos hibákat. Az ábrákról látható, hogy az explicit módszerek futási ideje rövidebb, mint az implicit módszereké, ez alól kivétel a mátrix invertálást végző módszer, mivel az csak egyszer invertálja az M

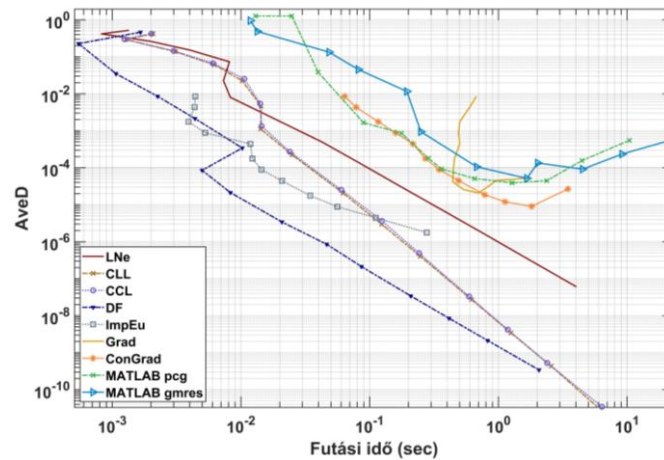
mátrixot, mivel az nem változik az egyes időlépések során. Megjegyzendő, hogy ha ez a feltétel nem lenne igaz, akkor a mátrix-invertálást használó módszer nagyságrendekkel lassabb lenne, mivel minden lépésben invertálnia kellene a mátrixot. A 4. és az 5. ábrákon látható, hogy a gradiens módszer („grad”) eltérő viselkedést mutat, amely részben a tic-toc függvény által mért futási idők esetleges fluktuálásával magyarázható, másrészt azzal, hogy ezt a módszert tömbök és rajtuk végzett műveletek használatával programoztuk le, a többi sajátkezűleg programozott módszert a tömbök egyes elemein, mint skalár változókon végzett műveletekkel implementáltuk.



3. ábra. A közepesen merev rendszer esetében kapott átlagoshiba értékek az alkalmazott időlépés függvényeként (Esettanulmány I.)



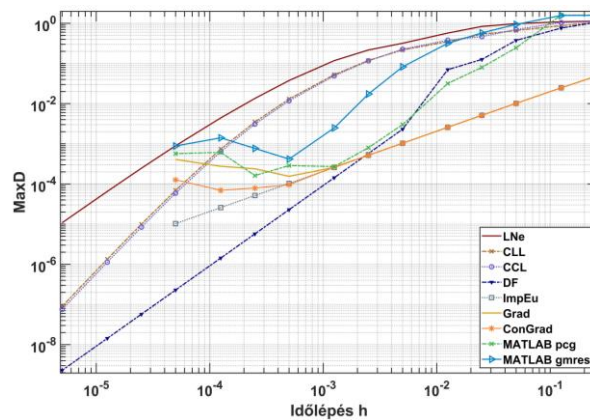
4. ábra. A közepesen merev rendszer esetében kapott maximumhiba értékek a megmért futási idők függvényeként (Esettanulmány I.)



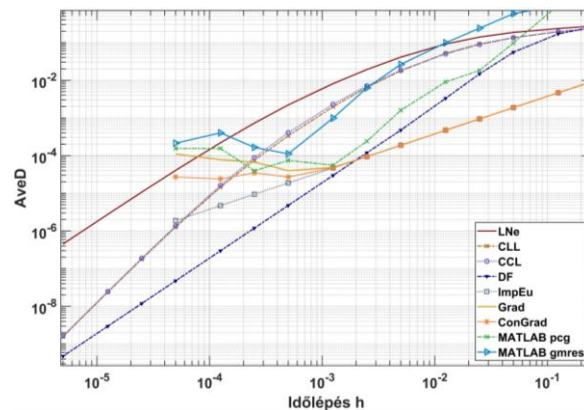
5. ábra. A közepesen merev rendszer esetében kapott átlagoshiba értékek a megmért futási idők függvényeként (Esettanulmány I.)

