

## BILLENŐASZTAL SZÁMÍTÓGÉPPLEL SEGÍTETT DINAMIKAI ELEMZÉSE

Tüske István 

PhD-hallgató, Miskolci Egyetem, Szerszámgépek Intézeti Tanszéke  
3515 Miskolc-Egyetemváros, e-mail: [tuske.istvan@student.uni-miskolc.hu](mailto:tuske.istvan@student.uni-miskolc.hu)

Hegedűs György 

egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Szerszámgépek Intézeti Tanszéke  
3515 Miskolc-Egyetemváros, e-mail: [gyorgy.hegedus@uni-miskolc.hu](mailto:gyorgy.hegedus@uni-miskolc.hu)

### **Absztrakt**

A cikk egy párhuzamos kinematikával rendelkező billenőasztal dinamikai elemzését mutatja be. A szerkezet dinamikai elemzése és a szerkezet modelljének elkészítése egy 3D-s CAD-szoftverrel lesz végrehajtva. A szerkezet 3D-s modellje többek között magában hordozza a vizsgálathoz szükséges paramétereket, úgymint, az alkatrészek méreteit és pozícióját, valamint az alkatrészek tömegét. A billenőasztal dinamikai elemzése során a szerkezet működéséhez szükséges aktuátorerők lesznek meghatározva. Az aktuátorerőket az asztal központi kardáncsuklójának elfordulási nyomatéka határozza meg a vizsgált szerkezet esetében. Természetesen az aktuátorerők függenek az aktuátorok beépítési helyétől, a mozgó alkatrészek tömegétől, valamint az aktuátorok elmozdulásából adódó gyorsulástól.

**Kulcsszavak:** kinematika, gyorsulás, dinamika, aktuátorerő

### **Abstract**

The paper presents the dynamic analysis of a tilting table with parallel kinematics. The dynamic analysis of the structure and the creation of the structure model will be performed with a 3D CAD software. The 3D model of the structure includes, among other things, the parameters necessary for the analysis, such as the dimensions and position of the parts, as well as the weight of the parts. During the dynamic analysis of the tilting table, the required actuator forces for the operation of the structure will be determined. Actuator forces are determined by the torque of the table's central cardan joint in the case of the examined structure. Of course, the actuator forces depend on the installation location of the actuators, the mass of the moving parts, and the acceleration given by the displacement of the actuators.

**Keywords:** dynamics, parallel kinematics, acceleration, actuator force

### **1. Bevezetés**

A tanulmány a kulcsszavakra épül. A szerkezet bemutatását követően a mechanizmus kinematikai és dinamikai jellemzőinek ismertetése a kitűzött cél.

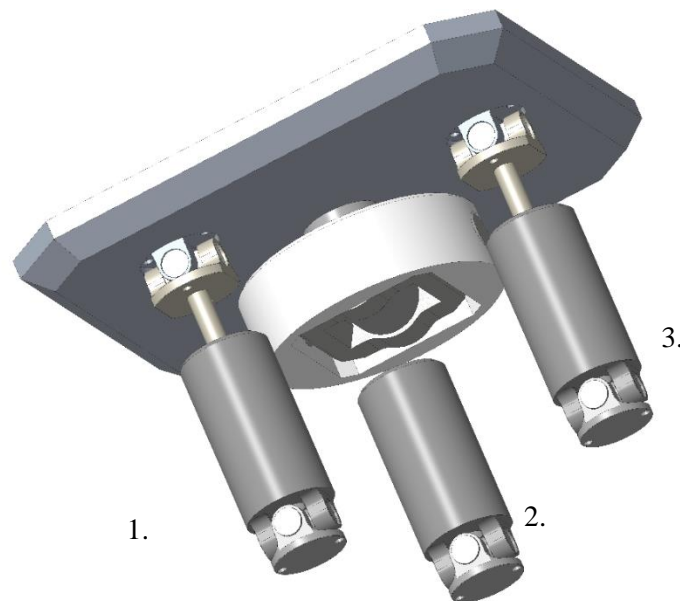
A cikk címe magában foglalja a szerkezet kinematikai és dinamikai vizsgálatát is. A kinematika a dinamikának az az ága, amely a mozgással foglalkozik, eltekintve az erőktől és a nyomatékoktól (Al-rasheed, 2019; Morra, 2018). A dinamika a mechanikának az a része, amely azon erőkkel és nyomatékokkal foglalkozik, amelyek elsődlegesen a mozgásokhoz köthetőek (Featherstone, 2008).

