

DIFFERENCIÁLGEOMETRIA A MÉRNÖKKÉPZÉSBEN

Árvai-Homolya Szilvia

egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet, Analízis Tanszék
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: szilvia.homolya@uni-miskolc.hu

Absztrakt

A klasszikus differenciálgeometria tárgya - tömören fogalmazva - az \mathbb{R}^3 -beli görbék és felületek megfelelő differenciálhatósági feltételek előírása mellett történő vizsgálata a differenciál- és integrálszámítás eszközeinek alkalmazásával. Mivel erősen épít a lineáris algebrai, illetve az analízisbeli ismeretekre, így a differenciálgeometria elemei az ötéves egyetemi szintű mérnökképzés magasabb évfolyamos analízis kurzusai között jelentek meg, amelyek a bolognai rendszer bevezetését követően szinte teljesen kiszorultak az alapképzésből. A cikk célja betekintést nyújtani az osztatlan képzés keretében oktatott differenciálgeometriai témakörökbe, valamint néhány példát mutatni a differenciálgeometria alkalmazásaira.

Kulcsszavak: görbeelmélet, kísérő triéder, felületek, alkalmazások

Abstract

The goal of classical differential geometry is to study curves and surfaces in \mathbb{R}^3 uses the techniques of differential and integral calculus. This mathematical discipline is strongly based on knowledge of linear algebra and calculus, hence the elements of classical differential geometry appeared in advanced analysis courses in former university-level education in engineering. The implementation of the Bologna process, the admission of the two-cycle system have led almost completely to the exclusion of differential geometry from bachelor's degree programs. This paper is devoted to a short overview of the above-mentioned topics and to give some applications.

Keywords: curve theory, Frenet frame, surfaces, applications

1. Bevezetés

A differenciálgeometria alkalmazásának egyik legismertebb példája az Einstein-féle relativitáselmélet, de a mechanikán belül is megjelenik a matematika ezen ágának felhasználása. A számítógépes grafika, illetve a számítógéppel segített geometriai tervezés szintén differenciálgeometriai alapokra épít, a digitális jelfeldolgozás területén felmerülő problémák egy része is differenciálgeometriai eszközökkel oldható meg és tovább sorolhatnánk a példákat a különböző tudományterületeken történő alkalmazhatóságról. Indokolt tehát a differenciálgeometria alapjainak megjelenítése a műszaki képzési területen is.

A klasszikus differenciálgeometria egyik kiindulópontja az a tény, hogy az elemi és az analitikus geometria eszközeivel csak az euklideszi tér speciális alakzatainak vizsgálatára nyílik lehetőség. Az analitikus geometriában az algebrai egyenletekkel leírható alakzatok geometriai tulajdonságainak tárgyalására kerül sor, az ilyen típusú görbék és felületek köre azonban igencsak korlátozott. Kizárólag az analitikus geometria eszközeit használva, további nehézséget jelent az alakzatok metrikus jellemzőinek (pl. ívhossz, felszín, térfogat) meghatározása is. A differenciálgeometria módszereivel viszont az előző problémák megoldhatóak, valamint magasabb szintű vizsgálatok (pl. a görbék és a

felületek görbületi jellemzése) is elvégezhetőek. [7]

A Miskolci Egyetem Gépészmérnöki Karán a korábbi ötéves mérnökképzésben - a klasszikus differenciálgeometriai témakörök közül - az \mathbb{R}^3 -beli görbék elméletéből tárgyalásra került az ívhossz, a kíséző triéder, a görbület, valamint a torzió fogalma és kiszámítása, míg a felületelméletből a felületek vektoregyenletes megadása, a felületi görbék ívhossza és görbülete, az érintősík fogalma, valamint a felületdarab felszínének meghatározása épült be a haladóbb matematikai kurzusok anyagába. A "Műszaki matematikai gyakorlatok" sorozatban íródott, a témakört érintő egyetemi segédkönyv [3] jellegéből adódóan szép számmal tartalmaz - elsősorban mechanikai - alkalmazásokat.

