

HŐKOZTA FESZÜLTSEGEK ÉS ELMOZDULÁSOK SZÁMÍTÁSA GÖMB ALAKÚ KIVÁGÁSSAL GYENGÍTETT VÉGTELEN KITERJEDÉSŰ RUGALMAS TESTBEN

Gönczi Dávid, PhD hallgató; **Ecsedi István**, egyetemi tanár;
Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék, 3515 Miskolc-Egyetemváros,
e-mail: mechgoda@uni-miskolc.hu, istvan.ecsed@uni-miskolc.hu

Összefoglalás

A dolgozat állandósult állapotú hőmérsékletmező hatására kialakult elmozdulások és mechanikai feszültségek számításával foglalkozik egy gömb alakú kivágással gyengített végtelen kiterjedésű rugalmas testben. A gömb alakú kivágást alkotó gömbfelület hőmérséklete előírt, időben állandó. Feltevés szerint a rugalmas test végtelen távoli pontjaiban a hőmérséklet és a radiális normál feszültség értéke zérus. A kidolgozott analitikus megoldás számol a rugalmassági modulus hőmérsékletfüggésével is.

Kulcsszavak: gömb alakú kivágás, hőfeszültségek, állandósult állapot.

Abstract

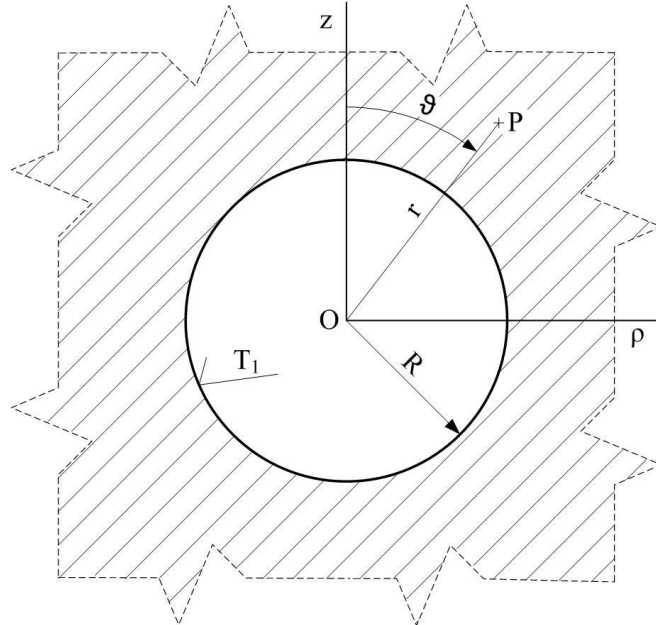
The objective of this paper is the determination of the displacements and stresses in an elastic space with a spherical cutting. The thermal stresses are caused by a steady-state temperature field. It is assumed that the temperature of the surface of the spherical cutting is given value and the temperature field and radial normal stress at the infinity vanish. The presented analytical method takes into account the temperature dependence of the Young modulus.

Keywords: spherical cutting, thermal stresses, steady-state.

1. Bevezetés

A dolgozat tárgyát képező végtelen kiterjedésű rugalmas testet (teret) egy R sugarú gömb alakú kivágással gyengítjük, melynek peremén hőterhelés hat. A hőrugalmasságtani feladat megfogalmazását $O\varphi\vartheta$ gömbi koordináta-rendszerben adjuk meg. Az 1. ábra szemlélteti a gömb alakú kivágással gyengített rugalmas tér $O\rho z$ síkba eső meridián metszetét (φ =állandó). A vizsgált feladat gömbszimmetrikus, valamennyi skalár mező csak az $\overline{OP} = r$ ($R \leq r < \infty$) radiális koordináta függvénye lesz. A kivágás $r=R$ koordinátával kijelölt gömbfelületének hőmérséklete előírt t_l . A test természetes állapotához tartozó hőmérséklet értéke t_0 , továbbá a P pontbeli hőmérsékletet t jelöli. A hőmérsékletkülönbség-függvényt T jelöli, nyilván

$$T(r) = t(r) - t_0. \quad (1)$$



1. ábra. A gömb alakú kivágással gyengített rugalmas tér meridián metszete.