Ahogy említve lett az absztrakban CAD-szoftver segítségével lesznek megoldva a tanulmányban lévő feladatok. A CAD a „Computer – Aided Design” kifejezés rövidítése, ami számítógéppel segített tervezést jelent (Kumar et al., 1989). Valóban egy olyan eszköz a mérnökök, kutatók, műszaki szakemberek kezében, ami nagyban segíti egy adott műszaki probléma megoldását.

Az aktuátorerők kiszámításához szükséges egyenletek a mechanizmus platformjának az egyensúlyából adódnak. Azaz a központi kardáncsukló tengelyein ébredő nyomatékokkal az aktuátorerők fognak egyensúlyt tartani. A központi kardáncsukló tengelyein ébredő nyomatékokat a másodfajú Lagrange-mozgásegyenlettel lehet számítani. A mozgásegyenlet az 5. fejezetben lesz ismertetve. A központi kardáncsukló tengelyein ébredő nyomatékokból meg lesznek határozva az aktuátorok tengelyeiben ébredő erővektorok a nyomaték definíciójából. A nyomaték nem más, mint az adott erőkaron működő erő. A nyomaték ismert a másodfajú Lagrange-mozgásegyenletből. Az erőkarok adottak a szerkezet geometriájából. Az aktuátorerők kiszámításához az összes paraméter rendelkezésre áll.

## 2. A vizsgált szerkezet bemutatása

A párhuzamos kinematikájú billenőasztalt az *1. ábra* szemlélteti, mely tartalmazza az aktuátorok számítását is az azonosíthatóság értelmében.



*1. ábra.* A párhuzamos kinematikájú billenőasztal

A vizsgált szerkezetnek négy darab párhuzamos ága van, ami összeköti az asztalt a bázissal. A négy párhuzamos ágból három azonos szerkezeti felépítésű aktuátor és egy a központi kardáncsukló. Az azonos szerkezeti felépítésű aktuátorok egyenként két kardáncsuklóból és egy prizmatikus kapcsolatból épülnek fel. A központi kardáncsukló egy bölcsőben van ágyazva, ami maga a bázis része. Ennek a felépítésnek eredményeként a billenőasztal csak a központi kardáncsukló két tengelye körüli szögelfordulásra képes (két szabadságfokú párhuzamos kinematikájú mechanizmus).

Az aktuátorerőket befolyásoló paramétereket, azaz a mozgó alkatrészek tömegeit az *1. táblázat* tartalmazza. Az alkatrészek inerciamátrix-elemeinek ismertetésére nem kerül sor.

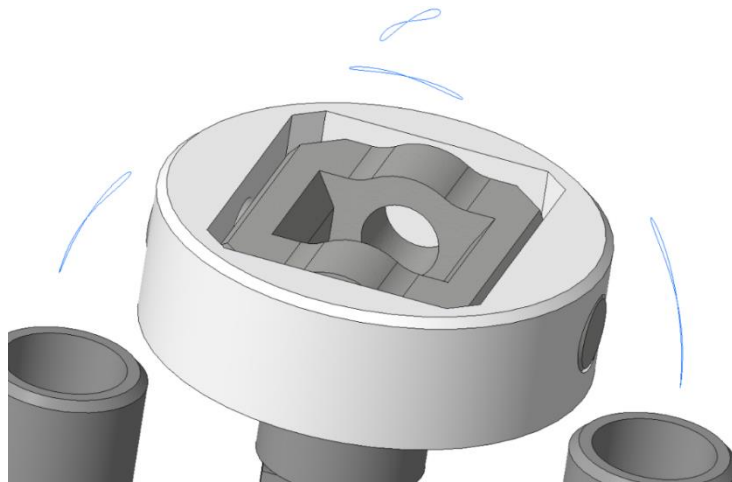
**1. táblázat.** A mozgó alkatrészek tömegei

| Mozgó alkatrészek                 | Tömeg [kg] |
|-----------------------------------|------------|
| Asztal                            | 780,526    |
| Központi kardáncsukló alsó villa  | 69,889     |
| Központi kardáncsukló felső villa | 48,604     |
| Aktuátor felső villa              | 5,919      |
| Aktuátor kardánkereszt            | 4,785      |