A következőkben visszatekintésként a mérnökképzés korábbi, differenciálgeometriához kapcsolódó tananyagából szemelvényezünk, majd példákat adunk a témakör alkalmazásaira.

2. Térgörbék differenciálgeometriája

Mechanikai szempontból térgörbe alatt egy olyan leképezést értünk, amely egy tömegpont térbeli mozgását írja le az idő függvényében, azaz a leképezés tetszőleges t időpillanathoz a mozgó tömegpont pillanatnyi helyvektorát rendeli. A leképezés képterét a görbe pályájának nevezzük, azaz a hétköznapi szóhasználatnál szemben jelen esetben a görbe egy leképezést jelent és nem annak pályáját. A görbe geometriai jellemzőin a leképezésből származtatott azon adatokat értjük, amelyek csak a pálya alakjától függenek, invariánsak a görbe átparaméterezésével szemben, továbbá nem változnak meg akkor sem, ha a görbének egy térbeli izometriával nyert képét vesszük. [7]

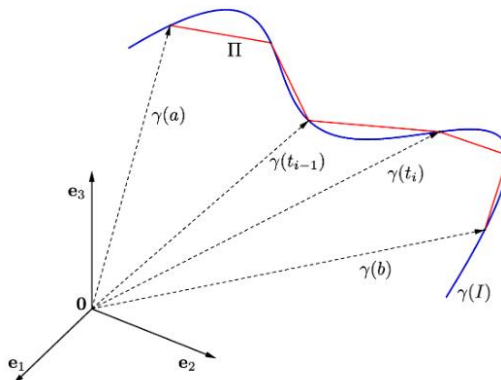
Simán paraméterezett térgörbe (vagy röviden *sima görbe*) alatt egy C^∞ -osztályú

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

leképezést értünk, melyet *reguláris parametrizált térgörbének* nevezünk, ha $\forall t \in I$ esetén teljesül a $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ regularitási feltétel.

2.1. Ívhossz

Az \mathbb{R}^3 euklideszi térben vett folytonos γ görbe $[a; b] \subset I$ részintervallumra történő leszűkítését *rektifikálhatónak* nevezzük, ha a $\gamma|_{[a;b]}$ görbedarabba írt közelítő poligonok (töröttvonalak) hosszának létezik a szuprénuma, azaz a pontos felső korlátja. Ekkor a görbeszegmens hosszán ezt a szuprénum értéket értjük. (1. ábra)



1. ábra. Közelítő poligonok

Ugyan vannak olyan folytonos görbék, amelyek nem rektifikálhatóak, de ha egy görbe folytonosan differenciálható görbe, akkor mindig értelmezhető a görbedarab ívhossza, melynek kiszámítását a következő - az alapképzési szakok analízis kurzusaiban napjainkban is ismertetett - tétel adja meg:

1. Tétel Tetszőleges folytonosan differenciálható $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe bármely $[\alpha; \beta] \in I$ zárt intervallumhoz tartozó $\gamma|_{[\alpha; \beta]}$ görbedarabja rektifikálható és a görbedarab ívhossza

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\gamma}(t)| dt \quad (2.1)$$

módon számítható ki.

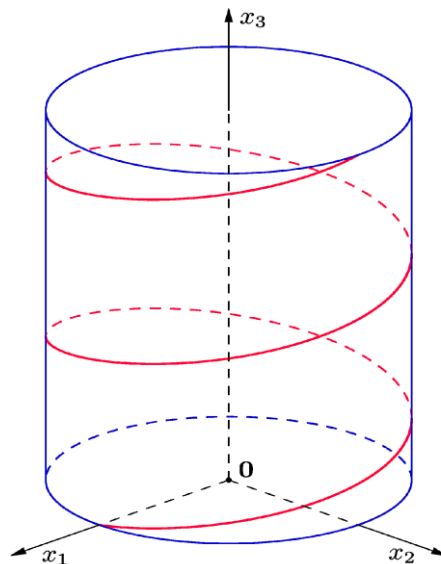
Belátható, hogy az ívhossz a görbe geometriai tulajdonsága, azaz az ívhossz független a paraméterezéstől. Bizonyítható, hogy az ívhossz mindig bevezethető paraméternek. Egy $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris sima görbéről azt mondjuk, hogy ívhossz szerint van paraméterezve, ha $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ teljesül tetszőleges $s \in I$ esetén.