Jelen feladatban a hőmérsékletkülönbséghez kapcsolódó peremfeltételek az alábbiak:

$$T(R) = T_1 = \text{előírt} \quad (\text{de } T_1 \neq 0), \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r) = 0. \quad (3)$$

A fenti előírásokat kielégítő állandósult állapotúhoz tartozó $T=T(r)$ függvény az alábbi alakban adható meg [1-5]:

$$T(r) = \frac{T_1 R}{r}, \quad R \leq r < \infty. \quad (4)$$

A (4) előírást követő hőmérséklet eloszláshoz analitikus módszerrel meghatározzuk a hőokozta elmozdulásokat és feszültségeket a hőrugalmasságtan vonatkozó egyenleteinek felhasználásával [2-5].

Az első esetben eltekintünk a rugalmassági modulusz hőmérséklettől való függésétől, míg a második esetben számolunk vele. A ν Poisson számot valamint az α lineáris

A (6), (7) egyenletekben E jelöli a rugalmassági moduluszt. Jelen problémában a mechanikai hőtágulási együtthatót állandónak tekintjük.

2. A hőrugalmasságtani peremérték feladat megfogalmazása

A probléma megoldásához gömbszimmetrikus alakváltozást és feszültségmezőt tételezünk fel. Jelölje $u=u(r)$ a radiális elmozdulást, továbbá

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\vartheta = \varepsilon_\phi = \frac{u}{r}, \quad (5)$$

ahol ε_r , ε_ϕ és ε_ϑ jelöli az $Or\phi\vartheta$ gömbi koordináta-rendszerben definiált fajlagos nyúlásokat [2-4]. A fajlagos nyúlások és normál feszültségek kapcsolatát a Duhamel-Neumann törvény írja le [2-5]

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2} [(1-\nu)\varepsilon_r + 2\nu\varepsilon_\vartheta - (1+\nu)\alpha T], \quad (6)$$

$$\sigma_\phi = \sigma_\vartheta = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2} [\nu\varepsilon_r + \varepsilon_\vartheta - (1+\nu)\alpha T]. \quad (7)$$

egyensúly nem identikusan teljesülő egyenlete:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0, \quad R \leq r < \infty. \quad (8)$$

Az E rugalmassági modulusz $T=T(r)$ hőmérséklettől való függése az alábbi függvénnyel adott:

$$E(T) = E_0 e^{-\beta T}, \quad (\beta \geq 0). \quad (9)$$

A (9) egyenletben szereplő β faktort mérési eredmények felhasználásával tudjuk meghatározni. Legyen

$$L(T) = \frac{E(T)}{1-2\nu-\nu^2} = L_0 e^{-\beta T}, \quad (10)$$

ahol

$$L_0 = \frac{E_0}{1-2\nu-\nu^2}. \quad (11)$$

Az (5-8) egyenletek kombinálásával az $u=u(r)$ radiális elmozdulásra az alábbi differenciálegyenletet tudjuk levezetni:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - 2 \frac{u}{r^2} + \frac{1}{L} \frac{dL}{dr} \left(\frac{du}{dr} + \frac{2\nu}{1-\nu} \frac{u}{r} \right) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{dT}{dr} - \frac{1}{L} \frac{dL}{dr} \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T = 0, \quad R \leq r < \infty. \quad (12)$$

A (4) és a (10) egyenletekből az következik, hogy

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{dr} = \frac{1}{L} \frac{dL}{dT} \frac{dT}{dr} = \frac{\beta T_1 R}{r^2}. \quad (13)$$

A (12) és a (13) egyenletek kombinálása adja a (14) Navier egyenletet:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} + \frac{\beta T_1 R}{r^2} \right) \frac{du}{dr} + \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{2\nu}{1-\nu} \frac{\beta T_1 R}{r^3} \right) u + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T_1 \frac{R}{r^2} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \beta T_1^2 \frac{R^2}{r^3} = 0. \quad (14)$$

A fenti inhomogén, lineáris, másodrendű differenciálegyenlethez az alábbi feszültségi peremfeltételek tartoznak:

$$\sigma_r(R) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_r(r) = 0. \quad (15)$$

3. Megoldás hőmérséklettől független rugalmassági moduluszra

A (14) Navier egyenletből $\beta=0$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2}{r^2} u + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T_1 \frac{R}{r^2} = 0. \quad (16)$$

