

## VIZSGÁLATOK IDŐIGÉNYÉNEK CSÖKKENTÉSI LEHETŐSÉGE SZIGMOID GÖRBÉK ALKALMAZÁSÁVAL

Szabó Ferenc János 

egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Gép-és Terméktervezési Intézet  
3515 Miskolc-Egyetemváros, e-mail: [ferenc.szabo@uni-miskolc.hu](mailto:ferenc.szabo@uni-miskolc.hu)

### Absztrakt

A szigmoid (*S* alakú) görbék az élet számos területén alkalmazhatóak, ha a vizsgált jelenség jellege a növekedés-telítődés, azaz a jelenség is szigmoid görbe szerint viselkedik. Ilyen esetekben a szigmoid görbék alkalmazása lehetővé teszi, hogy nemcsak a görbe viselkedését érthetjük meg mélyebben, hanem a görbe tulajdonságait kihasználva, előrejelezhető a vizsgált jelenség viselkedése is. Ennek számos előnye lehet, pl. ha egy hosszadalmas vizsgálatot végzünk, melynek viselkedése szigmoid görbével leírható, akkor jelentősen lecsökkenthető a vizsgálati idő, mivel a szigmoid görbe alapján kiszámíthatóak a későbbi eredmények. Ez nagyon jól alkalmazható például a multidiszciplináris optimalás esetén, ahol többhetes számítógépi futási idők is lehetségesek, így nagyon hasznos lehet a csökkentés. Jelen cikkben ezt a módszert vasúti öntöttvas féktuskók súrlódás miatti melegedésének vizsgálatára alkalmazott mérések idejének csökkentésére alkalmazzuk.

**Kulcsszavak:** szigmoid görbék, EBSYQ-rendszer, előrejelzés, öntöttvas vasúti féktuskók melegedése

### Abstract

Sigmoid (*S*-shape) curves can be applied in several fields of our life, if the behaviour (growth or saturation) of the investigated phenomenon can be described by sigmoid curve. Application of sigmoid curves makes possible not only to describe and understand more deeply the behaviour of the phenomenon, but also to predict the behaviour on the basis of the analysis of the characteristics of the sigmoid curve. This could have many useful advantages, for example in case of a long investigation, which can be described by sigmoid curve, the time necessary for the end-results can be considerably decreased by predicting them on the basis of sigmoid curve analysis. This was very useful in case of multidisciplinary optimization, where computer running takes several weeks. In this paper this process is applied for decreasing the time necessary for the experiments of railway brakes heated during frictional contact.

**Keywords:** sigmoid curves, EBSYQ system, forecasting

### Jelölések jegyzéke

$K$	Telítődési szintet kifejező paraméter
$c$	Sigmoid alakot befolyásoló paraméter
$r$	Növekedési gyorsasággal kapcsolatos paraméter
$H$	Célfüggvény a legkisebb négyzetek elvéhez
$a, b, c$	Paraméterek a lineáris függvényé alakításhoz
$R_{lin}$	Lineáris regressziós együttható
$A_{xy}, B_{xy}, C_x, D_x, C_y, D_y$	Paraméterek a regressziós együtthatóhoz
$n$	Kitevő az exponenciális közelítéshez

## 1. Bevezetés

Életünk különböző területein többféle jelenség vizsgálatakor sokszor kialakulhat, hogy a vizsgálatok időszükséglete jelentős, elhúzódik. Az ilyen helyzetekben – főleg, ha olyan tényező is szorít minket, ami az eredmények minél előbbi rendelkezésre állását kívánna meg – nagy segítséget jelenthet a jelenség részletesebb, mélyebb megértése és ez alapján a viselkedés előrejelzése, a végeredmény elfogadható pontosságú becslése. Erre ad jól alkalmazható lehetőséget a szigmoid görbék vizsgálata, természetesen azokban az esetekben, amikor a vizsgált jelenség szigmoid görbével leírható. Az ilyen esetekben a szigmoid görbe egyenletének, az ezekben szereplő paraméterek értékének, a görbe jellemzőinek, jellegzetes pontjainak vizsgálata és analízise lehetővé teszi a vizsgált jelenség viselkedésének mélyebb megértését és a viselkedés jövőbeli alakulásának becslését, előrejelzését is, ami nagyon hasznos lehet, főleg sűrű helyzetekben.