A γ paraméterezésű reguláris görbeív t paraméterű pontjában a $\dot{\gamma}(t)$ érintő iránya $\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$, az egységnyi érintővektor. Ívhossz szerinti paraméterezés esetén

$$\mathbf{t}(s) = \dot{\gamma}(s). \quad (2.2)$$

Példa. Legyen $a \in \mathbb{R}^+$ és $b \neq 0 \in \mathbb{R}$. A $\gamma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ görbét közös hengeres csavarvonalnak nevezzük, ha

$$\gamma(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + a \sin t \mathbf{e}_2 + b t \mathbf{e}_3. \quad (2.3)$$



2. ábra. Közös hengeres csavarvonal

A $\gamma(\mathbb{R})$ pálya rajta van az $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ egyenletű hengerfelületen. Amennyiben ezt egy tömegpont mozgását leíró függvénynek tekintjük, akkor az $x_3 = 0$ egyenletű síkra eső vetülete egy egyenletes körmozgást, az x_3 tengelyre eső vetülete pedig egyenletes egyenesvonalú mozgást ír le.

A hengeres csavarvonal ívhossz-paraméteresen adott egyenlete

$$\gamma(s) = a\cos(\delta s)\mathbf{e}_1 + a\sin(\delta s)\mathbf{e}_2 + b\delta s\mathbf{e}_3, \quad (2.4)$$

ahol $\delta = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Mivel

$$\dot{\gamma}(s) = -a\delta\sin(\delta s)\mathbf{e}_1 + a\delta\cos(\delta s)\mathbf{e}_2 + b\delta\mathbf{e}_3, \quad (2.5)$$

így

$$|\dot{\gamma}(s)| = \sqrt{a^2\delta^2\sin^2(\delta s) + a^2\delta^2\cos^2(\delta s) + b^2\delta^2} = 1. \quad (2.6)$$

2.2. Görbület

A differenciálgeometriában fontos szerepet játszik a görbület fogalma, képletesen szólva a görbület az érintőirány ívhossz szerinti irányváltozási sebessége a görbe egy adott pontjában.

1. Definíció. A görbe ívhossz szerinti γ paraméterezésének $\ddot{\gamma}(s)$ második deriváltja a görbe görbületi vektora, melynek hossza

$$\kappa(s) = |\ddot{\gamma}(s)| \quad (2.7)$$

a görbe görbülete, iránya pedig az

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\kappa(s)} \quad (2.8)$$

egységnyi görbületi vektor, amelyet a görbe (fő)normális vektorának is szokás nevezni.

A görbületi vektor merőleges az érintőre, így az $\mathbf{n}(s)$ főnormális egységvektor is merőleges a $\mathbf{t}(s)$ egységnyi érintővektorra. Egy görbe akkor és csak akkor egy egyenes darabja, ha $\kappa(s) \equiv 0$.

A következő állítás alapján a görbületet ki lehet számítani a paraméterező függvény első és második deriváltjából.

1. Állítás. A γ görbe görbülete tetszőleges paraméterezés esetén

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3}.$$

Bizonyítás. Ha $s = s(t)$ jelöli görbe ívhosszát, akkor

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(s) \cdot s'(t) \quad \text{és} \quad \ddot{\gamma}(t) = \ddot{\gamma}(s) \cdot (s'(t))^2 + \dot{\gamma}(s) \cdot s''(t), \quad (2.9)$$

így

$$\frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3} = \frac{|\dot{\gamma}(s) \times \ddot{\gamma}(s)| \cdot |s'(t)|^3}{|\dot{\gamma}(s)|^3 \cdot |s'(t)|^3} = |\ddot{\gamma}(s)| = \kappa(s). \quad (2.10)$$

Érdekes alkalmazás a görbülethez kapcsolódóan a következő: a vasúti pályák esetén két eltérő, állandó görbületű pályaszakasz csatlakozásánál a gyorsulás, illetve a harmadrendű jellemző ugrásszerű változásának kiküszöbölésére az eltérő görbületű íveket egy, a pálya síkjában fekvő és fokozatos "görbületváltozást" biztosító közbenső görbületátmenettel, az úgynevezett átmeneti ívvel kötik össze. [5]

2.3. Torzió

Amennyiben a γ görbe valamely pontjában nem tűnik el a görbület, akkor definiálni lehet a görbeív pontbeli simulósíkját és simulókörét is.