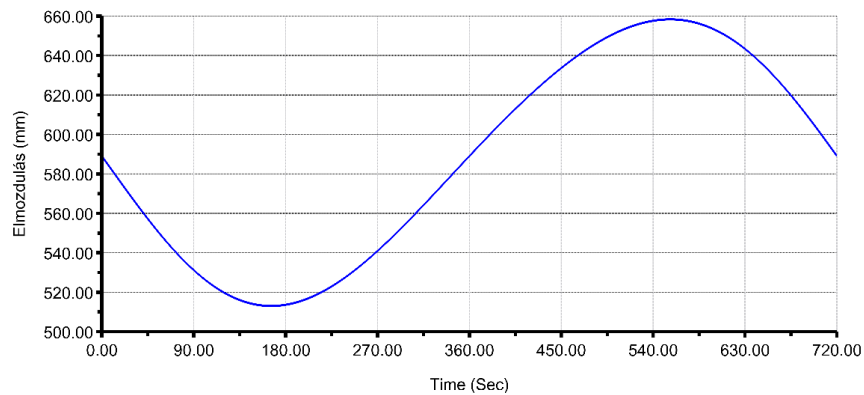
### 3. Az aktuátorok elmozdulásfüggvényei

Az aktuátorok elmozdulása az asztal elmozdulásából adódik. Az asztal elmozdulása a központi kardáncsukló két tengelye körüli elfordulásból tevődik össze (Gonzalez-Lopez & Gonzalez-Vega, 1999). Az asztal elmozdulásakor leírt térgörbét az asztal síkjában lévő célszerűen választott pont írja le, mely az asztal középpontjában helyezkedik el.

Az asztal elmozdulásához tartozó aktuátor elmozdulásokat (2. ábra) a 3D-s CAD-szoftver mechanizmus modulja készíti el, tulajdonképpen ez a szerkezet inverz kinematikájának a megoldása (Merlet, 2006a). A szerkezet egyes alkatrészei (2. ábra) el lettek rejtve annak érdekében, hogy láthatóak legyenek az elmozdulásokat ábrázoló térgörbék.

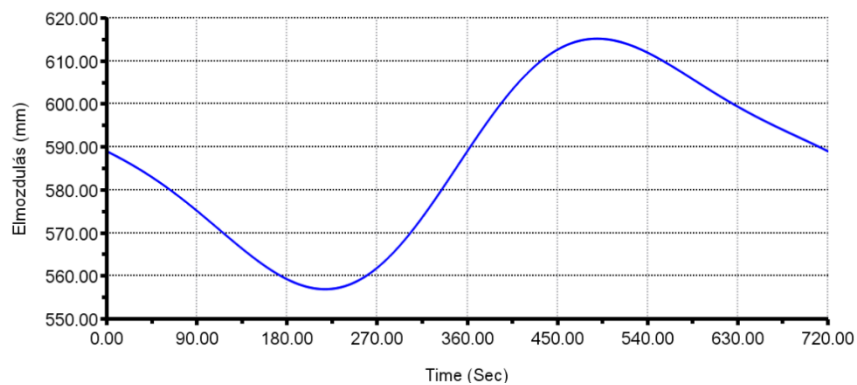
**2. ábra.** Az asztal és az aktuátorok elmozdulása során leírt térgörbék

A 3. ábra szemlélteti az első aktuátorelmozdulás függvényét, azaz az aktuátor hosszváltozását az idő függvényében.



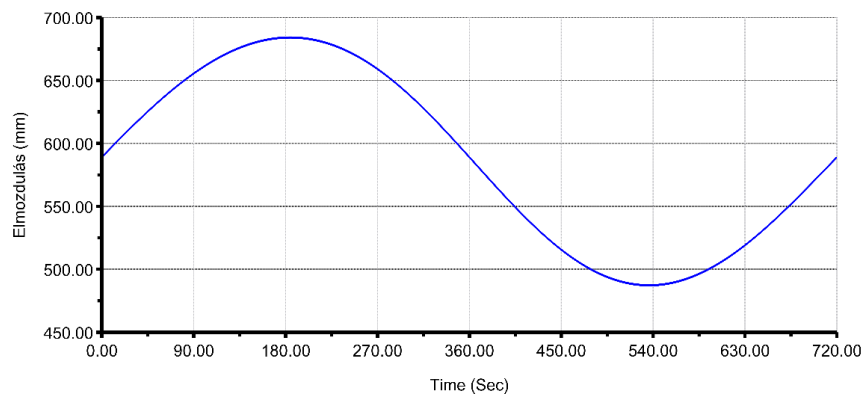
**3. ábra.** Az első aktuátorelmozdulás függvénye

A 4. ábra szemlélteti a második aktuátorelmozdulás függvényét, azaz az aktuátor hosszváltozását az idő függvényében.