Az eddigi kutatások során eddig fellelt, szigmoid görbével jól leírható helyzetek, példák a következők:

- A COVID–19-pandémia vizsgálata, előrejelzése (Szabó, 2020), tulajdonságainak tanulmányozása, ennek során a sűrű tényező a megfertőződéses, esetleg halálos esetek számának minél hatékonyabb csökkentése volt.
- A Multidiszciplináris Optimálás (MDO) folyamán adódhatnak olyan feladatok, melyeknek a megoldása során jelentős mértékű (több hét) számítógépi futásidők adódhatnak. Ráadásul az algoritmus többféle beállításait is próbálgatni kell, hogy a feladathoz legjobban használható beállítást megtalálhassuk, tehát egy többszöri futtatást igénylő, hosszadalmas numerikus kísérletsorozat alakulhat ki. Ebben az esetben is nagyon hasznos lehet, ha már a futás viszonylag korai szakaszában előre jelezzük a várható végeredményt, mert ezzel akár harmadára is csökkenthető a vizsgálat teljes időszükséglete (Szabó, 2018).
- Szerszámok kopási görbéjének vizsgálata során, mivel a kopási görbe jelentős szakasza szigmoid viselkedést mutat, a szigmoid görbe jellemzőinek vizsgálata alapján nem kell megvárni a szerszám élettartamának leteltét, hanem hamarabb is előrejelezhető a tönkremenetel lehetséges veszélye (Szabó, 2021).
- Különböző termékek élettartamát leíró görbéje szintén közelíthető szigmoid görbével, ezért a terméktervezésben szintén nagy haszonnal alkalmazhatók a szigmoid görbék, valamint a különböző termékek élettartamát leíró görbéje jól összehasonlítható, amiből hasznos információk következtethetők az egyik termék viselkedéséből a másik termékre vonatkozóan (Szabó, 2021).
- Mivel a termékek egy jól meghatározható százaléka hulladék formájában fejezi be az életútját, ezért nemcsak a termékek piacára, hanem a belőlük származó hulladék képződésére is következtethetünk a szigmoid görbék viselkedésének tanulmányozása útján (Szabó, 2019). Így akár a világ tengereinek, óceánjainak műanyag-szennyeződésére, ennek jövőbeli mennyiségére is lehet az ilyen vizsgálatokból információkat nyerni.
- Pedagógusok, valamint versenyek, pályázatok zsűrijei számára lehet hasznos az EBSYQ (Evolutionary Based System for Qualification and Comparison of Group Achievements), azaz csoportok teljesítményének evolúciós alapú összehasonlítási és minősítési rendszere (Szabó, 2017). Ennek során létrehozható a csoportok „spektruma”, meghatározhatóak a sajátértékek és ebből nagyon pontos, korrekt, abszolút objektív, számszerűen kimutatható, túlpontos összehasonlítást és rangsorolást lehetővé tevő szempontok vezethetők le. Ezzel megszűnik a „zsűri nagyon nehéz helyzetben volt” kifejezés érvényessége, sőt a csoportok felkészítő tanárai számára egyértelműen beazonosíthatók az esetleges

külön foglalkozást igénylő részcsoportok is (tehetséges tanulók támogatása, lemaradók korrepetálása, a kevésbé motiváltak jobb lelkesítése, stb). Ennek a rendszernek is a csoportok eredményeinek többfázisú szigmoid görbék formájában történő reprezentálása adja az alapját.

Jelen cikkben a szigmoidgörbe-analízist olyan kísérletsorozat teljes időszükségletének csökkentésére kívánjuk felhasználni, melynek során öntöttvas vasúti féktuskók súrlódás következtében történő melegedési folyamatát vizsgálják (Bolló, Sarka, Voith, 2024). Ez a folyamat vizsgálható végeselemes módszerrel is, de a folyamat jelentősen időigényes és számítástechnikai kapacitásigénye is nagy.