2. Definíció. ([4]) Legyen az ívhossz szerinti γ paraméterezésű görbe $\gamma(s_0)$ pontjában $\kappa(s_0) \neq 0$. Ha $s_1, s_2 \rightarrow s_0$ esetén a $\gamma(s_1), \gamma(s_2)$ és $\gamma(s_0)$ kijelöl egy $S(s_0, s_1, s_2)$ síkot, és ezeknek létezik határhelyzete, akkor azt a görbe $\gamma(s_0)$ -beli (vagy röviden s_0 -beli) *simulósíkjának* nevezzük.

A következő tétel megadja a kapcsolatot az érintővektor és a főnormális vektor, illetve a simulósík között.

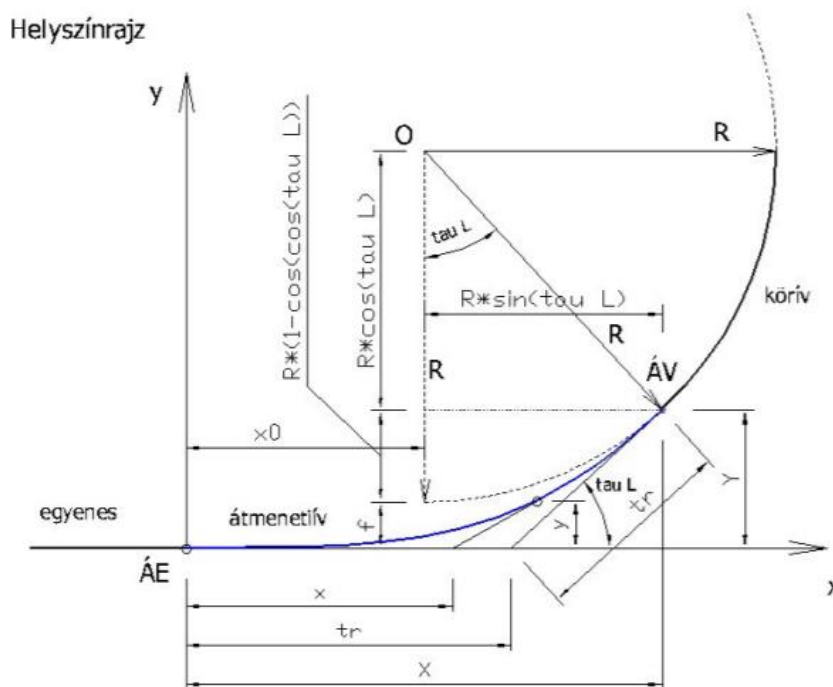
2. Tétel. ([4]) A $t(s_0)$ és $n(s_0)$ által kifeszített sík éppen az $\gamma(s_0)$ -beli simulósík.

A fentiekhez hasonló elven vezethető be a simulókör fogalma is.

3. Definíció. ([4]) Legyen az ívhossz szerinti γ paraméterezésű görbe $\gamma(s_0)$ pontjában $\kappa(s_0) \neq 0$. Ha $s_1, s_2 \rightarrow s_0$ esetén a $\gamma(s_1), \gamma(s_2)$ és $\gamma(s_0)$ pontokra illeszkedik egy $K(s_0, s_1, s_2)$ kör, és ezen köröknek létezik határhelyzete, akkor azt a görbe $\gamma(s_0)$ -beli (vagy röviden s_0 -beli) *simulókörének* nevezzük.