5.2. Esettanulmány II.: Egy erősen merev és egyben anizotrop rendszer vizsgálata

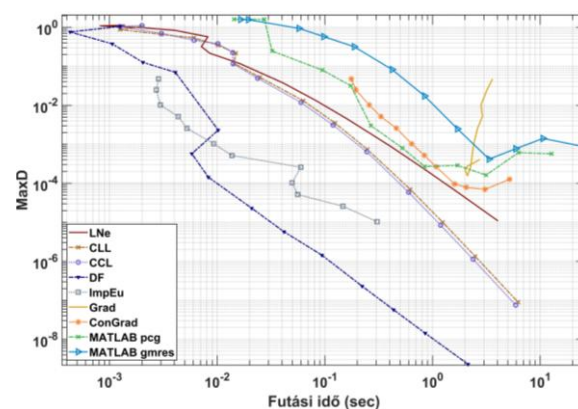
A második numerikus esettanulmány egy erősen anizotrop, és egyúttal még merevebb rendszer vizsgálatát foglalta magában. A rendszer méretei most is, mint az előző példában $N_x = 20$ és $N_z = 20$, azaz $N = 400$ az összesített cellaszám. A hőforrás tag és a $t_0 = 0$ időpontban érvényes kezdő hőmérsékletek értékeit hasonlóan, mint az első esettanulmányban, az egységintervallumból vettek fel értékeket, azaz $u_{0,i}; q_i \in (0,1)$. A cellák hőkapacitásai $C_i \in (10^{-1}, 10^1)$ között változtak. Ezúttal az x -irányú termikus rezisztenciák $R_{x,i} \in (10^{-1}, 10^1)$ és a z -irányú termikus rezisztenciák $R_{z,i} \in (10^{-3}, 10^3)$ intervallumból vettek fel értékeket. A cella-hőkapacitások és a termikus rezisztenciák lehetséges értékeiből adódóan egy erősen irányfüggő és egyben erősen merev inhomogén rendszert állítottunk elő, amelynek a merevégi hányadosa "Stiffness Ratio" = $1,63 \cdot 10^6$ és annak a CFL-limit értéke: " $hMax$ " = $1,31 \cdot 10^{-4}$. A referencia megoldást ezúttal is az ode15s beépített MATLAB függvény alkalmazásával kaptuk meg és az 'AbsTol' és a 'RelTol' toleranciákat változatlanul 10^{-12} -re állítottuk be. Ezúttal az egyes cellák hőmérsékletét a $t_T = 1,0$ másodpercre vonatkozóan kerestük. Az esettanulmányra vonatkozó eredményeket a 6–9. ábrák mutatják be. A megvizsgált módszerek konvergencia rendje ugyanaz, mint amit az előző esettanulmány kapcsán láthattunk. Általában elmondható a módszerekről, hogy később, azaz csak kisebb h időlépések esetén kezdenek konvergálni. Továbbra is gyorsabbak az explicit módszerek, különösen a DuFort–Fankel- (DF) módszer, bár az átlagos hiba tekintetében kicsit kisebb az előnye, mint a maximumhiba használatakor.



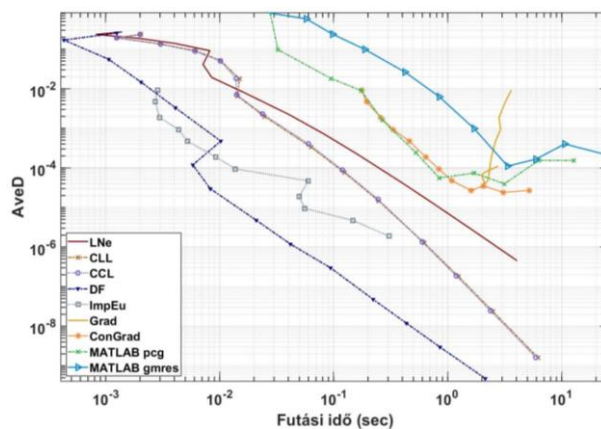
6. ábra. Az erősen merev és anizotróp rendszer esetében kapott maximumhiba értékek az alkalmazott időlépés függvényeként (Esettanulmány II.)



7. ábra. Az erősen merev és anizotróp rendszer esetében kapott átlagoshiba értékek az alkalmazott időlépés függvényeként (Esettanulmány II.)



8. ábra. Az erősen merev és anizotróp rendszer esetében kapott maximumhiba értékek a megmért futási idők függvényeként (Esettanulmány II.)



