Multidiszciplináris tudományok, 3. kötet. (2013) 2. sz. pp. 195-202.

PORÓZUS KÖZEGBE HELYEZETT FÜGGŐLEGES SÍKLAPON KONVEKTÍV HATÁRRÉTEG ÁRAMLÁS VIZSGÁLATA

Vadászné dr. Bognár Gabriella[1], Hriczó Krisztián[2]
[1]intézetigazgató egyetemi docens, [2]tanársegéd
Miskolci Egyetem, [1]Gép- és Terméktervezési Intézet, [2]Matematikai Intézet
3515 Miskolc-Egyetemváros
v.bognar.gabriella@uni-miskolc.hu, krisztian.hriczo@gmail.com

Összefoglalás

Folyadékkal telített porózus közegbe helyezett függőleges síklap feletti konvektív áramlást vizsgálunk. A lamináris határréteg áramlást parciális differenciálegyenlet rendszerrel írjuk le, melyet egy alkalmasan megválasztott hasonlósági transzformációval közönséges differenciálegyenlet-rendszerre vezetünk vissza. Vizsgáljuk az így kapott differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldásait és megadjuk a határrétegben a hasonlósági sebesség és hőmérséklet eloszlásokat.

Kulcsszavak: *konvektív áramlás, határréteg, porózus közeg*

Abstract

Convective heat transfer from surface embedded in porous medium is considered over a vertical surface. The laminar boundary layer flow is described by a system of partial differential equations which is transferred into a system of ordinary differential equations by a similarity method. We examine the numerical solutions to this system and we give the similarity velocity and temperature profiles.

Keywords: *convective flow, boundary layer, porous media*

1. Bevezetés

A porózus közegbe helyezett síklap mentén kialakuló konvektív áramlást a kutatók az elmúlt néhány évtizedben széles körben vizsgálják. A modellt számos helyen alkalmazzák a gyakorlatban, pl. az építőiparban az energiahatékony (hőszigetelő) épületelemek tervezésénél, a geológiában a geotermikus energia hasznosításánál, a felszínalatti vizekben terjedő szennyeződések szabályozásánál és az olajkitermelésnél is.

Határréteg áramlás elméletét Prandtl az 1900-as évek elején publikálta [9], azonban a porózus közegbeli határréteg áramlásra az 1970-es években kezdték alkalmazni. Az elsők között, 1975-ben Furumoto írta le, hogy a földbe, mint porózus közegbe függőleges fémlapot helyezve a vulkanikus régió hőjét a felszín alatti vizek fűtésére, és így energiatermelésre lehet hasznosítani [2].

A folyadékkal telített porózus közegbe helyezett függőleges síklap mentén kialakuló konvektív határréteg áramlás hasonlósági megoldását Cheng és Minkowycz [1] írta le

1977-ben. A síklap felületén a hőmérsékletet a magasság hatványfüggvényeként határozták meg. A ’70-es évektől számos cikk és könyv jelent meg ebben a témában és napjainkban is aktívan foglalkoznak ezzel a kutatási területtel [1-10]. 2006-ban Nazar, Arifin és Pop szerzőhármas végzett vizsgálatokat vízszintes és függőleges síklap esetén, amikor kevert hőmérsékleti peremfeltétel mellett tanulmányozták a hőátadás miatt kialakuló konvektív áramlást [5].

Célunk Nazar, Arifin és Pop [5] cikkében ismertetett, a függőleges síklapra alkalmazott modell általánosítása nagy hőmérséklet különbség mellett végbemenő folyamatokra, ahol a sűrűség változása a hőmérsékletváltozás négyzetével jellemezhető. Előállítjuk a modellben szereplő peremértékfeladat numerikus megoldását, megadjuk a sebesség és a hőmérséklet eloszlásokat és vizsgáljuk a feladatban szereplő paraméterek hatását a numerikus megoldásra.

2. A határréteg áramlást leíró egyenletek

A T_∞ hőmérsékletű, folyadékkal telített porózus közegbe helyezett síklap mentén a sűrűség változás miatt kialakuló szabad konvektív áramlást feltételezünk. Az áramlást lamináris határréteg áramlásként modellezzük. A síklap felületén vesszük fel az $(\bar{x},\bar{y})$ kétdimenziós koordináta síkot, ahol az $\bar{x}$ a síklappal párhuzamos, $\bar{y}$ az arra merőleges koordináta [5].