## 2. A vizsgálatok során alkalmazott módszerek

Az eddigiek alapján látható, hogy a szigmoid görbék jelentős multidiszciplinaritást mutatnak, az élet különböző területein, egymástól jelentősen távol álló jeleségek leírására és vizsgálatára is alkalmasak. Sőt, a többféle jelenség vizsgálata „előreviszi” a vizsgálatokat, mivel az egyik jelenség vizsgálata során a szigmoid görbe egy jellemzőjének, vagy jellegzetes pontjának egy különleges jelentőségét, értelmezését tárhatjuk fel. Ezt átvihetjük egy másik jelenség vizsgálatára is, ahol ez a jellemző nem volt feltűnő, vagy elsikkadt, és pusztán amiatt kerül előtérbe és vizsgálatra, hogy a szigmoid görbének ebben az esetben is megvan az a jellemző pontja, paramétere, sajátossága. Ebben az esetben természetesen ki kell dolgozni ezeknek a jellemzőknek az erre a jelenségre történő értelmezését, jelentését, okainak vizsgálatát. Ez többletfeladatokat okozhat, de hasznos és érdekes új szempontokat, megvilágítást adhat egy újabb jelenség vizsgálatához, valamint így bővül az a repertoár, amit a levonható következtetések, vizsgálati szempontok, összehasonlítható jellemzők tárháza jelent.

Ezek a sokoldalú vizsgálatok eredményezik a jeleségek vizsgálatának részletesebbé, sokoldalúvá, hasznosabbá, érdekesebbé válását.

Az ebben a cikkben bemutatott vizsgálatok tehát felhasználják az eddig vizsgált jelenségek által adott újabb lehetőségeket, szempontokat is, ami további következtetések, eredmények elérését teszi lehetővé. Tekintsük át, melyek azok a fontosabb technikák, vizsgálati fogások, eljárások, melyeket alkalmazva biztosítható, hogy minél jobb, jelentős időmegtakarítást eredményező, de megbízható, megfelelően pontos előrejelzést adhassunk a vizsgált jelenség viselkedésére nézve:

### a. A valós görbe közelítése szigmoid görbével

Az első fontos feladat a valós viselkedést leíró görbe tanulmányozása, a szigmoid jellegek felismerése, valamint annak eldöntése, hogy a logisztikai görbe (Pearl, Reed, 1920), vagy a növekedési görbe (Bertalanffy, 1960) (1. táblázat) írja-e le jobban a jelenséget? Ehhez mindkét görbetípussal végre kell hajtani a valós görbe közelítését, számolni kell mindkét esetben a regressziós együtthatót, majd kiválasztjuk azt a közelítési módot, amelynek a regressziós együtthatója 1-hez közelebbi értéket ad, abban az esetben áll fenn a jobb korreláció. Egyes esetekben, a görbék alakját tekintve, akár első ránézésre, szabad szemmel is eldönthető ez a választás, de célszerű a regressziós együttható számolásával számszerűen is alátámasztani ezt a döntést. A jelen cikkben végzett vizsgálatok esetén a Pearl–Reed-görbe regressziós együtthatója 0,99768 volt, a Bertalanffy-görbe esetén pedig 0,98657. A görbék egyenleteit az (1) összefüggés tartalmazza.

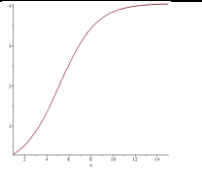
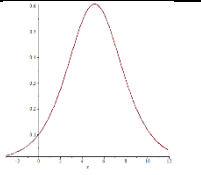
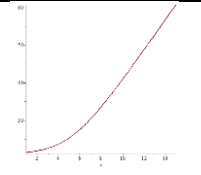
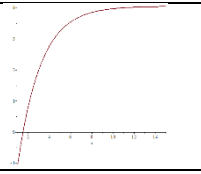
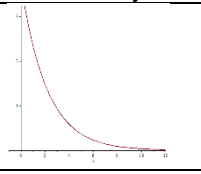
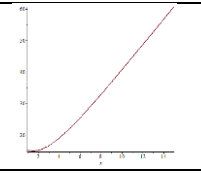
A közelítéshez a legkisebb négyzetek elvét alkalmazzuk, melynek során célunk, hogy a vizsgált pontokban a valós görbe és a közelítő szigmoid görbe értékei közötti különbségek négyzetösszege minimális legyen (2). Ehhez a Nelder–Mead optimumkereső algoritmust használjuk (Nelder, Mead, 1965), aminél

a célfüggvény ez a négyzetösszeg, és ennek minimumát keressük. Az algoritmus paramétereinek beállítását ugyanolyan értékekre állítjuk a logisztikai és a növekedési görbe esetére is, hogy azonos feltételek mellett történjen az optimalás, így a regressziós tényező értékében adódó eltérés a két közelítés közt azonos feltételek melletti optimalás eredményeként adódik, pusztán azon múlik, hogy mennyire jó a korreláció mértéke az egyes görbetípusok és a valós görbe közt.

