

A FAKTORIÁLIS KÍSÉRLETTERVEZÉS ÉS KÜLÖNBÖZŐ REGRESSZIÓS MODELLEK VIZSGÁLATA OPTIMÁLIS TAPASZTALATI KÉPLETEK GENERÁLÁSÁHOZ

Smolnicki Szilárd 

PhD-hallgató, Miskolci Egyetem, Gyártástudományi Intézet
3515 Miskolc-Egyetemváros, e-mail: smolniszili99@gmail.com

Varga Gyula 

egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Gyártástudományi Intézet
3515 Miskolc-Egyetemváros, e-mail: gyula.varga@uni-miskolc.hu

Absztrakt

A jelenkor iparának egyik legfontosabb kihívása, hogy a különböző gyártási, feldolgozási folyamatokat minél pontosabban, megbízhatóbban, költséghatékonyabban optimalizálni tudja. A vevők által támasztott piaci igények folyamatosan változnak: egy-egy termék gyártási ciklusa, fejlesztési üteme lerövidül, variációik széles spektrumon húzódnak, melyekre, ha a gyártó nem képes időben reagálni, könnyen elmaradhat a konkurensekhez képest a piaci versenyben. A fenntarthatósági elvárások szintén komoly elvárásokat támasztanak.

Ezen kihívások teljesítéséhez elengedhetetlen a gyártási folyamatok, paramétereik folyamatos monitorozása, elemzése. Ehhez célszerű olyan matematikai modelleket használni, melyek segítségével előre is jelezni tudjuk, hogy egy adott paraméterkombináció milyen hatással lesz a kívánt eredményre, például a gépgyártás-technológiában a felületi érdességre.

Ebben a tanulmányban egy korábban elvégzett kísérletsorozat eredményeinek felhasználásával mutatjuk be a faktoriális kísérlettervezés és különböző regressziós modellek módszerét, majd összehasonlító elemzést végzünk, hogy meghatározzam, melyik modell közelíti leginkább a mért eredményeket.

Kulcsszavak: faktoriális kísérlettervezés, felületi érdesség, regresszióelemzés

Abstract

One of the most important challenges of today's industry is to be able to optimize various manufacturing processes as accurately, reliably and cost-effectively as possible. The market demands set by customers are constantly changing: the production cycle and development pace of a product are getting shorter, their variations are spread over a wide spectrum, to which, if the manufacturer is unable to react in time, it can easily fall behind its competitors in the market competition. Sustainability expectations also place serious expectations. To meet these challenges, continuous monitoring and analysis of manufacturing processes and their parameters is essential. For this, it is advisable to use mathematical models that can help us predict the impact of a given parameter combination on the desired result, for example, surface roughness in machine manufacturing technology. In this study, we present the method of factorial experimental design and different regression models using the results of a previously conducted series of experiments, and then perform a comparative analysis to determine which model best approximates the measured results.

Keywords: factorial experiment design, surface roughness, regression analysis

1. Bevezetés, elméleti háttér

A jelenkor iparának egyik legfontosabb kihívása, hogy a különböző gyártási, feldolgozási folyamatokat minél pontosabban, megbízhatóbban, költséghatékonyabban optimalizálni tudja. A vevők által támasztott piaci igények folyamatosan változnak: egy-egy termék gyártási ciklusa, fejlesztési üteme lerövidül, variációik széles spektrumon húzódnak, melyekre, ha a gyártó nem képes időben reagálni, könnyen elmaradhat a konkurensekhez képest a piaci versenyben. A fenntarthatósági elvárások szintén komoly elvárásokat támasztanak.

Ezen kihívások teljesítéséhez elengedhetetlen a gyártási folyamatok, paramétereik folyamatos monitorozása, elemzése. Ehhez célszerű olyan matematikai modelleket használni, melyek segítségével előre jelezni tudjuk, hogy egy adott paraméterkombináció milyen hatással lesz a kívánt eredményre, például a gépgyártás-technológiában a felületi érdességre.

Ebben a tanulmányban egy korábban elvégzett kísérletsorozat eredményeinek felhasználásával mutatjuk be a faktoriális kísérlettervezés és különböző regressziós modellek módszerét, majd összehasonlító elemzést végzünk, hogy meghatározzuk, melyik modell közelíti leginkább a mért eredményeket.

Az 1. táblázat tartalmazza a vizsgálatokhoz felhasznált technológiai paramétereket. A megmunkálás gyémántvasalás volt, melynek technológiai paraméterei: előtolás, vasalási sebesség és vasalóerő. A vizsgálatok körülményei, eredményei korábban publikálásra kerültek (Smolnicki és Varga, 2025).

1. táblázat

A vizsgálat technológiai paraméterkombinációi

n	$f \left[\frac{mm}{ford} \right]$	$v_v \left[\frac{m}{s} \right]$	$F [N]$
1	0,05	0,6938	80
2	0,1	0,6938	80
3	0,05	0,9817	80
4	0,1	0,9817	80
5	0,05	0,6938	100
6	0,1	0,6938	100
7	0,05	0,9817	100
8	0,1	0,9817	100

2. A regressziós modellek bemutatása

A regressziós modellezés célja, hogy a változók között matematikai összefüggéseket írjunk le. A kísérleti adatokra különböző regressziós modelleket illesztünk, majd vizsgáljuk hatásukat a kalkulált eredmények tekintetében.

