

## FORGÁSHÉJAK HIERARCHIKUS VÉGESELEMEIRŐL RÖVIDEN

**Páczelt István** 

professor emeritus, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet  
H-3515 Miskolc-Egyetemváros, e-mail: [istvan.paczelt@uni-miskolc.hu](mailto:istvan.paczelt@uni-miskolc.hu)

**Szabó Barna** 

professor emeritus, Washington University in St. Louis, USA,  
e-mail: [szabo@email.wustl.edu](mailto:szabo@email.wustl.edu)

**Baksa Attila** 

egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet  
H-3515 Miskolc-Egyetemváros, e-mail: [attila.baksa@uni-miskolc.hu](mailto:attila.baksa@uni-miskolc.hu)

### Absztrakt

A cikk röviden összefoglalja a hierarchikus héj véges elemek felépítését, továbbá különböző forgáshéjszerkezetekre vonatkozó számítási eredményeket mutat be, összehasonlítva azokat elméleti és más végeselem-programok eredményeivel.

**Kulcsszavak:** végeselem-módszer, hierarchikus modellezés, forgáshéjak, rugalmasságtan

### Abstract

The paper briefly summarizes the structure of hierarchical shell finite elements, and also presents computational results for different rotational shell structures, comparing them with theoretical results and other finite element approximations.

**Keywords:** finite element method, hierarchical model, shells of revolution, theory of elasticity

### 1. Bevezetés

A mechanikai mennyiségek meghatározásához kötődő közelítő megoldási módszerek közül kitűnnek hatékonyságukkal az ún. energiaalapú módszerek. Ezzel kapcsolatban a matematikai peremérték-feladathoz kapcsolt minimalizálandó funkcionál minimumának keresését véges számú tagot tartalmazó függvények sorával oldjuk meg, aminek ötletét W. Ritz dolgozta ki (Ritz, 1908). Ez alapján az elmozdulásmező közelítését a potenciális energia minimumából nyert algebrai egyenletrendszerből nyert polinomok, trigonometrikus függvények szorzóparaméterein keresztül határozzuk meg. Ha a paraméterek egy részét a vizsgált test felosztása révén nyert elemek csomópontokbeli elmozdulásán keresztül nyerjük, akkor az általunk választott végeselem-módszerhez jutunk. A variációs módszerek fejlődésével kapcsolatosan E. Stein alapos áttekintést tesz (Stein, 2012) alatti munkájában.

A végeselem-módszer megkülönböztető jellemzője, hogy a megoldási tartományt elemekre osztja – általában görbült tetraéder, hexaéder vagy pentaéder alakúakra –, melyeket sima leképezési függvényekkel egy megfelelő referenciaelemhez rendel. A referenciaelemeken definiált polinomiális bázis-függvényeket, úgynevezett alakfüggvényeket, leképezik a felosztás elemeire, amelyet végeselem-hálónak neveznek, egyúttal biztosítva a közelítő függvények elemek közötti folytonosságát is. Ez eredményezi az elemenként sima, folytonos függvények terét, amelyet végeselem-térnek neveznek. A közelítő megoldást a potenciális energia minimalizálásával kapjuk meg a végeselem-téren.

A végeelem-tér dimenziója a szabadsági fokok száma ( $N$ ). A végeelem-megoldások  $N$  növelésével az egzakt megoldáshoz konvergálnak. A végeelem-módszer  $h$ -verziójában  $N$  növelése a háló legnagyobb eleme méretének csökkentésével történik; míg a  $p$ -verzióban  $N$  növelése az elemek polinom fokának növelésével valósul meg (Szabó és Babuska, 2011; Páczelt, 1999). Figyelemre méltó, hogy megfelelő hálótervezéssel és a  $p$ -verzió kombinálásával exponenciális konvergenciasebesség érhető el. Ebben a cikkben az exponenciális konvergenciát demonstráljuk.

$P$ -verziós véges elemek felhasználásával térbeli rúd alakú testek hierarchikus modellezésére láttunk példát a (Páczelt és Szabó, 2018; Páczelt et al., 2023)-ban. Vizsgálatainkban a lineáris rugalmasságtan elméletét alkalmaztuk. A modelleket a potenciális energia minimuma elv feltételéből vezettük le oly módon, hogy az  $\mathbf{u}$  elmozdulásmezőt a keresztmetszetbeli és a hosszmenti lefutást jellemző függvények szorzatával közelítjük:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, s) = \mathbf{U}(x, y)\boldsymbol{\psi}(s) = \mathbf{U}(x, y)\{\mathbf{G}(s)\mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}(s)\mathbf{a}\}, \quad (1)$$