9. ábra. Az erősen merev és anizotróp rendszer esetében kapott átlagoshiba értékek a megmért futási idők függvényeként (Esettanulmány II.)

6. Összefoglalás, konklúziók

A cikkben négy darab explicit és öt darab implicit módszert mutattunk be és teszteltünk az általánosított hővezetési egyenlet megoldására. A négy darab explicit módszerből az LNe-, CCL- és a CLL-módszerek nemrégiben publikált stabil, másod-, illetve harmadrendben konvergens numerikus módszerek és a DuFort–Frankel- (DF) módszer egy ismert, de ritkán használt ugyancsak másodrendű, stabil módszer. Az implicit módszerek pedig a (3) parciális differenciálegyenlet tér- és időváltozóinak a diszkrétizációjával nyert algebrai egyenletrendszerek különféle, a szakirodalomból ismert iterációs módszerekkel történő megoldásán alapszanak. Az implicit módszerekről tudjuk, hogy feltétel nélkül stabilak, de általában nagy memóriaigényűek és alacsony számítási teljesítményűek. A bemutatott módszerek összehasonlításához numerikus esettanulmányokat végeztünk kétdimenziós inhomogén négyzettrács elrendezésű rendszereken. A numerikus tesztek során alapul vett referenciamegoldást a MATLAB programrendszer egyik beépített közönséges differenciálegyenletekből álló csatolt rendszert megoldó rutinjával állítottuk elő.

A numerikus tesztelések során két rendszert vizsgáltunk meg: egy közepesen merev, valamint egy erősen anizotrop és egyben erősen merev rendszert. Az egyes rendszerekre meghatároztuk az azokat jellemző merevségi arányokat és a CFL-limiteket. Minél szélsőségesebb értékeket vehetnek fel az egyes cellák cella-hőkapacitásai és a termikus rezisztenciák, úgy egyre nagyobb értékeket vehet fel a rendszer merevségi hányadosa és egy kisebb értéket vehet fel a rendszert jellemző CFL-limit. Ami azt jelenti, hogy ilyen feladatok megoldásakor inkább az implicit módszerek alkalmazása került előtérbe, viszont az általunk végzett esettanulmányok eredményei azt mutatják, hogy az újonnan közölt LNe-, CCL- és CLL-módszerek erős versenytársai az implicit módszereknek. Ez már a vizsgált 400 cellából álló rendszerekre is igaz, de nagyobb méretű rendszerre az implicit módszerek relatíve sokkal nagyobb mértékben lassulnak. Tulajdonképpen annak, hogy nem vizsgáltunk nagyobb rendszereket, az az oka, hogy az implicit módszerek nagyon sokáig futottak volna a rendelkezésünkre álló számítógépeken.