**4. ábra.** A második aktuátorelmozdulás függvénye

Az 5. ábra szemlélteti a harmadik aktuátorelmozdulás függvényét, azaz az aktuátor hosszváltozását az idő függvényében.



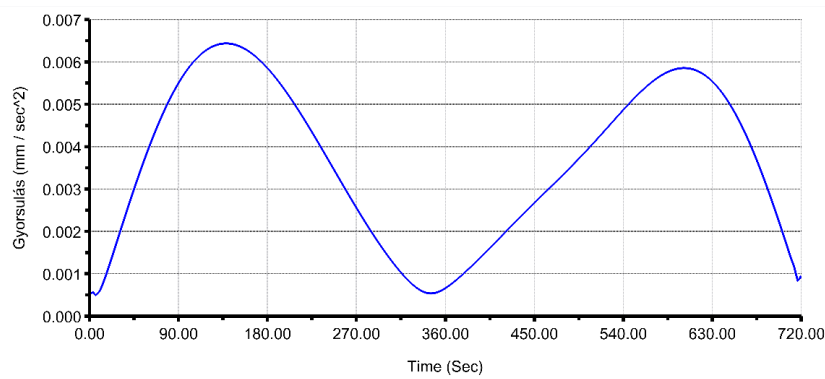
**5. ábra.** A harmadik aktuátorelmozdulás függvénye

A szerkezet elemei elmozdulásának vizsgálata a kinematikai elemzések közé tartozik.

#### 4. Az aktuátorok gyorsulásfüggvényei

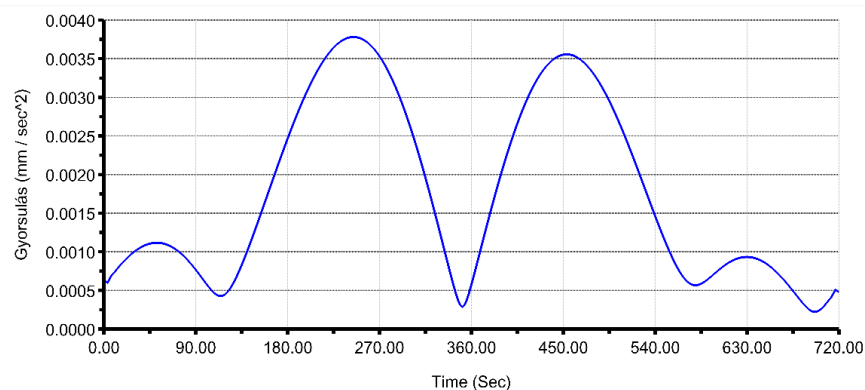
Az asztalt mozgató aktuátorok gyorsításakor a golyósorsós mozgatást megvalósító rendszerre ható erőt befolyásolja a rendszerben részt vevő elemek tömege, a gyorsulásból adódó tehetetlenségi erő és a golyósanyákat előfeszítő erő. Hasonló erőrendszer hat az asztalmozgató rendszerre a szerkezet lassításakor is. Ezeknek az erőknek köszönhetően a rendszer elemei rugalmasan deformálódnak, mely deformáció a pozicionálási pontosságra hatással van. A szerkezet elemzésekor a haladó és forgó mozgásból számított gyorsulások meghatározásának jelentős szerepe van a rendszer dinamikai tulajdonságaira is.

Az aktuátorok gyorsulásfüggvényei az aktuátorok elmozdulásfüggvényeiből származnak, két idő szerinti deriválás alkalmazásával (Jazar, 2010; Merlet, 2006b). A 6. ábra szemlélteti az első aktuátor gyorsulás függvényét, azaz az aktuátor hosszváltozásának az idő szerinti második deriváltját.