ahol  $\mathbf{U}(x, y)$  a Pascal-háromszög (Obádovics és Szarka, 2009) szerint rendezett hatványfüggvényeket (irányfüggvénynek nevezzük) tartalmazó mátrix,  $\boldsymbol{\psi}(s)$  a  $p$ -verziós végeelem-technika szerint közelített ún. *mezőfüggvények* tartalmazó vektor. A modellt az  $(x, y, s)$  görbe vonalú koordináta-rendszerben definiáljuk. Az  $x$  és az  $y$  tengelyek a keresztmetszet főtengelyeivel esnek egybe,  $s$  a középvonal mentén mért ívhossz. Itt  $\mathbf{G}(s)$ ,  $\boldsymbol{\Phi}(s)$  approximációs mátrixok,  $\mathbf{q}$  a csomóponti általánosított elmozdulásvektor,  $\mathbf{a}$  a pótlólágos állandók vektora. Az  $\mathbf{U}(x, y)$ -ba foglalt polinomok számától függően különböző hierarchiájú modellt tudunk képezni. Vizsgálatainkban hatszintű modell került kifejlesztésre:  $h1$ – $h6$ .

Tartószerkezetek vonatkozásában a klasszikus és magasabb szintű elméletekkel foglalkozik a (Carrera et al., 2011) munka. Lemez- és héjelméleteket taglal számos forrás, lásd (Zienkiewicz és Taylor, 2005; Vasiliev, 2024; Tuan et al., 2017; Kurtatten et al., 2014; Vijayakumar, 2014; Rank et al., 2005; Aghababaei és Reddy, 2009; Freund, 2018; Echter et al., 2013; Tóth és Burmeister, 2020). Héj- és lemezelmélet alapjait találhatjuk meg Bédá–Kozák: *Rugalmas testek mechanikája* című. könyvben (Bédá és Kozák, 1987).

A jelen cikkünkben forgáshéjakra vonatkozóan építjük fel a hierarchikus modellünket. Célunk, olyan konvergens megoldással bíró hierarchikus szint elérése, ami egyúttal az alkalmazott modell legpontosabb megoldását is jelenti.

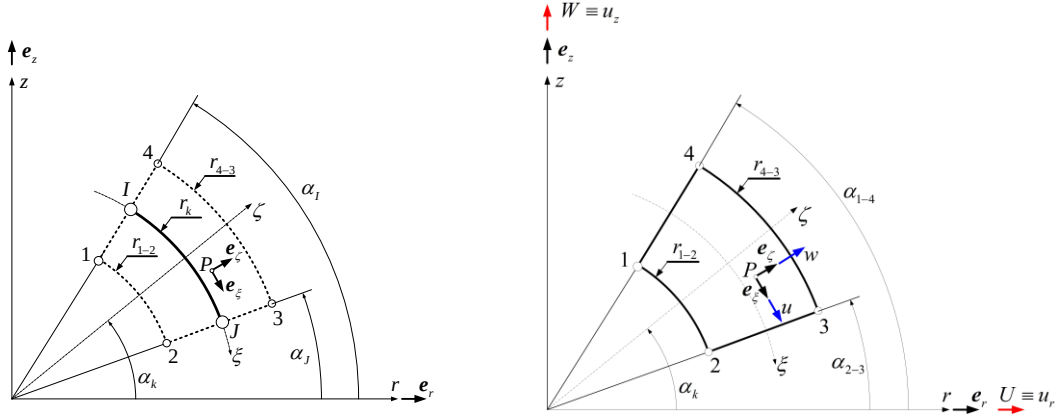
## 2. Görbe peremű véges elemek leképezése, merevségi mátrix előállítása

Mivel alapján  $p$ -verziójú elemeket fogunk használni, a vizsgált testek geometriájának pontos leképezése nagyon fontos. Vizsgáljuk az 1. ábrán vázolt forgásszimmetrikus test meridiánjának egy véges elemét, aminek az első és a harmadik oldala kör. A körök sugarai  $r_{1-2}$  és  $r_{4-3}$ . Bevezetve az alábbi jelöléseket:  $\alpha_k = (\alpha_{1-4} + \alpha_{2-3})/2$ ,  $\alpha_d = (\alpha_{1-4} - \alpha_{2-3})/2$ , a helyi görbe vonalú  $\xi, \zeta$  és a globális  $r, z$  koordináta-rendszer közötti leképezés az alábbi (Szabó és Babuska, 2011):

$$r = (r_{1-2} \frac{1-\zeta}{2} + r_{4-3} \frac{1+\zeta}{2}) \cos(\alpha_k - \xi\alpha_d), \quad z = (r_{1-2} \frac{1-\zeta}{2} + r_{4-3} \frac{1+\zeta}{2}) \sin(\alpha_k - \xi\alpha_d), \quad (2)$$

$$-1 \leq \xi \leq 1, \quad -1 \leq \zeta \leq 1.$$

Legyen a globális koordináta-rendszerbeli elmozdulás  $\mathbf{u}_G = U\mathbf{e}_r + W\mathbf{e}_z$ , míg a helyi  $\mathbf{u}_L = u\mathbf{e}_\xi + w\mathbf{e}_\zeta$ .