2.1. A lineáris regressziós modell

Az első modell, melyet vizsgálunk, a lineáris regresszió modellje. Az eredményeket ez esetben az (1) jelű egyenlet formájában keressük (Chapra és Canale, 2015).

$$R_a = a_0 + a_1 \cdot f + a_2 \cdot v_v + a_3 \cdot F_v \quad (1)$$

A képletben szereplő technológiai paraméterek mellett találjuk a számítás során meghatározni kívánt a_0, a_1, a_2, a_3 együtthatókat. A kísérletek számát n -nel, míg a kísérleti eredményeket $R_a \rightarrow y_i$ -vel jelöljük a továbbiakban, ahol $i = 1 \dots n$. A technológiai paramétereket hasonlóan elnevezzük:

- Előtolás: $f \rightarrow x_{1i}$
- Vasalási sebesség: $v_v \rightarrow x_{2i}$
- Vasalóerő: $F_v \rightarrow x_{3i}$

Az alábbi mátrixok írhatók fel ezen jelölések felhasználásával.

- Egy 4×4 -es alaplátrix, melyet a (2) jelű képlet szemléltet (Chapra és Canale, 2015):

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} & \sum x_{3i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i} \cdot x_{2i} & \sum x_{1i} \cdot x_{3i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{1i} \cdot x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i} \cdot x_{3i} \\ \sum x_{3i} & \sum x_{1i} \cdot x_{3i} & \sum x_{2i} \cdot x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

- A (3) jelű képletben találjuk a kísérleti eredmények változókkal súlyozott, 4×1 -es mátrixát:

$$B = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1i} \cdot y_i \\ \sum x_{2i} \cdot y_i \\ \sum x_{3i} \cdot y_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

- A (4) jelű képletben a keresett együtthatók 4×1 -es mátrixát találjuk.

$$X = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

A mátrixelemek értékeinek számítását a 2. táblázat segítségével végezhetjük el. Gauss-elimináció segítségével megoldhatjuk az alábbi egyenletrendszert, melyet az (5) jelű egyenlet jelöl: $A \cdot X = B$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} & \sum x_{3i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i} \cdot x_{2i} & \sum x_{1i} \cdot x_{3i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{1i} \cdot x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i} \cdot x_{3i} \\ \sum x_{3i} & \sum x_{1i} \cdot x_{3i} & \sum x_{2i} \cdot x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1i} \cdot y_i \\ \sum x_{2i} \cdot y_i \\ \sum x_{3i} \cdot y_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ahhoz, hogy mátrixszorzást alkalmazni tudjunk, szükséges átalakítani az egyenletet a (6) jelű képletben jelzett módon:

$$B^T \cdot (A^T)^{-1} = X^T \quad (6)$$

Ehhez a *MicrosoftExcel* TRANSPOSE, MINVERSE függvényeit használtuk, míg a mátrixszorzás elvégzéséhez az MMULT függvény került alkalmazásra.

2. táblázat

A lineáris regresszió mátrixelemeinek meghatározása

n	$f \left[\frac{mm}{ford} \right]$	$v_v \left[\frac{m}{s} \right]$	$F [N]$	$R_a [\mu m]$	$f \cdot R_a$	$v_v \cdot R_a$	$F_v \cdot R_a$
1	0,05	0,6938	80	0,1729	0,0086	0,1200	13,8320
2	0,10	0,6938	80	0,2269	0,0227	0,1574	18,1493
3	0,05	0,9817	80	0,1180	0,0059	0,1158	9,4373
4	0,10	0,9817	80	0,2800	0,0280	0,2748	22,3973
5	0,05	0,6938	100	0,1425	0,0071	0,0989	14,2533
6	0,10	0,6938	100	0,2297	0,0230	0,1594	22,9733
7	0,05	0,9817	100	0,1955	0,0098	0,1919	19,5500
8	0,10	0,9817	100	0,2404	0,0240	0,2360	24,0400
Σ	0,6	6,7020	720	1,6059	0,1291	1,3542	144,6327
	x_1	x_2	x_3	y	$x_1 \cdot y$	$x_2 \cdot y$	$x_3 \cdot y$

A számítás eredményeit, a meghatározott együtthatókat a 3. táblázat tartalmazza, míg (7) jelű képlet a kiindulási egyenletet mutatja be a behelyettesített együtthatókkal.

3. táblázat

lineáris regresszió együtthatóinak számítása

B^T				$(A^T)^{-1}$				X^T				kitevők	
1,605867	0,1291	1,3542	144,6327	15,60866	-15	-5,0536	-0,1125	0,013476	1,740333	0,053664	0,000131	a_0	0,013476
				-15	200	0	2,45E-15					a_1	1,740333
				-5,0536	1,12E-13	6,032352	1,99E-16					a_2	0,053664
				-0,1125	2,5E-15	0	0,00125					a_3	0,000131

$$R_a = 0,013476 + 1,740333 \cdot f + 0,053664 \cdot v_v + 0,000131 \cdot F_v \quad (7)$$

A (8) jelű egyenlet segítségével olyan százalékos értékek számítását végezzük el, melyek lehetővé teszik a modellek objektív összehasonlítását.

$$R_a \% | Reg. Lin = \left(1 - \frac{R_a | measured}{R_a | Reg. Lin} \right) \cdot 100 [\%] \quad (8)$$

A 4. táblázat tartalmazza a technológiai paraméterkombinációkhoz tartozó mért értékeket, a lineáris regresszió által becsült számításokat, illetve ezek százalékos eltérését. Látható, hogy a modell viszonylag nagy kilengéseket tartalmaz.

A számítás felgyorsítható a *LINEST* függvény alkalmazásával, mellyel azonos eredményre jutottunk. A későbbiekben, a bonyolultabb modellek bemutatásánál alkalmazni fogjuk ezt a verziót.