A határréteg áramlás matematikai modelljében az első egyenlet az ún. folytonossági egyenlet:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}=0.$$

A síklapot körülvevő folyadék sűrűsége változik a hőátadás következtében és ez a sűrűségváltozás hozza létre a konvektív áramlást a síklap környezetében. Abban az esetben, ha a síklap és a folyadék közötti hőmérséklet különbség kicsi, akkor a sűrűséget a Boussinesq-féle közelítést alkalmazva a

$$\rho=\rho_\infty[1-\beta_1(T-T_\infty)]$$

lineáris képlettel adhatjuk meg [7]. Ha a síklap és a folyadék között nagy a hőmérséklet különbség, akkor a folyadék sűrűségét a $\rho=\rho_\infty[1-\beta_2(T-T_\infty)^2]$ képlettel jellemzik [10]. A β_1 és β_2 tényezők a hőtágulási együtthatót jelölik. Nagy hőmérséklet különbség esetén a konvektív határréteg áramlás matematikai modelljében a folytonossági egyenlethez az alábbi mozgás- és energiaegyenletek járulnak:

$$\bar{u}=\frac{gK\beta_2}{\nu}(T-T_\infty)^2,$$

$$\bar{u}\,\frac{\partial T}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\,\frac{\partial T}{\partial \bar{y}}=\alpha_m\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

ahol $\bar{u}$ és $\bar{v}$ az $\bar{x}$ és $\bar{y}$ irányú sebességkomponensek, g jelöli a gravitációs gyorsulást, K a porózus közeg áteresztő képessége, ν a kinematikai viszkozitás, T a folyadék hőmérséklete és α_m jelöli a hőmérséklet-vezetési tényezőt.

Elsőként bevezetjük a következő dimenziómentes változókat:

$$x = \bar{x}/L, \quad y = Ra^{1/2}(\bar{y}/L), \quad u = Ra^{-1}(L/\alpha_m)\bar{u},$$

$$v = Ra^{-1/2}(L/\alpha_m)\bar{v} \quad \theta = (T - T_\infty)/(T_r - T_\infty),$$

ahol L jelöli a felület karakterisztikus hosszát, T_r a referencia hőmérséklet és $Ra = gK\beta_2(T_r - T_\infty)^2 L/\alpha_m \nu$ a porózus közegbeli Rayleigh-számot. A dimenziómentes változókat behelyettesítve a határréteg áramlást leíró parciális differenciálegyenlet rendszerbe, az alábbi dimenziómentes egyenletrendszert kapjuk:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$u = \theta^2, \tag{2}$$

$$u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Az (1)-(3) egyenletrendszerhez a feltételezett áramlás esetén az alábbi peremfeltételek járulnak:

- a síklap felületén ($y = 0$):

$$v(x,0) = 0, \tag{4a}$$

$$A(x)(T_r - T_\infty)\theta(x,0) - B(x)(T_r - T_\infty)\frac{Ra^{1/2}}{L}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{y=0} = C(x); \tag{4b}$$

- a határrétegtől távol ($y \to \infty$):

$$\theta(x,y) \to 0, \tag{4c}$$

ahol az $A(x)$, $B(x)$ és $C(x)$ egyelőre meg nem határozott x-től függő függvények.

Az (1)-(3) egyenletrendszer hasonlósági megoldását kívánjuk előállítani, ezért bevezetjük az alábbi hasonlósági változót és hasonlósági függvényeket:

$$\eta = x^r y, \quad \psi(x,y) = x^p f(\eta), \quad \theta(x,y) = x^q h(\eta). \tag{5}$$

A ψ áramfüggvény az $u = \partial\psi/\partial y$ és $v = -\partial\psi/\partial x$ szokásos értelmezés szerint automatikusan teljesíti a (1) folytonossági egyenletet. A (2) és (3) egyenletekből (5)-tel kapjuk az

$$x^{p+r} f' = \left(x^q h\right)^2, \tag{6}$$

$$x^{p-1}(qf'h - pfh') = x^r h'', \tag{7}$$

egyenleteket, ahol a deriváltak az η hasonlósági változó szerinti deriválást jelölik.