A simulókör mindig a simulósíkban van, érinti a görbe t érintőjét, továbbá a $\gamma(s_0)$ pontban a simulókör sugara

$$\rho(s_0) = \frac{1}{\kappa(s_0)}. \tag{2.11}$$



3. ábra. Az átmenetiív

4. Definíció. A simulósík $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ normálisát a görbe *binormális vektorának* nevezzük.

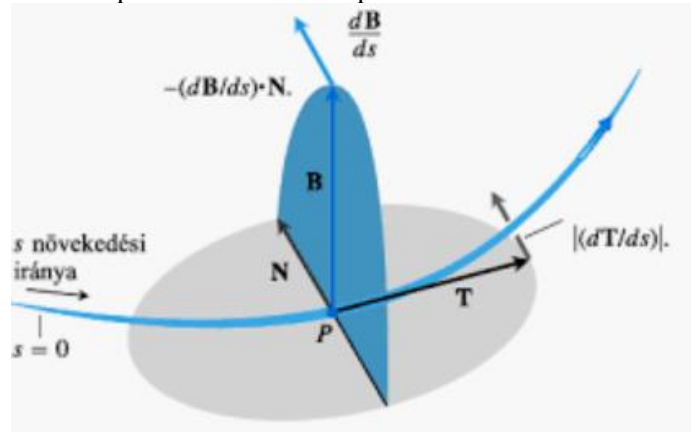
Könnyen belátható, hogy a binormális deriváltja párhuzamos a normálissal.

Ha a görbe görbülete sehol sem tűnik el, akkor definiálhatjuk a görbe torzióját, amely azt méri, hogy a görbe mennyire csavarodik.

5. Definíció. A $\tau(s) = -\dot{\mathbf{b}}(s) \cdot \mathbf{n}(s)$ értéket a görbe $\gamma(s)$ pontban vett *torziójának* nevezzük.

Bizonyítható, hogy a torzió a görbe geometriai jellemzője, azaz független a görbe paraméterezésétől, ugyanis a torzió a binormális forgásának szögsebessége a \mathbf{t} tengely körül. Megjegyezzük, hogy egy görbe pontosan akkor síkgörbe, ha a torziója azonosan nulla.

A torzió szintén fontos szerepet tölt be a vasútépítésben az átmenetívek tervezésénél.



4. ábra. A torzió

2.4 Kísérő triéder

A $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ érintő-, főnormális és binormális vektorok alkotta hármast szokás a görbe *kísérő triéderének* nevezni, melynek deriváltjai kifejezhetőek a görbület és a torzió segítségével:

3. Tétel. (Frenet-formulák).

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n} \quad (2.12)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \quad (2.13)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n} \quad (2.14)$$

A Frenet-formulák felhasználásával a torzió felírható egy paraméterezésétől független alakban.

2. Állítás. A γ görbe torziója tetszőleges paraméterezés esetén

$$\tau(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \ddot{\gamma}(t) \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2} \quad (2.15)$$

A Frenet-formulák felhasználásával igazolható a következő állítás, amely pongyolán fogalmazva azt

jelenti, hogy a $\kappa(s)$ és a $\tau(s)$ egyértelműen meghatározza a térgörbe alakját, de térbeli helyzetét szabadon hagyja. [3]

3. Állítás. Két görbéhez akkor és csakis akkor létezik mozgás, mely őket egymásba viszi, ha ívhossz szerinti paraméterezésben a görbülete és a torzió a két görbén azonosan egyenlő.

A görbeelmélet alaptétele az unicitás mellett az egzisztenciára vonatkozó állítást is megfogalmaz:

4. Tétel. ([7]) Egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon legyenek adva a C^∞ -osztályú

$$\kappa, \tau: I \rightarrow \mathbb{R}$$

függvények. Amennyiben $\kappa > 0$ teljesül, akkor irányítástartó izometria erejéig pontosan egy olyan ívhossz szerint paraméterezett $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe létezik, amelynek κ a görbületi függvénye és τ a torzió függvénye.