A regressziós tényező számításához el kell végezni egy transzformációt, mivel a közelítéshez alkalmazott szigmoid görbék egyenlete exponenciális jellegű, a regressziós együttható pedig lineáris regressziót minősít, ezért a görbék eredeti egyenletét lineárisra transzformáljuk. Ehhez a Fisher–Pry-transzformációt alkalmazzuk (Fisher, Pry, 1971).

### 1. táblázat

A vizsgálatokhoz a két legfontosabb szigmoidgörbe-típus

görbe	derivált	integrál
Pearl–Reed		
		
Bertalanffy		
		

Az 1. táblázatban szereplő görbék egyenletei:

$$\text{Pearl- Reed: } y = K/(1 + ce^{-rx}) \quad , \quad \text{és Bertalanffy: } y = K(1 - ce^{-rx}) \quad (1)$$

A szabad szemmel történő kiválasztást segítheti a Pearl–Reed-féle logisztikai görbe kezdeti szakaszán található laposabb, visszahajló rész, ami a Bertalanffy-féle növekedési görbében nincs meg. A görbék deriváltjait szemlélve feltűnik, hogy a logisztikai görbe deriváltja „harang” alakú, míg a növekedési görbe monoton csökkenő lefutást mutat. Ennek az az oka, hogy a logisztikai görbének a kezdeti, exponenciális növekedést képviselő része után elkövetkezik a telítődési szakasz, a kettő közt pedig van egy inflexiós pont. A növekedési görbe végig csak növekedést mutat, aminek a mértéke csökkenő, tehát végül is itt is bekövetkezik a telítődés, de nincs inflexiós pont. Ezek az eltérések okozzák, hogy az adott jelenség vizsgálatának a kezdetén az első legfontosabb döntés, hogy melyik görbe írja le jobban a valós viselkedést. Ehhez néha elegendő lehet a szabad szemmel történő kiválasztás, de sokkal megnyugtatóbb a regressziós együttható alapján történő döntés.

#### b. A legkisebb négyzetek elvének alkalmazása

A közelítéshez a legkisebb négyzetek elvét alkalmazzuk, melynek során a valós görbe pontjait  $(x_i, y_i)$ ,

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ , a kívánt függvénnyel közelítjük,  $y^* = f(x)$ , úgy, hogy a közelítő görbe paramétereinek azokat az értékeit keressük, melyek mellett a vizsgált pontokban lévő eltérések négyzetösszege minimális. Ez egy optimumkeresési feladat, ahol a változók a  $K$ ,  $r$  és  $c$  paraméterek, amelyek a minimumot biztosítják. Ezt a korlátozás nélküli optimumkereső feladatot a Nelder–Mead optimumkereső algoritmus segítségével oldunk meg. Ennek az optimumkereső folyamatnak a során a célfüggvény:

$$H = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2 = \min . \quad (2)$$

Létezik más megoldási lehetőség is a legkisebb négyzetek elvére alapuló közelítés numerikus megoldására. Mivel a minimum ott lehetséges, ahol a  $H$  célfüggvény első deriváltja 0 értéket vesz fel, tehát felírható a célfüggvény deriváltja a  $K$ , az  $r$  és a  $c$  paraméter szerint deriválva is, melyeket 0-val egyenlővé téve három egyenlet adódik. Ha ezt az egyenletrendszert megoldjuk  $K$ ,  $r$  és  $c$  értékre, akkor szintén megkapjuk a közelítő függvényt. A jelen cikkben leírt görbék közelítéseket a Nelder–Mead optimáló algoritmussal számolt optimális értékekkel végeztük.

Annak eldöntéséhez, hogy melyik görbetípus közelíti jobban a vizsgált jelenség valós görbét, a regressziós tényezőt számoljuk a logisztikai görbe és a növekedési görbe esetére is, és amelyiknek közelebb van az abszolút értéke 1-hez, abban az esetben jobb a közelítés, tehát azt a görbét alkalmazzuk majd a további vizsgálatokhoz.

A regressziós együttható (5) számolásához lineáris alakúvá alakítjuk a görbék egyenleteit (4). Ehhez a Fisher–Pry-transzformációt alkalmazzuk (3).