A paraméterek megfelelő megválasztásával, ami ebben az esetben $p = 1 + m$, $q = (1 + 2m)/2$ és $r = m$ a (6) és (7) egyenletekből

$$f' = h^2, \tag{8}$$

$$h'' - \left(\frac{1+2m}{2}\right) f'h + (1+m) fh' = 0. \tag{9}$$

A hasonlósági változó alkalmazásával a dimenziómentes peremfeltételek a következőek:

$\eta = 0$: $$f(0) = 0, \tag{10a}$$

$\eta = 0$: $$a(x)(T_r - T_\infty)h(0) - b(x)(T_r - T_\infty)^2 h'(0) = 1, \tag{10b}$$

$\eta \to \infty$: $$h(\eta) \to 0. \tag{10c}$$

Itt $a(x)$ és $b(x)$ az alábbi kifejezésekkel adható meg:

$$a(x) = \frac{A(x)}{C(x)} x^{\frac{1+2m}{2}}, \quad b(x) = \frac{B(x)}{C(x)} x^{\frac{1+4m}{2}} \left(\frac{gK\beta_2}{\alpha_m \nu L}\right)^{1/2}. \tag{11}$$

A (8) és (9) egyenleteknek a (10a) (10b) (10c) feltételekkel csak abban az esetben létezik hasonlósági megoldása, ha az $a(x)$ és $b(x)$ konstans függvények. Az a, b és T_∞, illetve a T_r referencia hőmérsékletet úgy kell megválasztanunk, hogy kielégítsék az alábbi egyenletet:

$$b(T_r - T_\infty)^2 + a(T_r - T_\infty) = 1. \tag{12}$$

Legyen $\varepsilon = b(T_r - T_\infty)^2$, így a (10b) feltétel az alábbi formába írható:

$$(1-\varepsilon)h(0) - \varepsilon h'(0) = 1. \tag{13}$$

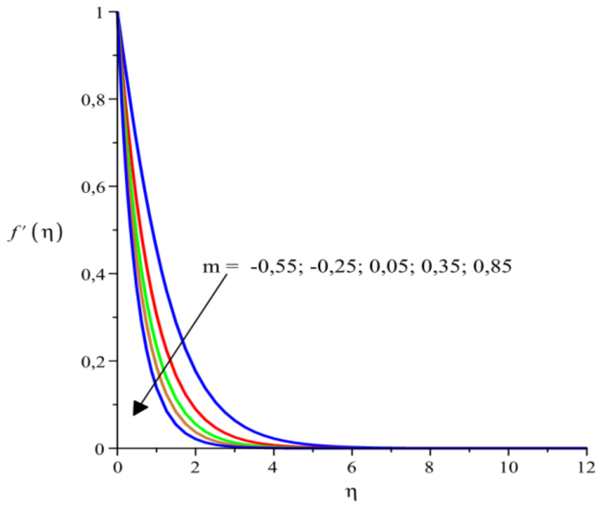
Megjegyezzük, hogy $\varepsilon = 0$ esetén $\theta(x,0) = x^{(1+2m)/2}$ az előírt felületi hőmérséklet, $\varepsilon = 1$ esetén a $(\partial\theta/\partial y)_{y=0} = -x^{1/2+2m}$ a felületen előírt hőfluxus, míg $\varepsilon \to \infty$ esetén a kevert peremfeltétel a $(\partial\theta/\partial y)_{y=0} = -x^m \theta(x,0)$ egyenlettel írható le.

3. Numerikus közelítő megoldások

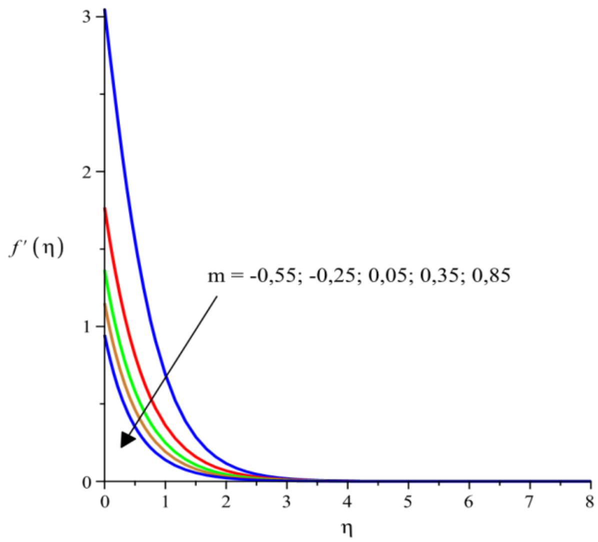
A numerikus megoldásokat MAPLE 12 programcsomaggal határoztuk meg beépített peremérték megoldó algoritmus használatával. Az ábrákon a különböző paraméter értékek mellett előállított numerikus megoldásokat szemléltettük az η hasonlósági változó függvényében.