1. ábra. Héjelem, a) héjvégeelem az IJ-csomópörök között, b) leképezés, helyi  $(u, w)$  és globális  $(U, W)$  elmozdulások,  $b = r_{4-3} - r_{1-2}$ ,  $-1 \leq \xi \leq 1$ ,  $-1 \leq \zeta \leq 1$ .

A helyi rendszerbeli elmozdulást az alábbi alakban közelítjük

$$\mathbf{u}_L = u\mathbf{e}_\xi + w\mathbf{e}_\zeta \Rightarrow \mathbf{u}_L = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{MM} \mathbf{U}_m(\xi) F_m(\zeta), \quad (3)$$

ahol  $\mathbf{U}_m(\xi)$ -ban a szokásos alakfüggvények szerepelnek, az  $F_m(\zeta) = (\zeta)^{m-1}$  tag pedig a héj vastagsága menti elmozdulás megoszlását van hivatva befolyásolni (az egyszerű hivatkozás és a programbeli elágazások miatt, röviden az  $F_m(\zeta)$  függvényt a következő jelöléssel és értékkel jellemezzük:  $ipolt = 1$ ). Számításainkban még felhasználjuk a Legendre-polinomokat ( $ipolt = 0$ ), ill. azok kombinációját ún.  $\Phi(\zeta)$  függvényeket ( $ipolt = -1$ ) (Szabó és Babuska, 2011; Páczelt, 1999).  $MM$  választásától függően különböző szintű hierarchikus modellhez jutunk, vagyis különböző típusú héj-, lemezelmélet eredményeit tudjuk elérni, ill. meghaladni.  $MM$  a vastagság mentén a közelítendő polinom fokszámát határozza meg.  $MM = 2$ -nél a Naghdi-féle héjelmélet feltételei szerint végezzük el a számítást.

Az elem  $I, J$  csomópontjai miatt (lásd 1a. ábra), célszerű e két csomópörhöz elmozdulásokat is rendelni. Így a teljes elmozdulás a vizsgált véges elem helyi rendszerében

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u}_L(\xi, \zeta) = \sum_{m=1}^{MM} [ \mathbf{G}_m^I(\xi, \zeta) \mathbf{q}_I^m + \mathbf{G}_m^J(\xi, \zeta) \mathbf{q}_J^m ] + \sum_{m=1}^{MM} \hat{\mathbf{G}}_m(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{a}}^m,$$

ami az összegzést helyettesítő mátrixszorzásokkal a következő alakba írható át

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u}_L(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_I^L(\xi, \zeta) + \mathbf{G}_J^L(\xi, \zeta) \\ (2, 2MM) \quad (2, 2MM) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I^L \\ \mathbf{q}_J^L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{a}} \\ (2, 2(np-1)MM) \quad (2(np-1)MM, 1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u}_L(\xi, \zeta) = \mathbf{G}^L(\xi, \zeta) \mathbf{q}^L + \hat{\mathbf{G}}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{a}}, \quad (4)$$

$(2, 4MM) \quad (4MM, 1) \quad (2, 2(np-1)MM) \quad (2(np-1)MM, 1)$

A helyi rendszerbeli deriváltak

$$\mathbf{u}_{L,\xi} = \frac{\partial \mathbf{u}_L}{\partial \xi} = \mathbf{G}_{,\xi}^L(\xi, \zeta) \mathbf{q}^L + \hat{\mathbf{G}}_{,\xi}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{a}}, \quad \xi \Rightarrow \zeta, \quad (5)$$

(2,4MM) (4MM,1) (2,2(np-1)MM) (2(np-1)MM,1)

ahol

$$\mathbf{G}^L = \mathbf{G}^L(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_I^L(\xi, \zeta) & \mathbf{G}_J^L(\xi, \zeta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{,\xi}^L = \mathbf{G}_{,\xi}^L(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{I,\xi}^L(\xi, \zeta) & \mathbf{G}_{J,\xi}^L(\xi, \zeta) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