A fenti differenciálegyenlet általános megoldása az alábbi függvény

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} + \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \alpha T_1 R, \quad (17)$$

ahol a C_1 és C_2 egyelőre ismeretlen integrációs állandók, értéküket a (15) feszültségi peremfeltételek határozzák meg. Elemi számítással az alábbi eredményekre jutunk:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \alpha T_1 R^3. \quad (18)$$

A (18) képletek (17) egyenletbe való behelyettesítésével kapjuk a hő okozta terheléshez tartozó elmozdulás mezőt:

$$u(r) = \frac{\alpha T_1 R (r^2 + R^2 - 3\nu r^2 + \nu R^2)}{2(\nu - 1)r^2} + \alpha T_1 R. \quad (19)$$

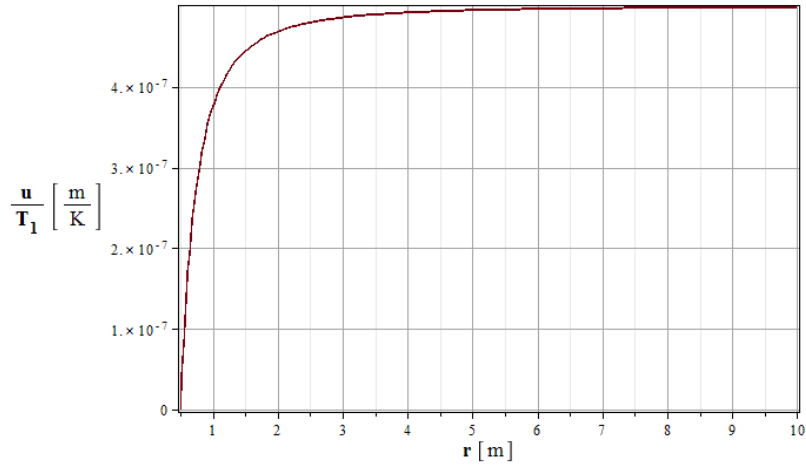
A (6), (7) és (19) egyenletek kombinálásával nyerjük a normál feszültségek képleteit:

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{(1-\nu)} \alpha T_1 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^3 - \frac{r}{R} \right], \quad (20)$$

$$\sigma_\varphi(r) = \sigma_\theta(r) = -\frac{E}{2(1-\nu)} \alpha T_1 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^3 + \frac{r}{R} \right]. \quad (21)$$

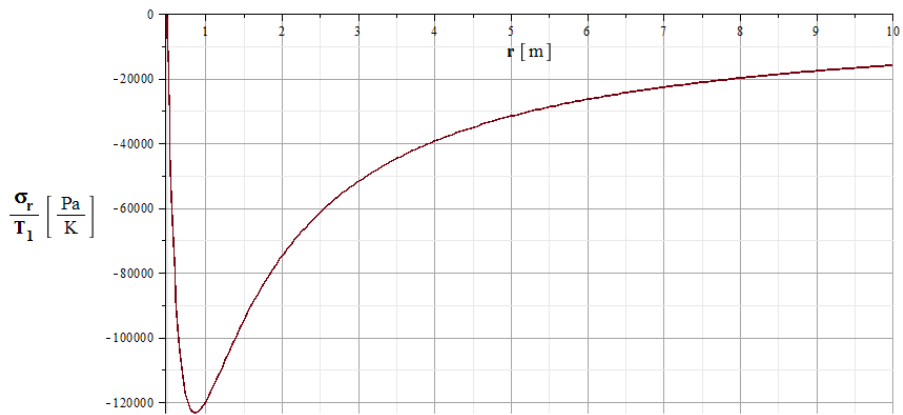
A fenti képletek alkalmazásával nyert numerikus eredményeket a 2. ábra és a 3-4. ábrák szemléltetik. Az ábrák megrajzolásához az alábbi adatokat használtuk:

$$R = 0.5 \text{ m}, \quad T_1 = 100 \text{ K}, \quad \nu = 0.25, \quad \alpha = 1.2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}.$$



2. ábra. Az elmozdulás függvénye E =állandó esetén.

A 3. ábrán látszik, hogy a radiális feszültségmező kielégíti a feszültségi peremfeltételeket, továbbá a 4. ábra görbéje is igazolja, hogy a feszültségek a végtelenben a zérus értékhez tartanak.