Az 1-3. ábrán a határrétegbeli hasonlósági sebesség eloszlás látható az $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$ és $\varepsilon \to \infty$ esetén. Azt tapasztaltuk, hogy az ε növekedésével a határréteg vastagsága csökken. Az m paraméter növekedése az $\varepsilon = 0$ esetben a határréteg vastagságának csökkenését okozza, míg a kezdeti sebesség ebben az esetben rögzített. A másik két esetben ($\varepsilon = 1$ és $\varepsilon \to \infty$) az m paraméter növelése nem változtatja meg a határréteg vastagságát, de a síklap mentén csökkenti a kezdeti sebesség értékét.

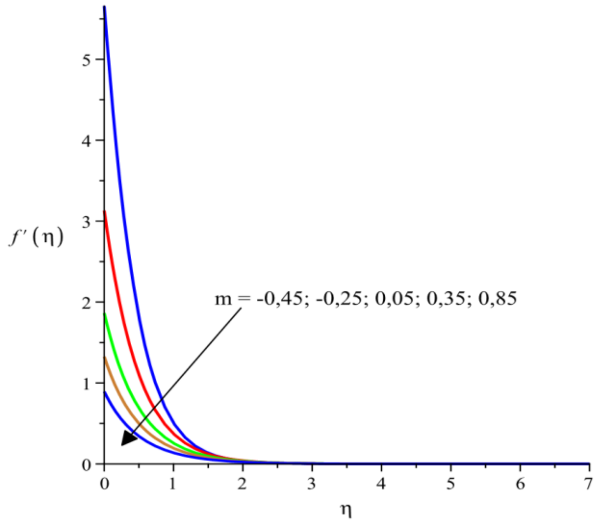
A 4-6. ábrák a határrétegbeli hasonlósági hőmérséklet eloszlásokat szemléltetik. Itt is megfigyelhető, hogy az ε értékének növekedésével a határréteg vastagsága csökken. Az m paraméter növelésével $\varepsilon = 0$ esetén a termikus határréteg vastagsága csökken, a kezdeti falhőmérséklet pedig rögzített. Míg $\varepsilon = 1$ és $\varepsilon \to \infty$ esetén a síklap felületén a kezdeti hőmérséklet értéke csökken, a termikus határréteg vastagsága nem mutat változást az m paraméter növelésének hatására. A 6. ábrán mutatjuk be a vegyes hőmérsékleti peremfeltétel teljesülését ($\varepsilon \to \infty$), amikor a feltételünk: $h(0) + h'(0) = 0$.