A görbülete és a csavarodás tehát a koordináta-rendszerrel függetlenül határozza meg a görbét, így a

$$\kappa = \kappa(s) \quad \text{és} \quad \tau = \tau(s) \quad (2.16)$$

egyenleteket a görbe természetes egyenleteinek, a κ -t és a τ -t a görbe természetes koordinátáinak nevezzük.

Példa. A $\gamma(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + a \sin t \mathbf{e}_2 + b t \mathbf{e}_3$ közönséges csavarvonal természetes egyenletei:

$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{és} \quad \tau = \frac{b}{a^2+b^2}. \quad (2.17)$$

A $\kappa = 0$ esetben a csavarvonal egyenessé, a $\tau = 0$ esetben pedig körré fajul.

Megjegyezzük, hogy egy térgörbe pontosan akkor tolható el önmagába, két tetszőleges pontját fedésbe hozva, ha a görbülete és a torziója konstans, amely kritériumnak csak a közönséges csavarvonal felel meg.

3. Felületek

A körülöttünk lévő világban számos olyan objektum van, amelyre a felület megnevezést használjuk. Ezen felületek matematikai modelljének megadása gyakorlati szempontból fontos, például a felület felszínének meghatározásához, számítógépes grafikai alkalmazásához, mérnöki számítások elvégzéséhez.

A felületelméletből a felületek paraméteres megadását emeljük ki, majd példát adunk felületi görbére. Megemlítjük, hogy az első alapmennyiségek fogalma, a felületi görbék ívhossza, görbülete, a felületek felszínének kiszámítása, valamint a felületi integrálok tartoztak még az oktatott témakörhöz.

3.1. Felületek paraméteres megadása

Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ nem üres nyílt halmaz. Egy $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható leképezés esetén állapodjunk meg a következő jelölésekben: a változókat jelölje u és v , a komponensfüggvényeket pedig x, y , illetve z , azaz

$$\mathbf{r}(u; v) = (x(u; v); y(u; v); z(u; v)).$$

A \mathbf{r} első és második változó szerinti parciális deriváltjait jelölje \mathbf{r}_u és \mathbf{r}_v .

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ -osztályú leképezés egy *sima elemi felület paraméterezése*, ha teljesül rá az alábbi két feltétel:

- Bármely $p \in D$ esetén az $\mathbf{r}_u(p)$ és $\mathbf{r}_v(p)$ vektorok lineárisan függetlenek.
- Az \mathbf{r} vektorfüggvény injektív, továbbá egy homeomorfizmust ad a D tartomány és az \mathbb{R}^3 -beli $\mathbf{r}(U)$ alakzat között, azaz invertálható és az inverze is folytonos.

Az \mathbb{R}^3 tér egy M alakzatát sima elemi felületnek nevezzük, ha megadható egy olyan előző feltételeket kielégítő $\mathbf{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ahol $\mathbf{r}(D) = M$. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u; v)$ egyenletet a felület paraméteres egyenletének, a koordinátákra bontott

$$x = x(u; v), \quad y = y(u; v), \quad z = z(u; v) \quad (3.1)$$

alakját pedig a felület paraméteres egyenletrendszerének nevezzük.

A továbbiakban sima elemi felületeket röviden felületnek nevezzük majd, de megjegyezzük, hogy "felület" alatt általánosságban nem feltétlenül sima elemi felületet szokás érteni, hanem egy olyan összefüggő térbeli ponthalmazt, melynek minden pontja rendelkezik olyan gömbkörnyezettel, melyben a ponthalmaz elmei felület. [4]

Példa. Írjuk fel az

$$\mathbf{r}(u; v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k} \quad (3.2)$$