Lineáris transzformáció a Bertalanffy-függvény esetére:

$$y(x) = K(1 - ce^{-rx}) , \quad ce^{-rx} = \frac{K-y(x)}{K} , \quad \ln c + \ln e^{-rx} = \ln \left( \frac{K-y(x)}{K} \right) , \quad (3)$$

így az egyenlet lineáris alakja a Bertalanffy-görbére:

$$y^* = a + bx , \quad \text{ahol } a = \ln c , \quad b = -r .$$

A lineáris transzformáció a Pearl–Reed-függvényre hasonlóképpen elvégezhető:

$$y(x) = \frac{K}{1+ce^{-rx}} , \quad \frac{K-y(x)}{y(x)} = ce^{-rx} , \quad \ln c + \ln e^{-rx} = \ln \frac{K-y(x)}{y(x)} . \quad (4)$$

A regressziós együttható a következőképpen számolható:

$$R_{lin} = \frac{A_{xy} - \frac{B_{xy}}{n}}{\sqrt{\left(C_x - \frac{D_x}{n}\right)\left(C_y - \frac{D_y}{n}\right)}} \quad (5)$$

ahol:

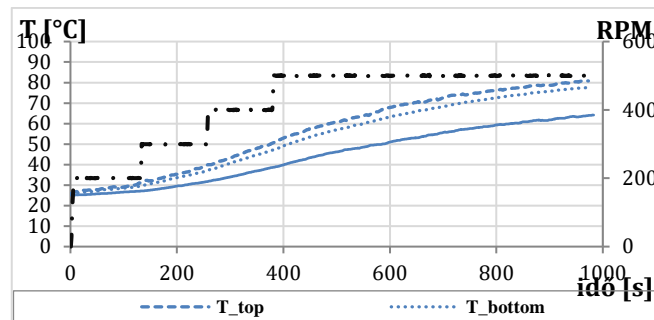
$$A_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i , \quad B_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i , \quad C_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 , \quad D_x = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$

$$C_y = \sum_{i=1}^n y_i^2 , \quad D_y = \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 .$$

Az (5) egyenletben a képlet a (3) és (4) egyenletben számolt  $y^*$  transzformált függvényre határozza meg a regressziós együtthatót, de az egyszerűség kedvéért a képletben visszatértünk az  $y$  jelöléshez.

### 3. Vasúti féktuskók mérési eredményeinek értékelése

A Falex Tribology (Falex Tribology, 2024) cég által végzett mérések célja a vasúti féktuskók súrlódás miatti melegedésének vizsgálata volt. A körgyűrű alakú próbatesteket állandó sebességgel forgatták, 45 N terhelés mellett. A hőmérsékletet a próbatest tetején (Top) és alján (Bottom), valamint a próbatestet befogó alkatrész alján (Base) hőelemmel mérték. A kísérletek során 200 percenkénti fordulatszámról indították a méréseket és 140 s-enként növelték a fordulatszámot 100 1/min értékkel, míg el nem érték az 1000 s-et. A kapott eredményeket diagramban dolgozták fel, ami az *1. ábrán* látható.

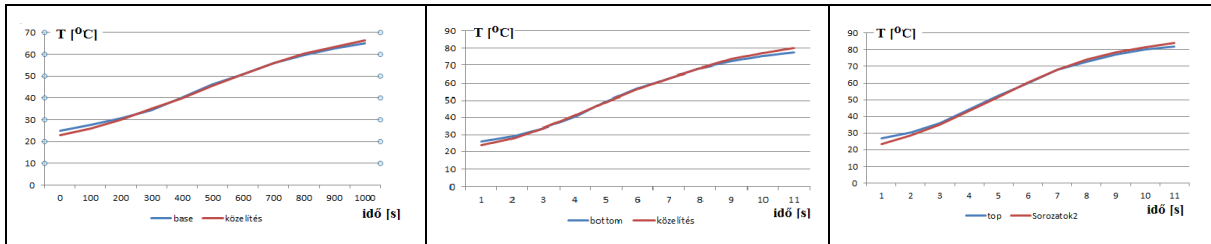


**1. ábra.** A mérési eredmények  
(forrás: Bolló, Sarka, Voith, 2024)

Az *1. ábrán* látható, hogy a mérési eredményeket leíró görbék szigmoid görbék, sőt szemmel láthatólag logisztikai görbék. A görbék tulajdonságait, az egyenletekben szereplő paramétereket vizsgálva tehát sok hasznos következtetést lehet levonni, sőt lehetővé válik a görbe első felében (500 s előtt) szereplő értékekből a végérték (1000 s) előrejelzése is, ami a teljes mérési idő felére csökkentését is jelentheti, ezzel nagymértékben meggyorsítható a vizsgálatok menete. A kész görbék birtokában a görbék paramétereit, jellegzetességeit vizsgálva összehasonlítások is végezhetők, ezekből a jövőben további hasznos szempontok, következtetések származhatnak.