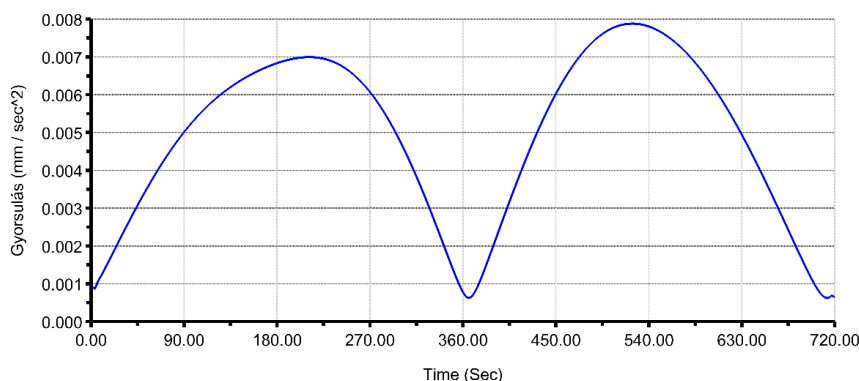
6. ábra. Az első aktuátor gyorsulás függvénye

A 7. ábra szemlélteti a második aktuátor gyorsulás függvényét, azaz az aktuátor hosszváltozásának az idő szerinti második deriváltját.



7. ábra. A második aktuátor gyorsulás függvénye

A 8. ábra szemlélteti a harmadik aktuátor gyorsulás függvényét, azaz az aktuátor hosszváltozásának az idő szerinti második deriváltját.



8. ábra. A harmadik aktuátorgyorsulás függvénye

A szerkezet elemei gyorsulásának vizsgálata a kinematikai elemzések közé tartozik.

## 5. A szerkezet működtetéséhez szükséges aktuátorerők

Az aktuátorok valósítják meg a mechanizmus mozgatását, ehhez szükséges meghatározni, hogy az adott aktuátorelmozdulás-függvény megvalósításához mekkora erőre van szükség aktuátoronként (Jazar, 2007a; Jazar, 2007b). A mechanizmus központi kardáncsuklójára felírt másodfajú Lagrange-mozgásegyenlet a következő alakot ölti:

$$f = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}, \quad (1)$$

ahol  $f$  az általános erő,  $q$  az általános koordináta, az  $L$  pedig a Lagrange-függvény. A Lagrange-függvény nem más, mint a kiegészítő kinetikus energia ( $K$ ) és a potenciális energia ( $P$ ) különbsége, azaz