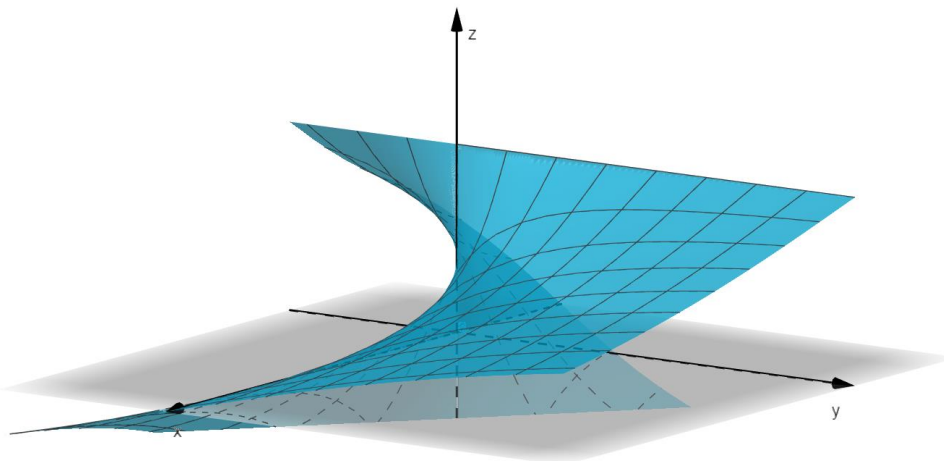
paraméteres alakban adott felület implicit egyenletét! Mi ez a felület?

Mivel

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v \quad \text{és} \quad v = z,$$

visszahelyettesítve és rendezve egy csavarfelület egyenletét kapjuk:

$$x \sin z = y \cos z. \quad (3.3)$$



5. ábra. Csavarfelület

Ha egy görbét úgy mozgatunk a térben, hogy minden pontja azonos tengelyű és menetmagasságú csavarvonalat ír le, akkor görbe pontjai csavarfelületet alkotnak. Csavarfelületekkel a műszaki gyakorlatban gyakran találkozhatunk; például csigafűrők, ferdefogú fogaskerekek, csigakerekek, csavarok esetén.

Ha z a forgástengely, $f(u)$ a csavarfelület profilgörbéje, az A pedig a haladó mozgás sebességének és a szögsebességnek az aránya, akkor a csavarfelület egyenlete:

$$\mathbf{r}(u; v) = (u \cos v; u \sin v; f(u) + Av). \quad (3.4)$$

Egyenes csavarvonal esetén vonalfelületet kapunk, a v szerinti paramétervonalak a tengelyre merőleges egyenesek, a csavarfelületek egyenlete ebben az esetben:

$$\mathbf{r}(u; v) = (u \cos v; u \sin v; Av),$$

azaz az előző példában szereplő csavarvonal egyenes csavarvonal, amelynél a haladó mozgás sebessége és a szögsebesség megegyezik.

Példa. [6] Bizonyítsuk be, hogy az alábbi két egyenletrendszer ugyanazt a felületet írja le!

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \quad y = \frac{v}{u^2+v^2} \quad z = \frac{1}{u^2+v^2} \quad (3.5)$$

$$x = u \cos v \quad y = u \sin v \quad z = u^2 \quad (3.6)$$

Mi ez a felület?

A két paraméterezés által adott felületek egybeesését a paraméterek kiküszöbölésével igazolhatjuk. Az első paraméterezés esetén:

$$x = uz, \quad y = vz \Rightarrow u = \frac{x}{z}, \quad v = \frac{y}{z}.$$

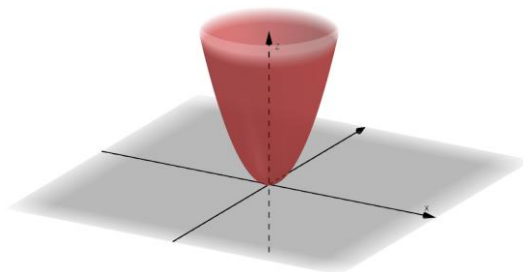
Behelyettesítve u -t és v -t a $z = \frac{1}{u^2+v^2}$ egyenletbe a felület egyenlete:

$$z = x^2 + y^2.$$

A második paraméterezés esetén:

$$x^2 = u^2 \cos^2 v \quad y^2 = u^2 \sin^2 v \Rightarrow z = x^2 + y^2.$$

A két implicit alak megegyezik, ezért a két felület is ugyanaz, mégpedig egy forgásparaboloid.