4. táblázat

A lineáris regresszió eredményei

n	$f \left[\frac{mm}{ford} \right]$	$v_v \left[\frac{m}{s} \right]$	$F [N]$	$R_a Reg. Lin$	$R_a measured$	$R_a \% Reg. Lin$
1	0,05	0,6938	80	0,1482	0,1729	14,29
2	0,10	0,6938	80	0,2352	0,2269	-3,68
3	0,05	0,9817	80	0,1636	0,1180	-38,72
4	0,10	0,9817	80	0,2507	0,2800	10,47
5	0,05	0,6938	100	0,1508	0,1425	-5,81
6	0,10	0,6938	100	0,2378	0,2297	-3,52
7	0,05	0,9817	100	0,1663	0,1955	14,96
8	0,10	0,9817	100	0,2533	0,2404	-5,36

2.2. A másodfokú regressziós modell

A következő modell, melyet vizsgálunk, a másodfokú regressziós modell. Ebben az esetben a (9) jelű képlet segítségével keressük a megoldásokat, a lineáris modellhez képest kiegészülve a másodfokú elemekkel, illetve a kétváltozós interakciókkal.

$$R_a = a_0 + a_1 \cdot f + a_2 \cdot v_v + a_3 \cdot F_v + a_4 \cdot f^2 + a_5 \cdot v_v^2 + a_6 \cdot F_v^2 + a_7 \cdot f \cdot v_v + a_8 \cdot f \cdot F_v + a_9 \cdot v_v \cdot F_v \quad (9)$$

A képletben szereplő technológiai paraméterek mellett találjuk a számítás során meghatározni kívánt $a_0, \dots, a_9$ együtthatókat. A kísérletek számát n -nel, míg a kísérleti eredményeket $R_a \rightarrow y_i$ -vel jelöljük, a technológiai paramétereket hasonlóan elnevezzük:

- Előtolás: $f \rightarrow x_{1i}$
- Vasalási sebesség: $v_v \rightarrow x_{2i}$
- Vasalóerő: $F_v \rightarrow x_{3i}$

A felírandó mátrixok továbbá kiegészíthetők a másodfokú elemekkel (f^2 ; v_v^2 ; F_v^2), illetve a kétváltozós interakciókkal ($f \cdot v_v$; $f \cdot F_v$; $v_v \cdot F_v$) ezen jelölések felhasználásával. A megoldandó egyenletrendszert a (10) jelű képlet szemlélteti.

$$\begin{matrix} A & X & B \\ (10 \times 10) & (10 \times 1) & (10 \times 1) \end{matrix} = \quad (10) \quad$$

A mátrixok bonyolultsága miatt célszerű jelen modell esetén a *LINEST* Excel függvényt alkalmazni, mellyel felgyorsítjuk a folyamatot a mátrixműveletek manuális elvégzésének mellőzésével. A függvény első argumentumába a kísérleti eredményeket definiáljuk, második argumentumába pedig a technológiai paraméterek első-, illetve másodfokú elemeit, valamint a paraméterek kételemű interakcióit. Az 5. táblázat egy Excel-munkalap sorainak és oszlopainak jelölésével lett ellátva, ezek alapján a következő függvényt szükséges definiálni az együtthatók meghatározásához, (11)-gyel jelölve:

$$= \text{LINEST}(J2: J9; A2: I9) \quad (11)$$

5. táblázat

A másodfokú regresszió bemeneti paraméterei

Ex*	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	f	v_v	F_v	f^2	v_v^2	F_v^2	$f \cdot v_v$	$f \cdot F_v$	$v_v \cdot F_v$	R_a	n
2	0,05	0,6938	80	0,0025	0,4814	6400	0,0347	4	55,50	0,1729	1
3	0,10	0,6938	80	0,0100	0,4814	6400	0,0694	8	55,50	0,2269	2
4	0,05	0,9817	80	0,0025	0,9637	6400	0,0491	4	78,54	0,1180	3
5	0,10	0,9817	80	0,0100	0,9637	6400	0,0982	8	78,54	0,2800	4
6	0,05	0,6938	100	0,0025	0,4814	10000	0,0347	5	69,38	0,1425	5
7	0,10	0,6938	100	0,0100	0,4814	10000	0,0694	10	69,38	0,2297	6
8	0,05	0,9817	100	0,0025	0,9637	10000	0,0491	5	98,17	0,1955	7
9	0,10	0,9817	100	0,0100	0,9637	10000	0,0982	10	98,17	0,2404	8

* A táblázat első sora és első oszlopa az Excel-táblázat sorainak, oszlopainak jelentését tartalmazza.

A modell segítségével számított együtthatókat a 6. táblázat tartalmazza.

6. táblázat

A másodfokú regresszió kimeneti paraméterei

a_0	-0,019347
a_1	3,601582
a_2	0,000000
a_3	0,000000
a_4	0,000000
a_5	-0,375537
a_6	-0,000008
a_7	2,283200
a_8	-0,041933
a_9	0,005685

A (12) jelű egyenlet segítségével olyan százalékos értékek számítását végezzük el, melyek lehetővé teszik a modellek objektív összehasonlítását.

$$R_a \%|Reg.Sec = \left(1 - \frac{R_a|measured}{R_a|Reg.Sec}\right) \cdot 100 [\%] \quad (12)$$

A 7. táblázat tartalmazza a technológiai paraméterkombinációkhoz tartozó mért értékeket, a másodfokú regresszió által becsült számításokat, illetve ezek százalékos eltérését. Látható, hogy ezen modell is tartalmaz relatíve nagy kilengéseket, de a lineáris modellhez képest jobban képes követni a mért eredményeket, nemlineáris hatásokat is figyelembe véve.