A közelítés első lépése a szigmoid görbék egyenletében szereplő paraméterek számértékének meghatározása ( $K$ ,  $r$ ,  $c$ ). A közelítéshez a logisztikai görbét (Pearl–Reed) alkalmazzuk, mivel szembeötlő a valós görbék kezdeti alakja, az exponenciális növekedés jelenléte. Ehhez annyi megjegyzés kívánkozik, hogy a görbék növekedésének két szakasza különíthető el az *1. ábrán*: Az első szakasz egy gyorsabb, exponenciális jellegű növekedés, mely a forgási sebesség növekedésével függ össze. A második növekedési szakasz a konstans forgási sebességhez tartozik, ami telítődési típusú növekedést mutat. Tehát elmondható, hogy növekvő forgási sebességhez a logisztikai görbe alkalmasabb a közelítéshez, míg konstans forgási sebesség esetén szóba jöhet a Bertalanffy-féle növekedési görbe is.

A *2. ábra* mutatja a görbék közelítését (base, bottom és top eset), ehhez a valós görbéket az *1. ábrán* látható képből leolvasott értékek alapján építettük fel, ám ez nem egy valóságos fékezés mintázata. Az ábra alapján elmondható, hogy a közelítés mértéke megfelelő, kis eltérés látható a görbék legelején (ez a szakasz exponenciális növekedése) és a végén (a telítődés közelítése). A paraméterek további finomításával ezek az eltérések kissé csökkenthetők, ha esetleg a jövőben szükséges. A közelítő görbék paramétereit ( $K$ ,  $r$ ,  $c$ ) a *2. táblázat* tartalmazza. Ebben a táblázatban feltüntettük a végeredmény (idő = 1000 s-nél a hőmérséklet) közelítő értékeit is az egyes görbékre, ez az érték is finomítható további munkával, ha szükséges a közelítés minőségének javítása, jelenleg az eltérés 2% körül van.

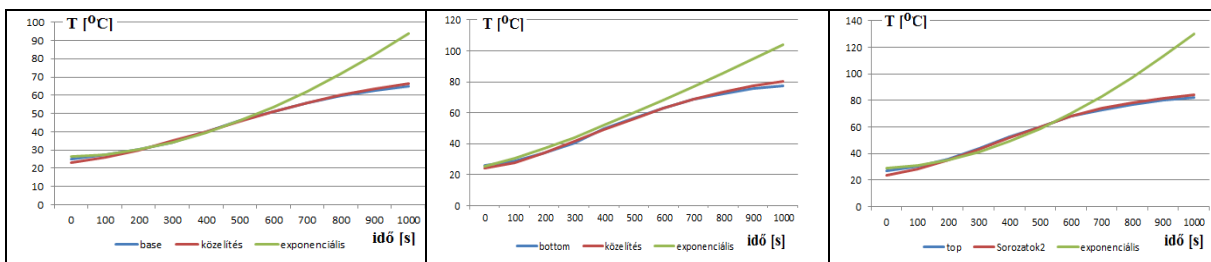


2. ábra. A valós görbék közelítése szigmoid görbével

2. táblázat. A közelítő görbék paraméterei

görbe	K	c	r	valós végeredm.	közelítés
base	80	3,0927	0,002822	65	66,5
bottom	88,729	3,1957	0,003429	78,5	80,3
top	101,5	3,6736	0,003353	82	84

Mivel a logisztikai görbék két részből állnak (kezdeti exponenciális növekedési szakasz, majd a telítődési szakasz), ezért lehetséges a kezdeti exponenciális növekedési szakasz külön közelítése is exponenciális görbével. Az így kialakuló görbe csak az inflexiós pont megjelenéséig közelíti jól az eredeti görbét, viszont azt mutatja nagyon eklatánsan, hogy mi lett volna, ha a forgási sebesség növekedése folyamatosan megmarad a vizsgálat végéig, azaz 1000 s-ig. Ekkor nyilvánvalóan nagyobb hőmérsékleti végeredmény alakult volna ki. A közelítő exponenciális görbéket is mutató diagramok a 3. ábrán, az ehhez tartozó görbék paraméterei (K, n, c) és az így adódó hőmérsékleti végeredmények számértékei a 3. táblázatban találhatóak. A közelítés alapját képező exponenciális egyenlet:  $y = Kx^n + c$ .