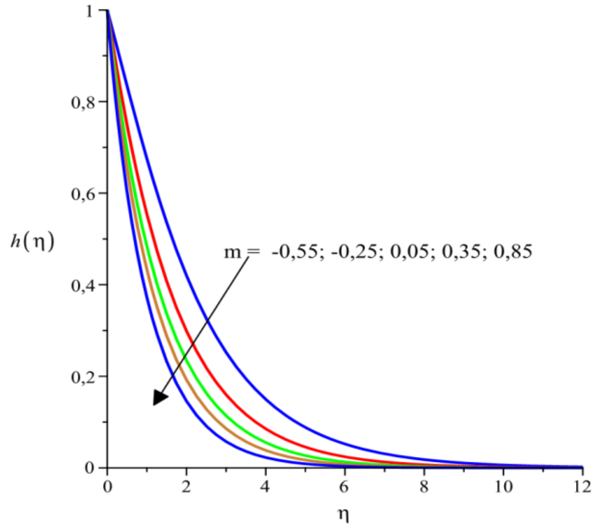
1. ábra. *Sebességprofil ε = 0 esetén.*



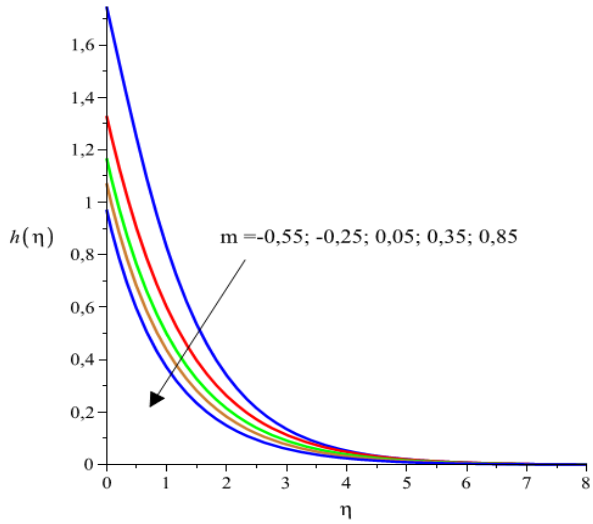
2. ábra. *Sebességprofil ε = 1 esetén.*



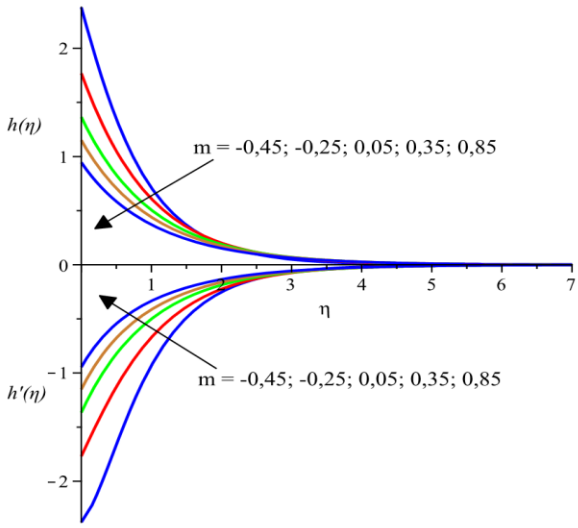
3. ábra. *Sebességprofil ε→∞ esetén.*



4. ábra. *Hőmérsékletprofil ε = 0 esetén.*



5. ábra. *Hőmérsékletprofil ε = 1esetén.*



6. ábra. *Hőmérsékletprofil ε→∞ esetén.*

4. Összefoglalás

Előállítottuk a konvektív határréteg áramlás numerikus hasonlósági megoldásait. A kapott hasonlósági megoldások monoton csökkenő tulajdonsága jól szemlélteti a modell fizikai jelentését, azaz a T_∞ állandó hőmérsékletre való lehűlést.

Megoldásaink azt mutatják, hogy az m paraméter növekedésével $\varepsilon = 0$ esetén mind a hidrodinamikai, mind a termikus határréteg vastagsága csökken. Azonban $\varepsilon = 1$ és $\varepsilon \to \infty$ esetekben a határrétegek vastagsága jelentős változást nem mutat, de ezekben az esetekben a kezdeti sebesség és hőmérséklet csökken a síklap mentén az m paraméter növekedésének hatására.

5. Köszönetnyilvánítás

A kutatás az Európai Unió és Magyarország támogatásával a TÁMOP 4.2.4.A/1-11-1-2012-0001 azonosító számú "Nemzeti Kiválóság Program - Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program" című kiemelt projekt keretei között valósult meg a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 projekt eredményeire alapozva.

6. Irodalom

[1] Cheng P., Minkowycz W. J.: *Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike*, Journal of Geophysical Research 82 (14) (1977), pp. 2040-2044.

[2] Furumoto A. S.:*A systematic program for geothermal exploration on the island of Hawaii*, paper presented at the 45th Annual International Meeting, Soc. Of Explor. Geophys., Denve, Colo. Oct. 12-16, 1975.

[3] Ingham D. B., Pop I. (Eds): *Transport Phenomena in Porous Media*, Oxford, 1998, Vol. II 2002, Vol. III 2005.

[4] Ingham D. B., Bejan A., Mamut E. and Pop I.: *Emerging Technologies and Techniques in Porous Media*, NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry-Vol. 134, Kluwer Academic Publisher, 2004.

[5] Nazar R., Arifin N. M., Pop I.: *Free convection boundary layer flow over vertical and horizontal flat plates embedded in a porous medium unde mixed thermal boundary conditions*, Int. Comm. in Heat and Mass Transfer 33 (2006) pp. 87-93.

[6] Nield D. A., Bejan A.: *Convection in Porous Media*, second ed. Springer, New York, 1999.

[7] Lesnic D., Ingham D. B., Pop I.: *Free convection boundary-layer flow along a vertical surface in a porous medium with Newtonian heating*, Int. J. of Heat and Mass Transfer 42 (1999) 2621-2627.

[8] Pop I., Ingham D. B.: *Convective Heat Transfer: Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluids and Porous Media*, Pergamon, Oxford, 2001, pp. 381-430.

[9] Prandtl, L.: *Uber Flussigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung*, in Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker Kongresses, Heidelberg, Germany, 1904. pp. 484–491.

[10] Vajravelu K., Cannon J. R., Leto J., Semmoum R., Nathan S., Draper M., and Hammock D.: *Nonlinear convection at a porous flat plate with application to heat transfer from a dike*, J. Math. Anal. Appl. 277 (2003) 609–623.