7. táblázat

A másodfokú regresszió eredményei

n	$f \left[\frac{mm}{ford} \right]$	$v_v \left[\frac{m}{s} \right]$	$F [N]$	$R_a Reg.Sec$	$R_a measured$	$R_a \% Reg.Sec$
1	0,05	0,6938	80	0,1541	0,1729	10,87
2	0,10	0,6938	80	0,2457	0,2269	-8,28
3	0,05	0,9817	80	0,1368	0,1180	-15,93
4	0,10	0,9817	80	0,2612	0,2800	6,71
5	0,05	0,6938	100	0,1613	0,1425	-13,18
6	0,10	0,6938	100	0,2109	0,2297	8,18
7	0,05	0,9817	100	0,1767	0,1955	9,61
8	0,10	0,9817	100	0,2592	0,2404	-7,82

2.3. Az exponenciális regressziós modell

Az exponenciális regressziós modell esetén a (13) jelű képlet alakjában keressük a megoldásokat.

$$Ra = a_0 \cdot f^{a_1} \cdot v^{a_2} \cdot F^{a_3} \quad (13)$$

A modell megoldásának első lépéseként logaritmizálni kell az egyenletet, ezzel visszavezetve a feladatot lineáris alakra. Ez látható a (14) jelű egyenletben.

$$\log Ra = \log a_0 + a_1 \cdot \log f + a_2 \cdot \log v + a_3 \cdot \log F \quad (14)$$

A feladatot célszerűen a *LINEST* Excel függvény segítségével végezzük el. Az előző fejezetpontban már láthattuk, hogy a függvény első argumentumába a kísérleti eredményeket definiáljuk, második argumentumába pedig a technológiai paraméterek elemeit, jelen esetben a logaritmizált értékükkel. A 8. táblázat a korábbiakhoz hasonlóan egy Excel munkalap sorainak és oszlopainak jelölésével van ellátva, ezek alapján a következő függvényt szükséges definiálni az együtthatók meghatározásához, (15)-tel jelölve:

$$= \text{LINEST}(D2:D9; A2:C9) \quad (15)$$

8. táblázat*Az exponenciális regresszió bemeneti paraméterei*

Ex*	A	B	C	D	E
1	$\log f$	$\log v_v$	$\log F_v$	$\log R_a$	n
2	-1,3010	-0,1588	1,9031	-0,76221	1
3	-1,0000	-0,1588	1,9031	-0,64423	2
4	-1,3010	-0,0080	1,9031	-0,92824	3
5	-1,0000	-0,0080	1,9031	-0,55289	4
6	-1,3010	-0,1588	2,0000	-0,84608	5
7	-1,0000	-0,1588	2,0000	-0,63878	6
8	-1,3010	-0,0080	2,0000	-0,70885	7
9	-1,0000	-0,0080	2,0000	-0,61907	8

A modell segítségével számított együtthatókat a 9. táblázat tartalmazza. Az a_0 együttható meghatározásához szükséges a logaritmus értékét kiszámítani.

9. táblázat*Az exponenciális regresszió kimeneti paraméterei*

a_0	0,47592
$\log a_0$	-0,322466
a_1	0,656428
a_2	0,136391
a_3	0,192938

A (16) jelű egyenlet segítségével számítjuk az exponenciális regressziós modellhez kapcsolódó százalékos értéket, mely lehetővé teszi a modellek objektív összehasonlítását.

$$R_a \% | Reg. Exp = 1 - \frac{R_a | measured}{R_a | Reg. Exp} \quad (16)$$

A 10. táblázat tartalmazza a technológiai paraméterkombinációkhoz tartozó mért értékeket, az exponenciális regresszió által becsült számításokat, illetve ezek százalékos eltérését.

10. táblázat

Az exponenciális regresszió eredményei

n	$f \left[\frac{mm}{ford} \right]$	$v_v \left[\frac{m}{s} \right]$	$F [N]$	$R_a Reg. Exp$	$R_a measured$	$R_a \% Reg. Exp$
1	0,05	0,6938	80	0,1476	0,1729	14,64
2	0,10	0,6938	80	0,2326	0,2269	-2,53
3	0,05	0,9817	80	0,1547	0,1180	-31,17
4	0,10	0,9817	80	0,2439	0,2800	12,89
5	0,05	0,6938	100	0,1541	0,1425	-8,10
6	0,10	0,6938	100	0,2428	0,2297	-5,71
7	0,05	0,9817	100	0,1615	0,1955	17,37
8	0,10	0,9817	100	0,2546	0,2404	-5,91

3. A faktoriális kísérlettervezés bemutatása

A teljes faktoriális kísérlettervezést a *PTC Mathcad Prime 10.0.0.0* szoftver segítségével végeztük el. A kísérlettervezés módszere (Design of Experiments) lehetővé teszi több paraméter hatásainak egyidejű vizsgálatát. Ehhez a tényezők összes lehetséges kombinációjában szükséges elvégezni a kísérleteket, amely exponenciálisan megnövelheti az elvégzendő vizsgálatok számát. Ez idő-, és költségigényes vállalkozás.

Az általunk végzett kísérletek során a korábban is bemutatott adatok alapján nyolc független paraméterkombináció került kialakításra. Ez a faktoriális kísérlettervezés jelöléseit alkalmazva faktorokkal és szintekkel definiálható. A faktorok a beállítható technológiai paramétereket jelöli, amely $f = 3$ (az előtolás, a vasalási sebesség és a vasalóerő), míg a szintek száma ezen faktorok különböző értékeit definiálja, amely $p = 2$ (ún. minimum- és maximumérték). A független paraméterkombinációk számát ezek alapján is kiszámíthatjuk, a (17) jelű képlet segítségével.

$$n = p^f = 2^3 = 8 \quad (17)$$

A kísérlettervezés eredményeit a (18) jelű képlet alakjában keressük.

$$R_a = k_0 + k_1 \cdot f + k_2 \cdot v_v + k_3 \cdot F_v + k_{12} \cdot f \cdot v_v + k_{13} \cdot f \cdot F_v + k_{23} \cdot v_v \cdot F_v + k_{123} \cdot f \cdot v_v \cdot F_v \quad (18)$$

A *Mathcad* szoftverben első lépésben definiálni kell az alapadatokat. Ezeket az 1. ábrán mutatjuk be. Láthatók a minimális és maximális előtolás, vasalási sebesség és vasalóerő értékek, valamint ezek kombinációiban megmunkált felület mérőgéppel mért átlagos felületi érdessége.