3. ábra. A radiális normál feszültség görbéje E =állandó esetén.



4. ábra. A tangenciális normál feszültség görbéje E -állandó esetén.

4. Megoldás hőmérséklettől függő rugalmassági moduluszra

Ebben az esetben a (14) egyenletben $\beta \neq 0$. A (14) differenciálegyenlet általános megoldása Kummer függvények segítségével építhető fel. A Kummer-féle U és M függvények értelmezését a [7-9] szakirodalom alapján a tanulmány függelékében adjuk meg. A (14) másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása az alábbi alakban adható meg:

$$u(r) = C_1 \frac{M\left(\frac{4\nu-2}{1+\nu}, 4, \beta \frac{T_1 R}{r}\right)}{r^2} + C_2 \frac{U\left(\frac{4\nu-2}{1+\nu}, 4, \beta \frac{T_1 R}{r}\right)}{r^2} + \frac{(1+\nu)\alpha T_1 R \beta + 2\alpha R(1-2\nu)}{2\beta\nu}, \quad (22)$$

A (6) és (22) egyenletek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_r(r) = \frac{(2\nu^2 + \nu - 1) \left[(1-\nu)\alpha T_1^3 R^3 \beta^2 \Gamma\left(\frac{5-3\nu}{\nu-1}\right) + 4\nu C_2 \right]}{(\nu^2 - \nu) T_1^3 R^3 \beta^2 \Gamma\left(\frac{5-3\nu}{\nu-1}\right)}, \quad (23)$$

ahol

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (24)$$

formulával jelöltük az Euler-féle gamma függvényt [8-9]. A (15)₂ egyenlet és az előbbi eredmény felhasználásával kapjuk, hogy

$$C_2 = \frac{(-1+\nu)\alpha T_1^3 R^3 \beta^2 \Gamma\left(\frac{5-3\nu}{\nu-1}\right)}{4\nu}. \quad (25)$$

A (15) egyenletből pedig az következik, hogy

$$C_1 = -\frac{(1+\nu)\alpha R^3 \left[T_1^3 \beta^3 \Gamma\left(\frac{5-3\nu}{\nu-1}\right) U\left(\frac{5\nu-3}{\nu-1}, 4, \beta T_1\right) - 2 \right]}{4\nu\beta M\left(\frac{5\nu-3}{\nu-1}, 4, \beta T_1\right)}. \quad (26)$$

A C_1 és C_2 állandók ismeretében az elmozdulásmezőt a (22) képlet alapján, a normál feszültséget pedig az alábbi egyenletek felhasználásával tudjuk meghatározni:

$$\frac{\sigma_r(r)}{L(r)} = C_1(4\nu-2) \frac{M\left(\frac{5\nu-3}{\nu-1}, 4, \beta \frac{T_1 R}{r}\right)}{r^3} + C_2(4\nu-2)(\nu+1) \frac{U\left(\frac{4\nu-2}{\nu-1}, 4, \beta \frac{T_1 R}{r}\right)}{(\nu-1)r^3} + \quad (27)$$

$$+ \frac{(1-2\nu)\alpha}{\nu} \left(\frac{2-\nu}{\beta} + \frac{\alpha T_1 R}{2r} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\theta(r)}{L(r)} = & C_1 \frac{-\nu M\left(\frac{5\nu-3}{\nu-1}, 4, \beta \frac{T_1 R}{r}\right) + (2\nu^2 + \nu - 1) M\left(\frac{4\nu-2}{\nu-1}, 4, \beta \frac{T_1 R}{r}\right)}{(\nu-1)r^3} + \\ & + C_2 \frac{\frac{(\nu^2 + \nu)(4\nu-2)}{\nu-1} U\left(\frac{5\nu-3}{\nu-1}, 4, \beta \frac{T_1 R}{r}\right) + (2\nu^2 + \nu + 1) U\left(\frac{4\nu-2}{\nu-1}, 4, \beta \frac{T_1 R}{r}\right)}{(1-\nu)r^3} + \\ & + \frac{(1-2\nu)(\nu+1)\alpha}{\nu} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{T_1 R}{2r} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