3. ábra. A valós görbék közelítése szigmoid görbével, valamint az exponenciális növekedés közelítése

3. táblázat. Az exponenciális közelítés paraméterei

görbe	K	c	n	expon. max. hőmérs.
base	0,0003294	36,3055	1,770026	93,77
bottom	0,0004953	27,20232	1,770026	103,75
top	0,0219967	25,25303	1,184175	128,35

#### 4. Összefoglalás

Vasúti féktuskók súrlódás következtében történő felmelegedése kísérleti vizsgálatainak szigmoid görbék segítségével történő kiértékelését végeztük el, azzal a céllal, hogy a végeredmények megismeréséhez szükséges időt csökkentsük. Ehhez első lépésként a rendelkezésre álló valós görbét szigmoid görbével közelítjük (ehhez akár három valós görbepont is elegendő lehet), majd az így adódó görbék tulajdonságait, egyenleteik paramétereit vizsgáljuk a további következtetések levonásához. Olyan esetekben, amikor nem áll rendelkezésre a valós görbe, akkor elegendő a mérések elvégzése az inflexiós pont kialakulásáig, onnan már közelíthető a görbe és meghatározható a várható végeredmény. Az elvégzett közelítések, vizsgálatok során néhány következtetés vonható le:

- a. A forgási sebesség növekedése esetén a görbe alakja logisztikai görbe, tehát hangsúlyos a kezdeti szakaszban az exponenciális növekedési jelleg, így ebben az esetben kétségtelenül a Pearl–Reed- (logisztikai) görbe lesz a legalkalmasabb a valóságos görbék közelítésére.
- b. Konstans forgási sebesség esetén a görbe jellege telítődés- jellegű növekedés, tehát a Bertalanffy-féle görbe is szóba jöhet a közelítéshez. Ebben az esetben célszerű kiszámolni a regressziós konstans mind a logisztikai görbére, mind pedig a Bertalanffy-görbére is, és amelyik esetén a regressziós konstans abszolút értéke közelebb van az 1-hez, az a görbefajta lesz alkalmasabb a valós görbék közelítésére.
- c. A vizsgált görbék esetén a fő különbségek a  $K$  és  $r$  paraméter esetében adódnak, az inflexiós pont helyében nem tapasztalható különbség, ami érthető is, hiszen mindegyik vizsgált görbe esetén 400 s után térünk át a konstans forgási sebesség értékére.
- d. A Top és Bottom görbék egymáshoz viszonylag közel haladnak, köztük az eltérés  $5\text{ °C}$  alatt van, a Base görbe ezektől  $10\text{--}15\text{ °C}$ -kal elmarad.
- e. A mérések végértékének megismerése (1000 s érték esetén az elért maximális hőmérséklet) a szigmoid görbék használatával feleannyi idő alatt lehetséges, mint a mérések teljes elvégzése útján.
- f. A szigmoid görbék alkalmazásával, a jó közelítést kihasználva, az is lehetséges, hogy a hőmérsékleti értékek további alakulását is előre jelezzük, azaz lehetséges az értékek meghatározása 1500 s értékre, vagy ha szükséges, még tovább is. Ehhez ad jó előre jelző értéket a közelítő görbék  $K$  paramétere (2. táblázat), ami a telítődési értéket, azaz a görbe által elérhető jövőbeli lehetséges maximumértéket adja meg.
- g. A görbék  $r$  paramétere a növekedés gyorsaságára ad következtetési lehetőséget, ez alapján az szűrhető le, hogy a Bottom és Top görbék egymáshoz közeli értékkel rendelkeznek, ettől kissé elmarad a Base görbe növekedési gyorsasága.
- h. Az eddigi vizsgálatok, illetve más jelenségek tanulmányozása azt mutatja, hogy a telítődés végére, illetve azon túli előrejelzésekkel óvatosan kell bánni, mert pontatlan értékeket kapunk, ha az inflexiós pont elérése előtti értékek alapján próbálunk messzemenő következtetéseket levonni, ugyanis ekkor még csak a kezdeti, exponenciális növekedés jelezhető előre, a telítődési szakasz még el sem kezdődött.
- i. A kezdeti, exponenciális szakasz külön is közelíthető, ekkor azt ismerhetjük meg, hogy mi történik, ha folytatódik a forgási sebesség növekedése, azaz megtudható, hogy mennyi lesz ekkor a kialakuló maximális hőmérséklet.
- j. Az exponenciális közelítés csak addig halad az eredeti görbéhez közel, amíg el nem érjük az inflexiós pontot. Az inflexiós pont elérése után már a telítődési szakasz érvényesül, amelynek nem exponenciális a növekedése.