$x_{1min} := f_{min} = 0.05$	$x_{1max} := f_{max} = 0.1$
$x_{2min} := v_{min} = 0.6938$	$x_{2max} := v_{max} = 0.9817$
$x_{3min} := F_{min} = 80$	$x_{3max} := F_{max} = 100$
$y_1 := R_1 = 0.1729$	$y_2 := R_2 = 0.2269$
$y_3 := R_3 = 0.118$	$y_4 := R_4 = 0.28$
$y_5 := R_5 = 0.1425$	$y_6 := R_6 = 0.2297$
$y_7 := R_7 = 0.1955$	$y_8 := R_8 = 0.2404$

1. ábra. A faktoriális kísérlettervezés alapadatai (Mathcad Prime, 2025)

Ezt követően egy transzformált koordináta-rendszerbe számítjuk át az értékeket. Ehhez – ahogy azt a 2. ábrán láthatjuk – minden faktornak ki kell számítani azon tartományát, amelyen belül a változtatása reális. Ennek az intervallumnak a közepe lesz az alapszint (x_{i0} -val jelölve), melyhez az ún. variációs intervallumot (Δx_i -vel jelölve) hozzáadva a faktor felső szintjét, kivonva pedig az alsó szintjét kapjuk. Ezen értékek segítségével elvégezhetjük a transzformációt, mellyel egyszerűsíthetjük a kísérleti feltételek felírását. Látható, hogy folytonos értékészletű faktorok esetén a transzformált koordináta-rendszerbeli alsó szint értéke -1 , a felső szint értéke pedig $+1$ lesz, az alapszint pedig 0 .

$x_{10} := \frac{(x_{1min} + x_{1max})}{2} = 0.075$	$\Delta x_1 := \frac{(x_{1max} - x_{1min})}{2} = 0.025$
$x_{20} := \frac{(x_{2min} + x_{2max})}{2} = 0.838$	$\Delta x_2 := \frac{(x_{2max} - x_{2min})}{2} = 0.144$
$x_{30} := \frac{(x_{3min} + x_{3max})}{2} = 90$	$\Delta x_3 := \frac{(x_{3max} - x_{3min})}{2} = 10$
$X_{1min} := \frac{(x_{1min} - x_{10})}{\Delta x_1} = -1$	$X_{1max} := \frac{(x_{1max} - x_{10})}{\Delta x_1} = 1$
$X_{2min} := \frac{(x_{2min} - x_{20})}{\Delta x_2} = -1$	$X_{2max} := \frac{(x_{2max} - x_{20})}{\Delta x_2} = 1$
$X_{3min} := \frac{(x_{3min} - x_{30})}{\Delta x_3} = -1$	$X_{3max} := \frac{(x_{3max} - x_{30})}{\Delta x_3} = 1$

2. ábra. A faktoriális kísérlettervezés transzformált értékei (Mathcad Prime, 2025)

A következő lépésben ezen transzformált koordináta-rendszerben keressük a 3. ábrán látható polinom együtthatóit (K_x). Az együtthatók meghatározásához célszerű egy segéd táblázatot felírni, hogy az y_i értékek előjeleit meg tudjuk határozni. Ezt a segéd táblázatot is láthatjuk a 3. ábrán. Az X_1, X_2, X_3 együtthatók előjelei a kettes számrendszer szabályai szerint módosulnak, míg a többi együttható ezek szorzatai szerint kerül számításra.

$$Y = K_0 + K_1 \cdot X_1 + K_2 \cdot X_2 + K_3 \cdot X_3 + K_{12} \cdot X_{12} + K_{13} \cdot X_{13} + K_{23} \cdot X_{23} + K_{123} \cdot X_{123}$$

X_1	X_2	X_3	X_{12}	X_{13}	X_{23}	X_{123}	y_i
-1	-1	-1	1	1	1	-1	y_1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	y_2
-1	1	-1	-1	1	-1	1	y_3
1	1	-1	1	-1	-1	-1	y_4
-1	-1	1	1	-1	-1	1	y_5
1	-1	1	-1	1	-1	-1	y_6
-1	1	1	-1	-1	1	-1	y_7
1	1	1	1	1	1	1	y_8

2. ábra. A transzformált polinom és együtthatóinak segéd táblázata (Mathcad Prime, 2025)

Az együtthatók számítását a 4. ábrán találjuk. A K_0 együttható esetén minden y_i érték pozitív előjelű, míg a továbbiak a 3. ábra segéd táblázatának oszlopai szerint kerültek meghatározásra. A K_x együttható esetén az X_x oszlopa.

$$K_0 := \frac{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8)}{n} = 0.2007$$

$$K_1 := \frac{(-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7 + y_8)}{n} = 0.0435$$

$$K_2 := \frac{(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 + y_7 + y_8)}{n} = 0.0077$$

$$K_3 := \frac{(-y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8)}{n} = 0.0013$$

$$K_{12} := \frac{(y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + y_5 - y_6 - y_7 + y_8)}{n} = 0.008$$

$$K_{13} := \frac{(y_1 - y_2 + y_3 - y_4 - y_5 + y_6 - y_7 + y_8)}{n} = -0.01$$

$$K_{23} := \frac{(y_1 + y_2 - y_3 - y_4 - y_5 - y_6 + y_7 + y_8)}{n} = 0.008$$

$$K_{123} := \frac{(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - y_6 - y_7 + y_8)}{n} = -0.019$$