A (27) és (28) egyenletekben

$$L(r) = L_0 e^{\frac{-\beta T_1 R}{r}}. \quad (29)$$

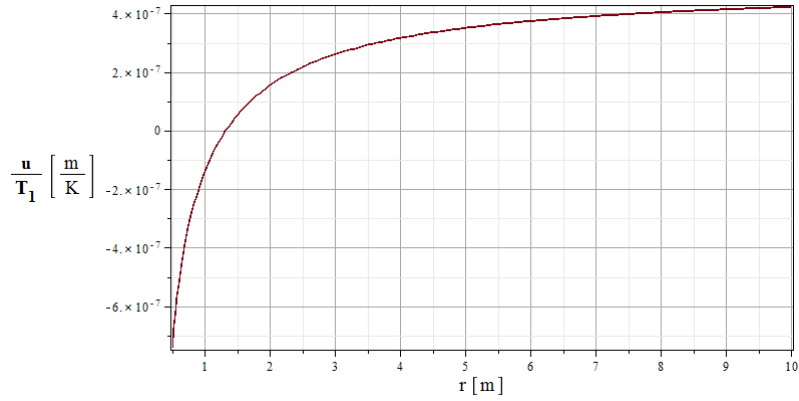
A numerikus példában a radiális elmozdulás számítását az

$$u(r) = \frac{r}{E(T)} \left((1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r \right) + \alpha T_1 R \quad (30)$$

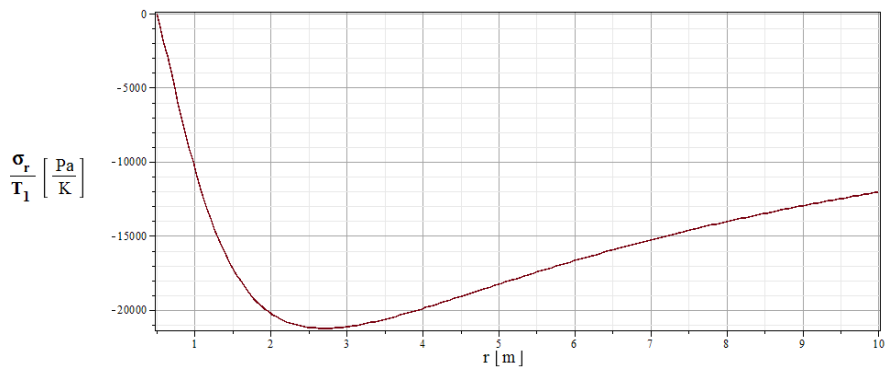
képlet használatával ellenőriztük. Nowinski tömör és üreges gömbre gömbszimmetrikus hőmérsékletmezőt, elmozdulásokat és feszültségeket feltételezve, $\nu=0.5$ Poisson számmal és hőmérsékletfüggő rugalmassági modulusszal számolva oldotta meg az állandósult állapotra vonatkozó hőrugalmasságtani feladatot [6].

A bemutatott analitikus eljárást az alábbi adatokkal megadott példán szemléltetjük:

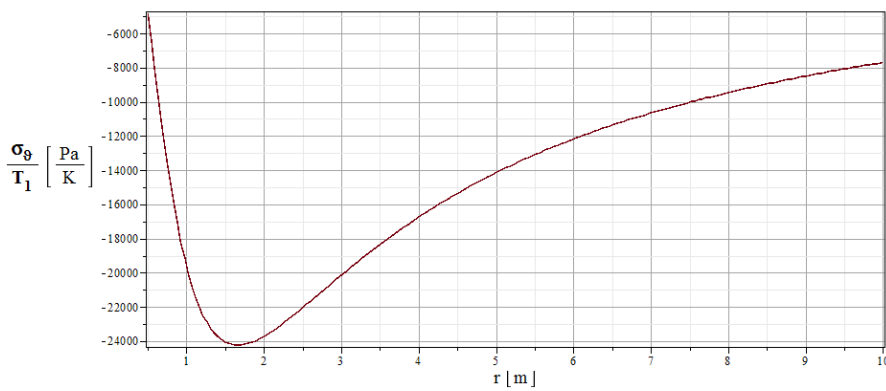
$$R = 0.5\text{m}, T_1 = 100\text{K}, \nu = 0.25, \alpha = 1.2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}, E_0 = 2 \cdot 10^{11} \text{Pa}, \beta = 0.05 \frac{1}{\text{K}}.$$



5. ábra. A radiális elmozdulás görbéje hőmérsékletfüggő rugalmassági modulusz esetén.