6. ábra. Forgásparaboloid

3.2. Felületi görbék

Egy C^∞ -osztályú $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést az M egy sima *felületi görbéjének* nevezünk, ha a görbe pályája rajta van az M felületen.

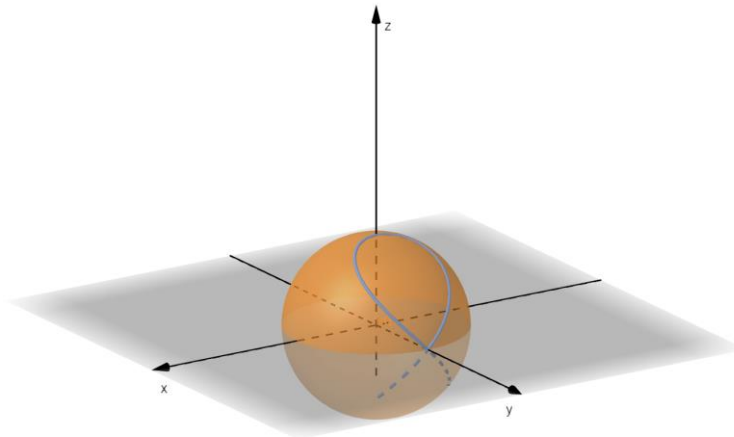
Példa. Igazoljuk, hogy az alábbi térgörbe egy origó középpontú gömb felületi görbéje!

$$\gamma(t) = (\cos t \sin t; \sin^2 t; \cos t) \quad (3.7)$$

Mivel

$$\cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t + \cos^2 t = \sin^2 t + \cos^2 t = 1,$$

így a görbe az origó középpontú 1 sugarú gömb felületi görbéje.



7. ábra. Gömb felületi görbéje

Igazolható, hogy minden felületi görbe reguláris. Teljesül továbbá, hogy egy parametrizált felület egy adott pontján áthaladó felületi görbék ezen pontbeli érintővektorai az adott pontbeli érintősíkban vannak, valamint, hogy a felület minden érintővektora valamely felületi görbe érintője.

4. Összefoglalás

Cikkünkben a hagyományos egyetemi képzésben oktatott görbe- és felületelméletből idéztünk fel néhány alapvető fogalmat, amelyek a műszaki alkalmazások szempontjából különös jelentőséggel bírtak. A differenciálgeometria alkalmazása azonban napjaink technológia-vezérelt világában is megjelenik, gondolhatunk itt többek között a gépi látásra, a számítógépi grafikára, az orvosi képalkotó (CT, MRI, PET, SPECT) rendszerekre, a digitális jelfeldolgozásra vagy például a nemlineáris szabályozásmélet modern irányzatára. A fentiek alapján a differenciálgeometria elemeinek megjelenése a mesterképzésben, mind a műszaki, mind az informatikai képzési területen - például szabadon választható tárgy formájában - indokolt.

Irodalom

- [1] Manfredo P. do Carmo: *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [2] Gu X., Wang Y., Cheng HB., Cheng LT., Yau ST. *Geometric Methods in Engineering Applications*. In: Munthe-Kaas H., Owren B. (eds) *Mathematics and Computation, a Contemporary View*. Abel Symposia, vol 3. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [3] Fazekas Ferenc: *Műszaki matematikai gyakorlatok B. I-III., Vektoranalízis - Térgörbék és felületek differenciálgeometriája, skalár-, vektor és tenzorterek*, Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1957.
- [4] Kurusa Árpád: *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon, Szeged, 1999., ISSN 1417-0590
- [5] Liegner Nándor: *Vasúti görbület-átmeneti geometriák és alkalmazásuk*, BME, Budapest, 2004.
- [6] Szilágyi Brigitta: *Differenciálgeometria példatár*, Typotex Kiadó, Budapest, 2011., ISBN: 978-963-279-449-5
- [7] Verhóczki László: *Klasszikus differenciálgeometria*, ELTE TTK, Budapest, 2013. Elektronikus jegyzet: <http://web.cs.elte.hu/geometry/v1/KlasszDiffGeo.pdf>