4. ábra. A transzformált polinom együtthatóinak számítása (Mathcad Prime, 2025)

A számítás utolsó lépésében a visszatranszformált polinom együtthatóit számítjuk ki, amely egyúttal az előzetesen definiált (18) jelű képlet együtthatóinak felel meg. A visszatranszformálás számításait, valamint a keresett együtthatók értékeit az 5. ábrán találjuk.

$$\begin{aligned}
 y &= K_0 + K_1 \cdot \frac{(x_1 - x_{10})}{\Delta x_1} + K_2 \cdot \frac{(x_2 - x_{20})}{\Delta x_2} + K_3 \cdot \frac{(x_3 - x_{30})}{\Delta x_3} + K_{12} \cdot \frac{(x_1 - x_{10})}{\Delta x_1} \cdot \frac{(x_2 - x_{20})}{\Delta x_2} + K_{13} \cdot \frac{(x_1 - x_{10})}{\Delta x_1} \cdot \frac{(x_3 - x_{30})}{\Delta x_3} + K_{23} \cdot \frac{(x_2 - x_{20})}{\Delta x_2} \cdot \frac{(x_3 - x_{30})}{\Delta x_3} + K_{123} \cdot \frac{(x_1 - x_{10})}{\Delta x_1} \cdot \frac{(x_2 - x_{20})}{\Delta x_2} \cdot \frac{(x_3 - x_{30})}{\Delta x_3} \\
 k_0 &:= K_0 - K_1 \cdot \frac{x_{10}}{\Delta x_1} - K_2 \cdot \frac{x_{20}}{\Delta x_2} - K_3 \cdot \frac{x_{30}}{\Delta x_3} + K_{12} \cdot \frac{x_{10} \cdot x_{20}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2} + K_{13} \cdot \frac{x_{10} \cdot x_{30}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_3} + K_{23} \cdot \frac{x_{20} \cdot x_{30}}{\Delta x_2 \cdot \Delta x_3} - K_{123} \cdot \frac{x_{10} \cdot x_{20} \cdot x_{30}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3} = 3,255 \\
 k_1 &:= K_1 \cdot \frac{1}{\Delta x_1} - K_{12} \cdot \frac{x_{20}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2} - K_{13} \cdot \frac{x_{30}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_3} + K_{123} \cdot \frac{x_{20} \cdot x_{30}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3} = -35,758 \\
 k_2 &:= K_2 \cdot \frac{1}{\Delta x_2} - K_{12} \cdot \frac{x_{10}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2} - K_{23} \cdot \frac{x_{30}}{\Delta x_2 \cdot \Delta x_3} + K_{123} \cdot \frac{x_{10} \cdot x_{30}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3} = -4,153 \\
 k_3 &:= K_3 \cdot \frac{1}{\Delta x_3} - K_{13} \cdot \frac{x_{10}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_3} - K_{23} \cdot \frac{x_{20}}{\Delta x_2 \cdot \Delta x_3} + K_{123} \cdot \frac{x_{10} \cdot x_{20}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3} = -0,034 \\
 k_{12} &:= K_{12} \cdot \frac{1}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2} - K_{123} \cdot \frac{x_{30}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3} = 49,267 \\
 k_{13} &:= K_{13} \cdot \frac{1}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_3} - K_{123} \cdot \frac{x_{20}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3} = 0,395 \\
 k_{23} &:= K_{23} \cdot \frac{1}{\Delta x_2 \cdot \Delta x_3} - K_{123} \cdot \frac{x_{10}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3} = 0,045 \\
 k_{123} &:= K_{123} \cdot \frac{1}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3} = -0,522
 \end{aligned}$$

5. ábra. A keresett polinom együtthatóinak számítása

A (19) jelű egyenlet segítségével számítjuk a faktoriális kísérlettervezéshez kapcsolódó százalékos értéket, mely lehetővé teszi a modellek objektív összehasonlítását.

$$R_a \% | \text{Fact. DoE} = 1 - \frac{R_a | \text{measured}}{R_a | \text{Reg. Fact. DoE}} \quad (19)$$

A 11. táblázat tartalmazza a technológiai paraméterkombinációkhoz tartozó mért értékeket, a faktoriális kísérlettervezés által becsült számításokat, illetve ezek százalékos eltérését.

11. táblázat
A faktoriális kísérlettervezés eredményei

..l	$f \left[\frac{mm}{ford} \right]$	$v_v \left[\frac{m}{s} \right]$	$F_v [N]$	$R_a [\mu m]$	$R_a \text{Fact. DoE}$	$R_a \% \text{Fact. DoE}$
1	0,05	0,6938	80	0,1729	0,1698	1,81
2	0,10	0,6938	80	0,2269	0,2236	1,43
3	0,05	0,9817	80	0,1180	0,1138	3,51
4	0,10	0,9817	80	0,2800	0,2757	1,54
5	0,05	0,6938	100	0,1425	0,1386	2,78
6	0,10	0,6938	100	0,2297	0,2256	1,80
7	0,05	0,9817	100	0,1955	0,1903	2,66
8	0,10	0,9817	100	0,2404	0,2350	2,26

4. A modellek összehasonlítása

Kutatásunk utolsó lépésében a bemutatott modellek összehasonlítását végezzük el. Ehhez az egyes modellek százalékos értékeinek négyzetes középértékét vesszük, hogy a pozitív és negatív kitérések egységesen kezelhetők legyenek. A számításokat a 12. táblázat utolsó sorában láthatjuk.