$$\mathcal{L} = K - P, \quad (2)$$

ahol

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 \mathbf{r}_i^2 \quad (3)$$

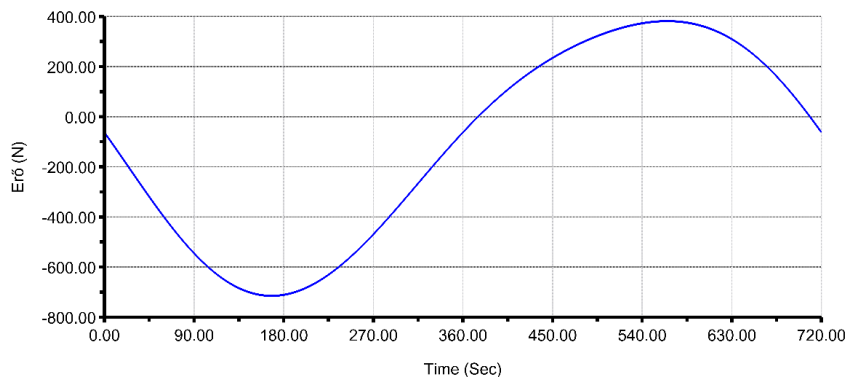
és

$$P = mg \Delta z. \quad (4)$$

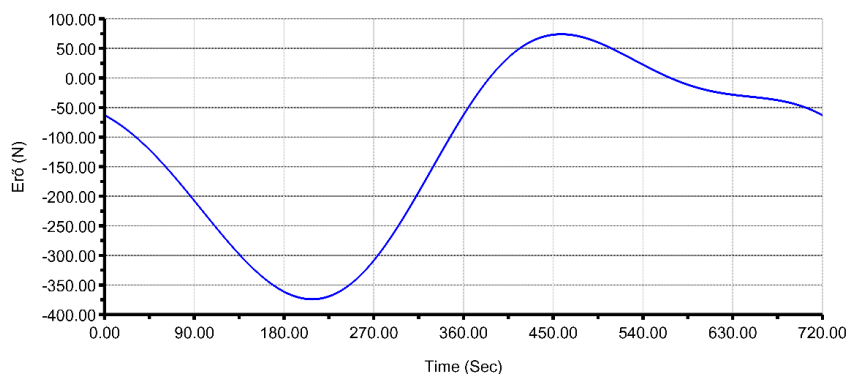
A (3) egyenletben szereplő  $m_i$  a mozgásban részt vevő elemek össztömege (lásd 1. táblázat),  $\omega_i$  a vizsgált  $i$ -edik komponens szögsebessége, míg  $\mathbf{r}_i$  az  $i$ -edik komponens és a központi kardáncsukló között fellépő erő erőkarja. Mivel a vizsgált mechanizmus zárt láncú, ezért a központi kardáncsukló tengelyein ébredő nyomatékokkal épp az aktuátorokon fellépő erők fognak egyensúlyt tartani. A rendszer általános koordinátái a csuklóelmozdulások lesznek. Ami a központi kardáncsukló esetén szögelfordulást, míg az aktuátorok esetében, a prizmatikus kapcsolatnál tengelyirányú elmozdulást jelent. Ugyanígy a központi kardáncsukló esetében az általános erő nyomaték, amíg az aktuátorok esetében az általános erő tengelyirányú (aktuátorok prizmatikus kapcsolatainak tengelyei) erőt jelent. A mechanizmus aktuátorerők kiszámításánál a következő egyenlet adja a kiindulási alapot:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (5)$$

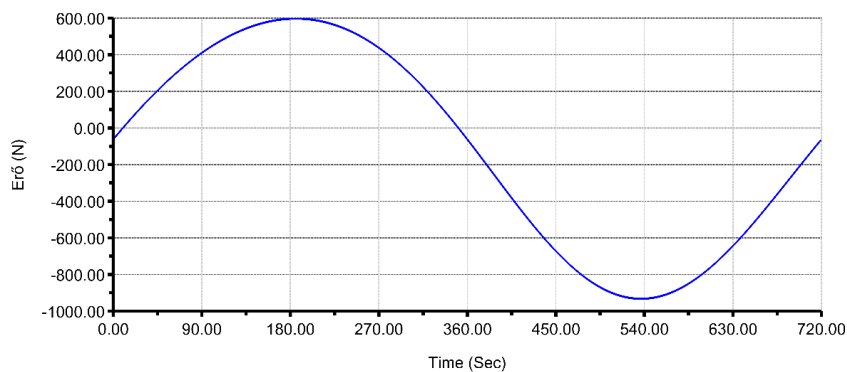
Ahol  $\mathbf{M}$  a központi kardáncsuklóban ébredő nyomaték,  $\mathbf{r}_i$  a központi kardáncsukló középpontjából az  $i$ -edik komponens tömegközéppontjába mutató vektor,  $\mathbf{F}_i$  pedig az  $i$ -edik komponensre ható erő. A rendszerben ébredő erők elemzését és meghatározását kinematikai szimulációs szoftverrel megoldva az alábbi ábrák szemléltetik. A 9–11. ábrák szemléltetik az első, második és harmadik aktuátorokban az asztal mozgásához szükséges aktuátorerőket.



9. ábra. Az aktuátorerő az első aktuátorban az idő függvényében



10. ábra. Az aktuátorerő a második aktuátorban az idő függvényében



11. ábra. Az aktuátorerő a harmadik aktuátorban az idő függvényében

## 6. Összefoglalás

Jelen cikk bemutatja egy párhuzamos kinematikai láncsal rendelkező mechanizmus felépítését, szerkezeti elemeit, valamint a mozgó alkatrészek tömegeit is megadja. Az azt követő fejezet a szerkezet platformjának elmozdulását megvalósító aktuátorelmozdulásokat prezentálja, ez a mechanizmus inverz kinematikai feladatának a megoldása. A feladat megoldásának következő lépése az aktuátorok gyorsulásának az ismertetése az idő függvényében. Az aktuátorok gyorsulásfüggvényeit az elmozdulásfüggvények idő szerinti második deriváltja szolgáltatja. Az ötödik fejezetben az aktuátorerők lettek meghatározva az idő függvényében, ez lesz az egyik alapja az aktuátorhajtás kiválasztásának.