Irodalom

- [1] Kovács, E. and Majár, J. (2018). On some analogous transient phenomena. *MultiScience – XXXII. microCAD International Multidisciplinary Scientific Conference*, Miskolc, p. C1/1.
- [2] Kareem Jalghaf, H., Omle, I., and Kovács, E. (2022). A comparative study of explicit and stable time integration schemes for heat conduction in an insulated wall. *Buildings*. 12(6), p. 824. <https://doi.org/10.3390/buildings12060824>
- [3] Blaj, G., Kenney, C. J., Segal, J. and Haller, G. (2017). *Analytical solutions of transient drift-diffusion in P-N junction pixel sensors. 1–13*. <https://doi.org/10.2172/1443745>.
- [4] Mojtabi, A., and Deville, M. O. (2015). One-dimensional linear advection-diffusion equation: Analytical and finite element solutions. *Comput. Fluids*, 107, pp. 189–195. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.11.006>
- [5] Barna, I. F., Bognár, G., Guedda, M., Mátyás, L., and Hriczó, K. (2020). Analytic self-similar solutions of the Kardar-Parisi-Zhang interface growing equation with various noise terms. *Math. Model. Anal.*, 25(2), pp. 241–256, <https://doi.org/10.3846/mma.2020.10459>.
- [6] Barna, I. F., and R. Kersner, R. (2010). Heat conduction: A telegraph-type model with self-similar behavior of solutions. *J. Phys. A Math. Theor.*, 43(37), p. 375210. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/37/375210>
- [7] Mátyás, L., and Barna, I. F. (2021). *General self-similar solutions of diffusion equation and related constructions*. arXiv2104.09128v1 [physics.class-ph].
- [8] Zoppou, C., and Knight, J. H. (1999). Analytical solution of a spatially variable coefficient advection-diffusion equation in up to three dimensions. *Appl. Math. Model.*, 23(9), pp. 667–685. [https://doi.org/10.1016/S0307-904X\(99\)00005-0](https://doi.org/10.1016/S0307-904X(99)00005-0)
- [9] Lienhard IV, J. H., and Lienhard V, J. H. (2017). *A heat transfer textbook*. 4 edition, Cambridge, Massachusetts, USA: Phlogiston Press.
- [10] Zimmerman, R. W. (2018). *The imperial college lectures in petroleum engineering*. Singapore, London: World Scientific Publishing, <https://doi.org/10.1142/q0146>.
- [11] Mascagni, M. (1990). Backward Euler method for numerical solution of the Hodgkin-Huxley equations of nerve conduction. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(4), pp. 941–962. <https://doi.org/10.1137/0727054>
- [12] Mbroh, N. A., and Munyakazi, J. B. (2021). A robust numerical scheme for singularly perturbed parabolic reaction-diffusion problems via the method of lines. *Int. J. Comput. Math.*, 99(6), p. 11391158, <https://doi.org/10.1080/00207160.2021.1954621>.
- [13] Singh A., Maurya V., Rajpoot M. K. (2022). New two-derivative implicit-explicit Runge-Kutta methods for stiff reaction-diffusion systems. *Journal of Computational Physics*, 471, p. 111610. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111610>.
- [14] Beuken L., Cheffert O., Tutueva A., Butusov D., & Legat V. (2022.) Numerical Stability and Performance of Semi-Explicit and Semi-Implicit Predictor–Corrector Methods. *Mathematics*, vol. 10, no. 12, <https://doi.org/10.3390/math10122015>.
- [15] Appadu, A. R. (2017). Performance of UPFD scheme under some different regimes of advection, diffusion and reaction. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 27(7), pp. 1412–1429, <https://doi.org/10.1108/HFF-01-2016-0038>.
- [16] Karahan, H. (2007). Unconditional stable explicit finite difference technique for the advection- diffusion equation using spreadsheets. *Adv. Eng. Softw.*, 38(2), pp. 80–86. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2006.08.001>