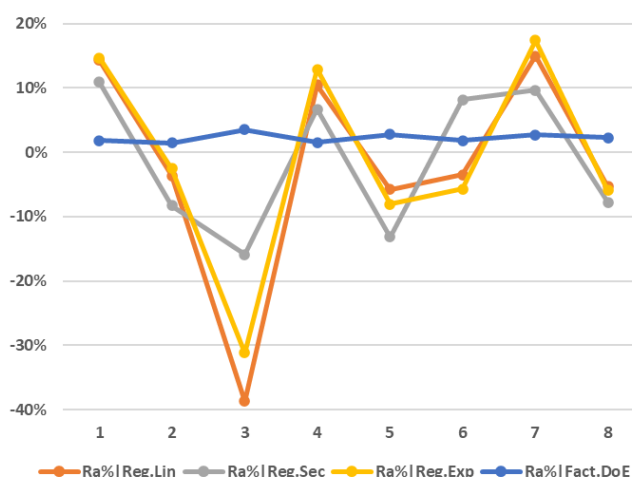
12. táblázat

A modellek összehasonlítása a négyzetes középértékük segítségével

$R_a\% Reg. Lin$	$R_a\% Reg. Sec$	$R_a\% Reg. Exp$	$R_a\% Fact. DoE$
14,29	10,87	14,64	1,81
-3,68	-8,28	-2,53	1,43
-38,72	-15,93	-31,17	3,51
10,47	6,71	12,89	1,54
-5,81	-13,18	-8,10	2,78
-3,52	8,18	-5,71	1,80
14,96	9,61	17,37	2,66
-5,36	-7,82	-5,91	2,26
16,30	10,49	14,97	2,32

Megállapítható, hogy a faktoriális kísérlettervezés módszere közelítette legjobban a mért eredményeket, így a jövőbeli közelítési, optimalizálási feladatokhoz célszerű ezen módszert alkalmazni. Ha azonban nem állna rendelkezésre kellő mennyiségű kísérleti kombináció, akkor a gyémántvasalási kísérletek technológiai paramétereinek vizsgálatára ajánlott lehet a másodfokú regresszió módszerét alkalmazni, amely jobban közelítette a mért eredményeket a lineáris, illetve exponenciális regressziónál.

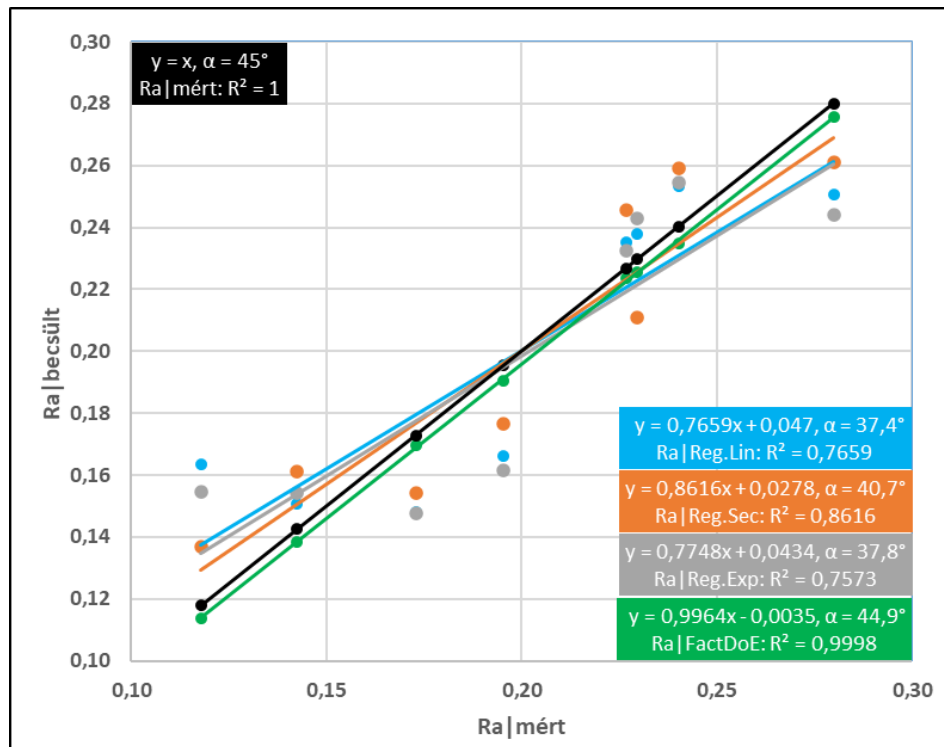
A 6. ábra szemlélteti ezen százalékos értékeket. Láthatjuk a regressziós modellek kilengéseit pozitív és negatív irányba is, miközben a teljes faktoriális kísérlettervezés végig minimális pozitív kitérésű hibával közelített.



6. ábra. A vizsgált modellek százalékos hibái

A modellek összehasonlításának egy másik módját a 7. ábra szemlélteti. Az ábrán pontdiagramként ábrázoltuk egyenként a korábban vizsgált modellek becscült értékeit (függőleges tengely) a mért értékek (vízszintes tengely) függvényében. Az ábrán kék színű trendvonallal jelöltük a lineáris regressziót, narancssárgával a másodfokú regressziót, szürkével az exponenciális regressziót, míg zölddel a faktoriális kísérlettervezést. Viszonyításképp, fekete színnel a mért értéket is feltüntettük a vízszintes tengelyen, melyet lineáris trendvonallal közelítve értelemszerűen egy, a vízszintes tengellyel 45°-ot bezáró egyenest kaptunk.

Az ábrán látható, hogy a vizsgált modellek közül legjobban a faktoriális kísérlettervezés módszere közelítette meg az idealizált 45°-os egyenest ($Ra|FactDoE|\alpha = 44,9^\circ$), míg a lineáris regresszió modellje a legkevésbé ($Ra|Reg.Lin|\alpha = 37,4^\circ$), nem sokkal az exponenciális modell mögött ($Ra|Reg.Exp|\alpha = 37,8^\circ$).