## Irodalom

- [1] Alrasheed, S. (2019). Kinematics. In: *Principles of Mechanics* (pp. 17–36). Springer International Publishing, Cham, [http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-15195-9\\_2](http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-15195-9_2). Accessed 29 March 2024.
- [2] Morra, G. (2018). Mechanics I: Kinematics. In *Pythonic Geodynamics* (pp. 63–75). Springer International Publishing, Cham. [http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-55682-6\\_4](http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-55682-6_4). Accessed 29 March 2024. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-55682-6\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-55682-6_4)
- [3] Featherstone, R. (2008). *Rigid Body Dynamics Algorithms*. Boston, MA: Springer US. <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4899-7560-7>. Accessed 29 March 2024. <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7560-7>
- [4] Kumar, V., German, M. D., Lee, S.-J., Atrek, E., Kodali, R., Belegundu, A. D., Rajan, S. D., Chung, J. C. H., Klahs, J. W., Cook, R. L., Sluiter, T., Studebaker, K. F., Nikolaidis, E., Diamantidis, D., Thangjitham, S., Heller, R. A., Afzal, M., Kapur, K. C., Belsare, S., Haririan, M., Paeng, J. K., Grandhi, R. V., Moradmand, J. K., Wiseman, M. A., Hou, J. W., Houlihan, T. A., Murthy, D. V., Kaza, K. R. V., Borggaard, J. T., Saigal, S., Kane, J. H., Stabinsky, M., Cardoso, J. B., Arora, J. S., No, M., Lopez-Linares, S., Tristan-Lopez, A., Stewart, P. J., Beier, K.-P., & Trousse, B. (1989). Computer-Aided Design. In: Prasad, B., Dwivedi, S. N., Irani, K. B. (Eds.). *CAD/CAM Robotics and Factories of the Future* (pp. 1–116). Springer, Berlin, Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-52323-6\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-52323-6_1)
- [5] Lenarčič, J., Bajd, T., & Stanišić, M. M. (2013). Parallel Mechanisms. In: Lenarcic, J. Bajd, T. & Stanišić, M. M. (Eds.). *Robot Mechanisms* (pp. 239–272). Springer Netherlands, Dordrecht. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-4522-3\\_7](https://doi.org/10.1007/978-94-007-4522-3_7)
- [6] Gonzalez-Lopez, M.-J., & Gonzalez-Vega, L. (1999). The inverse kinematics problem in robotics. In A. M. Cohen, H. Cuypers, & H. Sterk (Eds.), *Some Tapas of Computer Algebra* (pp. 305–310). Berlin, Heidelberg: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-03891-8\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03891-8_14)
- [7] Merlet, J.-P. (Ed.) (2006a). Inverse kinematics. In: *Parallel Robots* (pp. 95–104). Springer Netherlands, Dordrecht. [https://doi.org/10.1007/1-4020-4133-0\\_3](https://doi.org/10.1007/1-4020-4133-0_3)
- [8] Jazar, R. N. (2010). Acceleration Kinematics. In: Jazar, R. N. (Ed.). *Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics, and Control* (2nd Edition, pp. 529–579). Springer US, Boston, MA. [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1750-8\\_10](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1750-8_10)
- [9] Merlet, J.-P. (Ed.) (2006b). Velocity, accuracy and acceleration analysis. In: *Parallel Robots* (pp. 153–178). Springer Netherlands, Dordrecht. [https://doi.org/10.1007/1-4020-4133-0\\_5](https://doi.org/10.1007/1-4020-4133-0_5)



- [10] Jazar, R. N. (2007a). Motion Dynamics. In: Jazar, R. N. (Ed.). *Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics, and Control* (pp. 447–503). Springer US, Boston, MA.  
[https://doi.org/10.1007/978-0-387-68964-7\\_11](https://doi.org/10.1007/978-0-387-68964-7_11)
- [11] Jazar, R. N. (2007b). Robot Dynamics. In: Jazar, R. N. (Ed.). *Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics, and Control* (pp. 505–563). Springer US, Boston, MA.  
[https://doi.org/10.1007/978-0-387-68964-7\\_12](https://doi.org/10.1007/978-0-387-68964-7_12)