- [17] Sanjaya, F., and Mungkasi, S. (2017). A simple but accurate explicit finite difference method for the advection-diffusion equation. *J. Phys. Conf. Ser.*, 909(1), pp. 1–5.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/909/1/012038>
- [18] Pourghanbar, S., Manafian, J., Ranjbar, M., Aliyeva, A., and Gasimov, Y. S. (2020). An efficient alternating direction explicit method for solving a nonlinear partial differential equation. *Math. Probl. Eng.*, 2020 (november), pp. 1–12, <https://doi.org/10.1155/2020/9647416>.
- [19] Harley, C. (2010). Hopscotch method: The numerical solution of the Frank-Kamenetskii partial differential equation. *Appl. Math. Comput.*, 217, pp. 4065–4075.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.10.020>
- [20] Al-Bayati, A., Manaa, S., and Al-Rozbayani, A. (2011). Comparison of finite difference solution methods for reaction diffusion system in two dimensions. *AL-Rafidain J. Comput. Sci. Math.*, 8(1), pp. 21–36, <https://doi.org/10.33899/csmj.2011.163605>.
- [21] Nwaigwe C. (2022). *An Unconditionally Stable Scheme for Two-Dimensional Convection-Diffusion-Reaction Equations*. https://scholar.google.co.uk/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=PW9Enr0AAAJ&citation_for_view=PW9Enr0AAAJ:M3ejUd6NZC8C
- [22] Savović, S., Drljača, B., and Djordjevich, A. (2022). A comparative study of two different finite difference methods for solving advection–diffusion reaction equation for modeling exponential traveling wave in heat and mass transfer processes. *Ric. di Mat.*, 71, 245252.
<https://doi.org/10.1007/s11587-021-00665-2>
- [23] Berger, J., Gasparin, S., Mazuroski, W., and Mendes, N. (2020). An efficient two-dimensional heat transfer model for building envelopes. *Numer. Heat Transf. Part A Appl.*, 79(3), pp. 163–194, <https://doi.org/10.1080/10407782.2020.1836936>.
- [24] Kovács, E., & Gilicz, A. (2018). New stable method to solve heat conduction problems in extremely large systems. *Des. Mach. Struct.*, 8(2), pp. 30–38.
- [25] Kovács, E. (2020). New stable, explicit, first order method to solve the heat conduction equation. *J. Comput. Appl. Mech.*, 15(1), pp. 3–13, <https://doi.org/10.32973/jcam.2020.001>.
- [26] Saleh, M., Nagy, Á., and Kovács, E. (2020). Part 2: Construction and investigation of new numerical algorithms for the heat equation. *Multidiszcip. Tudományok*, 10(4), pp. 339–348.
<https://doi.org/10.35925/j.multi.2020.4.37>
- [27] Saleh, M., Nagy, Á., and Kovács, E. (2020). Part 3: Construction and investigation of new numerical algorithms for the heat equation. *Multidiszcip. Tudományok*, 10(4), pp. 349–360.
<https://doi.org/10.35925/j.multi.2020.4.38>
- [28] Nagy, Á., Saleh, M., Omle, I., Kareem, H., and Kovács, E. (2021). New stable, explicit, shifted-hopscotch algorithms for the heat equation. *Math. Comput. Appl.*, 26(3), p. 61.
<https://doi.org/10.3390/mca26030061>
- [29] Nagy Á., Omle, I., Kareem, H., Kovács, E., Barna, I. F., and Bogнар, G. (2021). Stable, explicit, Leapfrog-Hopscotch algorithms for the diffusion equation. *Computation*, 9(8), p. 92.
<https://doi.org/10.3390/computation9080092>
- [30] Kovács, E., Nagy, Á., and Saleh, M. (2021). A set of new stable, explicit, second order schemes for the non-stationary heat conduction equation. *Mathematics*, 9(18), p. 2284.
<https://doi.org/10.3390/math9182284>
- [31] Jalghaf, H. K., Kovács, E., Majár, J., Nagy, Á., and Askar, A. H. (2021). Explicit stable finite difference methods for diffusion-reaction type equations. *Mathematics*, 9(24), p. 3308.
<https://doi.org/10.3390/math9243308>

- [32] Kovács, E. (2020). A class of new stable, explicit methods to solve the non-stationary heat equation. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, 37(3), pp. 2469–2489.
<https://doi.org/10.1002/num.22730>
- [33] Kovács, E., Nagy, Á., & Saleh, M. (2022). A new stable, explicit, third-order method for diffusion-type problems. *Adv. Theory Simulations*, 5(6), p. 2100600.
<https://doi.org/10.1002/adts.202100600>
- [34] Koics D., Kovács E., Nehéz K. (2022). Examining The Performance of MATLAB’s Matrix Capabilities, Testing on Euler’s Method Applied on The Diffusion Equation. *Production Systems And Information Engineering*, (10)3, pp. 92–114.
- [35] Majár J., Pszota G. (2022). Stabil, explicit numerikus algoritmusok diffúziós és hővezetési problémák megoldására. *Multidiszcip. Tudományok, A Miskolci Egyetem Közleménye* (12)2, pp. 123–140.
- [36] Omle I., (2021). New explicit algorithm based on the asymmetric hopscotch structure to solve the heat conduction equation. *Multidiszciplináris Tudományok: A Miskolci Egyetem Közleménye*, 11(5) pp. 233–244.
- [37] Saleh M., Kovács E., Nagy Á. (2023) New stable, explicit, second order hopscotch methods for diffusion-type problems. *Mathematics And Computers IN Simulation*, (208) pp. 301–325.
- [38] Munka M. & Pápay J. (2001). *4D Numerical Modeling of Petroleum Reservoir Recovery*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- [39] Hirsch, C. (1988). *Numerical computation of internal and external flows, volume 1: Fundamentals of numerical discretization*. Wiley.
- [40] Faragó I., Horváth R. (2013). *Numerikus módszerek*. Typotex Kiadó.
- [41] Hestenes M. R., Stiefel E., (1952). Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, (49)6.
- [42] Barrett R., Berry M., Chan T. F. et al. (1994). *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, Philadelphia.
- [43] Wikipedia. *Generalized minimal residual method*. Elérhetőség: https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_minimal_residual_method. (Megtekintés időpontja: 2023. február 16.)