6. ábra. A radiális normál feszültség görbéje hőmérsékletfüggő rugalmassági modulus esetén.



7. ábra. A tangenciális normál feszültség görbéje hőmérsékletfüggő rugalmassági modulus esetén.

E példában a radiális elmozdulás az $r = 1.3167[m]$ helyen előjelet vált és $u(\infty)$ nem véges, ez lényeges eltérés az $E = \text{állandó}$ esethez képest, ahol is $u(\infty) = \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \alpha T_1 R = 0.00005[m]$.

5. Összefoglalás

A tanulmány egy egzakt (analitikus) eljárást ismertet a gömb alakú kivágással gyengített rugalmas tér feszültségállapotának meghatározására állandósult hőmérsékletmezőt, mint hőterhelést feltételezve. Két eset elemzése képezi a vizsgálat tárgyát. Az első esetben a rugalmassági modulusz állandó, a másodikban pedig a hőmérséklet előírt függvénye. Az utóbbi esetre vonatkozó megoldások megfogalmazásában döntő szerepe van a Kummer függvények elméletének. A kidolgozott analitikus megoldás által előállítható numerikus eredmények egyik alkalmazási lehetősége egyéb közelítő módszerek által nyert numerikus számítások pontosságának ellenőrzése. Az ismertetett analitikus megoldás úgynevezett "benchmark" megoldások egy új osztályának tekinthető a hőrugalmasságtani feladatok vonatkozásában.

6. Köszönetnyilvánítás

A kutató munka a TÁMOP-4.2.2.B-10/1-2010-0008 projekt részeként - az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

7. Függelék

Az alábbi

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (\nu - x) \frac{dy}{dx} - \mu y(x) = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldása [7-9]:

$$y(x) = K_1 M(\mu, \nu, x) + K_2 U(\mu, \nu, x),$$

ahol $M(\mu, \nu, x)$ és $U(\mu, \nu, x)$ a μ, ν paraméterű Kummer függvényeket jelöli. A dolgozatban elsősorban az $M(\mu, \nu, x)$ és az $U(\mu, \nu, x)$ függvények differenciálhányadosait használjuk. Ez utóbbiakra az alábbi képletek érvényesek [7, 8]:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{(\mu - \nu + x)M(\mu, \nu, x) + (\nu - \mu)M(\mu - 1, \nu, x)}{x},$$
$$\frac{dU}{dx} = \frac{(\mu - \nu + x)U(\mu, \nu, x) - U(\mu - 1, \nu, x)}{x},$$

Minden véges, valós x értékre az $M(\mu, \nu, x)$ az alábbi végtelen sorral állítható elő:

$$M(\mu, \nu, x) = 1 + \frac{\mu}{\nu} x + \frac{\mu(\mu+1)}{\nu(\nu+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Ennél lényegesen bonyolultabb a Kummer $U(\nu, \mu, x)$ függvény végtelen soros előállítás, a részleteket illetően az irodalomra utalunk [7, 8].

8. Irodalom

- [1] Carslaw, H. S., Jaeger, I. C.: *Conduction of Heat in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [2] Boley, B. A., Weiner, J. H.: *Theory of Thermal Stresses*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1960.
- [3] Nowinski, J. L.: *Theory of Thermoelasticity with Applications*. Sythoff and Noordhoff, Alpen aan den Rijn, 1978.
- [4] Noda, N. , Hetnarski, R. B. and Tanigawa Y.: *Thermal Stresses*. Lastran Corporation, Rochester, New York, 2000.
- [5] Hetnarski R. B., Eslami, M.R.: *Thermal Sresses Advaned Theory and Applications*, Springer, New York, 2010.
- [6] Nowinski, J. L.: *Thermoelastic problem for isotropic sphere with temperature dependent properties*. ZAMP, 10 pp. 565-576, 1959.
- [7] Wheelon, A. D.: *Electromagnetic Scintillation Volume 1, Geometrical Optics, Appendix G - Kummer Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [8] Temme, N. M.: *Special Functions. An Introduction to the Classical Functions in Mathematical Physics*, John Widey & Sons Inc., New York, 1996.
- [9] Abramowitz H., Stegun, I. eds.: *Handbook of Mathematical Functoins*, New York Dover, 1972.