A görbék deriváltjainak (harang alakú görbék) vizsgálatával további hasznos összehasonlítások, értékelési szempontok lehetségesek, sőt a derivált görbék jellemzői a vizsgált jelenség olyan sajátosságaira is rávilágíthatnak, amelyeknek eddig nem tulajdonítottunk jelentőséget, vagy egyáltalán nem lehetett ezeket felismerni. Ezek vizsgálata további érdekes következtetések levonására adhat lehetőséget.

Ha szükség van több eset, több görbe összehasonlítására és rangsorolására, akkor hasznos lehet az EBSYQ-rendszer alkalmazása is, amely túpontos különbségeket tud kimutatni még olyan esetekben is, amikor az összehasonlítandó görbék nagyon hasonlóak, szabad szemmel szinte nem fedezhető fel közöttük különbség. A jövőben a vizsgálatokat a deriváltak vizsgálatával, illetve az EBSYQ rendszer alkalmazásával kívánjuk majd folytatni.

## Irodalom

- [1] Szabó F. J. (2020): A COVID–19-járvány időbeli alakulásának vizsgálata szigmoid görbékkel. (In Hungarian, Study of COVID-19 history by sigmoid curves) *Multidiszciplináris Tudományok*, 10, 3, pp. 294–306., 13 p., <https://doi.org/10.35925/j.multi.2020.3.35>
- [2] Szabó F. J. (2018): Optimumkereső algoritmusok iterációtörténetének vizsgálata. (In Hungarian, Investigation of iteration history curves of optimization algorithms) *GÉP*, 69 (4), pp. 82–85.
- [3] Szabó, F. J. (2021): Analysis of Wear Curves as Sigmoid Functions. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 22, pp. 273–281., 14 p., [https://doi.org/10.1007/178-981-15-9529-5\\_24](https://doi.org/10.1007/178-981-15-9529-5_24)
- [4] Szabó F. J. (2021): A szigmoid görbék multidiszciplinaritása. *GÉP*, LXXII, 3–4, pp. 61–64., 4 p. (In Hungarian, multidisciplinary of sigmoid curves)
- [5] Szabó, F. J. (2019): Application of sigmoid curves in environmental protection. In: Szita Tóthné, Klára, Jármai Károly, Voith Katalin (eds.): *Solutions for Sustainable Development: Proceedings of the 1st International Conference on Engineering Solutions for Sustainable Development, (ICESSD 2019)*. London, United Kingdom: CRC Press, pp. 1–7., 7 p.
- [6] Szabó, F. J. (2017): Evolutionary Based System for Qualification and Evaluation of Group Achievements (EBSYQ). *International Journal of Current Research*, Vol. 9, Issue 08, pp. 55507–55516., August, 2017.
- [7] Bolló B., Sarka F., Voith K. (2024): Egy egyszerűsített fékmodell termikus elemzése. *GÉP*, LXXV. évfolyam, 1. szám, pp. 19–23.
- [8] Pearl, R., Reed, L. J. (1920): On the Rate of Growth of the Population of the United States since 1790 and its Mathematical Representation. *Proc. of the National Academy of Sciences*. Vol. 6. No. 6, pp. 275–288.
- [9] Bertalanffy, L. (1960): Principles of Theory of Growth. In: *Fundamental Aspects of Normal and Malignant Growth*. Amsterdam, pp. 137–259.
- [10] Nelder, J. A., Mead, R. (1965): A simple method for function minimisation. *Computer Journal* 7, pp. 308–313., <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308>
- [11] Fisher, J. C., Pry, R. H. (1971): A Simple Substitution Model of Technological Change, *Technological Forecasting and Social Change*, 3, pp. 75–88.
- [12] *Falex Tribology*. <https://eu.falex.com/>, utolsó letöltés: 2024. 04. 04.