7. ábra. A becscült eredmények viszonyítása a mérési adatokhoz

A modellek összehasonlítását utolsó lépésben a determinációs együttható számításának segítségével végezzük el, amely az egyes modellek jóságát vizsgálja. A determinációs együttható számításának képletét a (20) jelű egyenlet (365datascience.com) tartalmazza.

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (20)$$

Az egyenletben szereplő SSE az ún. eltérés-négyzetösszeg, melynek számítási módját a (21) jelű egyenlet (365datascience.com) tartalmazza; míg SST a teljes négyzetösszeg, melynek számítási módját a (22) jelű egyenlet (365datascience.com) tartalmazza.

$$SSE = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (21)$$

$$SST = \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad (22)$$

A képletekben szereplő y_i a mért értékeket, $\hat{y}_i$ a becsült értékeket, míg $\bar{y}$ a mért értékek átlagát jelenti. A számítások eredményeit a 13. táblázat tartalmazza. A determinációs együttható értékei alapján is megállapítható, hogy a faktoriális kísérlettervezés közelítette legpontosabban a mért eredményeket, míg a regressziós modellek közül a másodfokú regresszió volt a legpontosabb, míg a lineáris és az exponenciális regressziós modell közel azonos jósággal közelítette a mért értékeket.

13. táblázat
A modellek összehasonlítása a determinációs együttható segítségével

n	Ra measured	Ra Reg.Lin	Ra Reg.Sec	Ra Reg.Exp	Ra Fact.DoE
1	0,1729	0,1482	0,1541	0,1476	0,1698
2	0,2269	0,2352	0,2457	0,2326	0,2236
3	0,118	0,1636	0,1368	0,1547	0,1138
4	0,28	0,2507	0,2612	0,2439	0,2757
5	0,1425	0,1508	0,1613	0,1541	0,1386
6	0,2297	0,2378	0,2109	0,2428	0,2256
7	0,1955	0,1663	0,1767	0,1615	0,1903
8	0,2404	0,2533	0,2592	0,2546	0,2350
SST		0,0204	0,0204	0,0204	0,0204
SSE		0,0048	0,0028	0,0050	0,0001
R²		0,7664	0,8617	0,7557	0,9929

5. Összefoglalás

Ebben a tanulmányban egy korábban elvégzett kísérletsorozat eredményeinek felhasználásával mutattuk be a faktoriális kísérlettervezés és különböző regressziós modellek módszerét.

A regressziós modellezés célja, hogy a változók között matematikai összefüggéseket írjunk le. A kísérleti adatokra különböző regressziós modelleket illesztettünk, majd vizsgáltuk hatásait a kalkulált eredmények tekintetében. A teljes faktoriális kísérlettervezést a *PTC Mathcad Prime 10.0.0.0* szoftver segítségével végeztük el. A kísérlettervezés módszere (Design of Experiments) lehetővé teszi több paraméter hatásainak egyidejű vizsgálatát.

Kutatásunk utolsó lépésében a bemutatott modellek összehasonlítását végeztük el. Ehhez az egyes modellek százalékos értékeinek négyzetes középértékét vettük, hogy a pozitív és negatív kitérések egységesen kezelhetők legyenek.

Megállapítottuk, hogy a faktoriális kísérlettervezés módszere közelítette legjobban a mért eredményeket, így a jövőbeli közelítési, optimalizálási feladatokhoz célszerű ezen módszert alkalmazni. Ha nem állna rendelkezésre kellő mennyiségű kísérleti kombináció, akkor a gyémántvasalási kísérletek technológiai paramétereinek vizsgálatára ajánlott lehet a másodfokú regresszió módszere, amely jobban közelítette a mért eredményeket a lineáris, illetve exponenciális regresszióknál.

Irodalom

- [1] Chapra, S. C., Canale, R. P. (2015). *Numerical methods for engineers*. (7th ed. International ed.) New York: McGraw-Hill Education.
- [2] Montgomery, D., Cahyono, St. (2022). *Design and Analysis of Experiments*. 9th ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- [3] Kutner, M., Nachtsheim, C., Neter, J. (2004). *Applied Linear Regression Model*.
<https://doi.org/10.2307/1269508>
- [4] Jensen, W. A. (2017). Book review of response surface methodology: Process and product optimization using designed experiments 4th edition. *Journal of Quality Technology*, 49 (2), 186–188. <https://doi.org/10.1080/00224065.2017.11917988>
- [5] Skovgaard, L. (2000). *Applied regression analysis*. 3rd edn. N. R. Draper and H. Smith, Wiley, New York, 1998. No. of pages: xvii+706. *Statistics in Medicine – STAT MED*, 19, 3136–3139. [https://doi.org/10.1002/1097-0258\(20001130\)19:22<3136::AID-SIM607>3.0.CO;2-Q](https://doi.org/10.1002/1097-0258(20001130)19:22<3136::AID-SIM607>3.0.CO;2-Q)
- [6] Box, G., Hunter, S., Hunter, W. (2005). *Statistics for experimenters. Design, innovation, and discovery*. 2nd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- [7] Saját PTC Mathcad Prime 10.0.0.0 programrészlet, 2025.
- [8] Smolnicki, S., Varga, G. (2025). Analysis of surface roughness of diamond-burnished surfaces using Kraljic matrices and experimental design. *Applied Sciences*, 15 (14), 8025.
<https://doi.org/10.3390/app15148025>
- [9] <https://365datascience.com/tutorials/statistics-tutorials/sum-squares/> (letöltve: 2025. 09. 03.).