(2,2MM) (2,2MM) (2,2MM) (2,2MM)

továbbá

$$\mathbf{q}_I^{L,T} = [u^{m=1}, w^{m=1}; u^{m=2}, w^{m=2}; \dots; u^{m=i}, w^{m=i}; \dots; u^{m=MM}, w^{m=MM}]_I, \quad I \rightarrow J, \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(1,2(np-1))}^{m,T} = [a_{1r}, a_{1z}; a_{2r}, a_{2z}; \dots; a_{ir}, a_{iz}; \dots; a_{np-1,r}, a_{np-1,z}]^m, \quad m = 1, \dots, MM,$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(1,2(np-1)MM)}^T = [\hat{\mathbf{a}}^{m=1,T} \hat{\mathbf{a}}^{m=2,T}; \dots; \hat{\mathbf{a}}^{m=i,T}; \dots; \hat{\mathbf{a}}^{m=MM,T}] \quad (8)$$

A (4) alatti közelítésből következik, hogy az  $I$  és  $J$  csomókörökben az elmozdulást

$$\mathbf{u}_{L,I} = \sum_{m=1}^{MM} \mathbf{q}_I^{L,m}, \quad I \rightarrow J \quad \mathbf{q}_I^{L,m} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_I \text{ összegzés szolgáltatja, mivel a } \hat{\mathbf{G}}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{a}} \text{ tag hatása zérus a felveendő}$$

(9) alatti  $N_{p+1}$  polinomok miatt. Legyen

$$N_1 = 0.5(1 - \xi) = N_I, \quad N_2 = 0.5(1 + \xi) = N_J, \\ N_{p+1} = (0.5(1 + \xi))^p - 0.5(1 + \xi), \quad p = 2, 3, \dots, n_c - 1$$

$$n_c = np - 1, \quad (9)$$

ahol  $np$  a közelítő polinom legmagasabb hatványa.

A (9) alatti alakfüggvényekből látszik, hogy a (4) alatti első tag az elem hossza mentén az elmozdulás lineáris változását írja le.

Ekkor a csomókörökhöz rendelt approximációs mátrixok és azok helyi koordináta-rendszerbeli deriváltjai  $\mathbf{N}_I = \mathbf{N}_I(\xi) = \begin{bmatrix} N_I(\xi) & 0 \\ 0 & N_I(\xi) \end{bmatrix}, I \rightarrow J$  bevezetésével az alábbiak lesznek

$$\mathbf{G}_I^L(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} N_I F_1 & 0 & N_I F_2 & 0 & N_I F_3 & 0 & N_I F_4 & 0 & \dots & N_I F_{MM} & 0 \\ 0 & N_I F_1 & 0 & N_I F_2 & 0 & N_I F_3 & 0 & N_I F_4 & \dots & 0 & N_I F_{MM} \end{bmatrix} = \\ = [\mathbf{N}_I(\xi) F_1 \quad \mathbf{N}_I(\xi) F_2, \dots, \mathbf{N}_I(\xi) F_i, \dots, \mathbf{N}_I(\xi) F_{MM}] = [\mathbf{G}_1^L(\xi, \zeta) \quad \mathbf{G}_2^L(\xi, \zeta), \dots, \mathbf{G}_i^L(\xi, \zeta), \dots, \mathbf{G}_{MM}^L(\xi, \zeta)], \quad (10)$$

$I \rightarrow J$

$$\mathbf{G}_{I,\xi}^L(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} N_{I,\xi} F_1 & 0 & N_{I,\xi} F_2 & 0 & N_{I,\xi} F_3 & 0 & N_{I,\xi} F_4 & 0 & \dots & N_{I,\xi} F_{MM} & 0 \\ 0 & N_{I,\xi} F_1 & 0 & N_{I,\xi} F_2 & 0 & N_{I,\xi} F_3 & 0 & N_{I,\xi} F_4 & \dots & 0 & N_{I,\xi} F_{MM} \end{bmatrix}, \quad I \rightarrow J,$$

(2,2MM)

$$\mathbf{G}_{I,\zeta}^L(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} N_I F_{1,\zeta} & 0 & N_I F_{2,\zeta} & 0 & N_I F_{3,\zeta} & 0 & N_I F_{4,\zeta} & 0 & \dots & N_I F_{MM,\zeta} & 0 \\ 0 & N_I F_{1,\zeta} & 0 & N_I F_{2,\zeta} & 0 & N_I F_{3,\zeta} & 0 & N_I F_{4,\zeta} & \dots & 0 & N_I F_{MM,\zeta} \end{bmatrix}, \quad I \rightarrow J, \quad (11)$$

(2,2MM)

továbbá a pótlólagos állandókhoz kapcsolt mátrixok

$$\hat{\mathbf{G}}_m(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} N_3 F_m & 0 & N_4 F_m & 0 & \dots & N_{np} F_m & 0 & N_{np+1} F_m & 0 \\ 0 & N_3 F_m & 0 & N_4 F_m & \dots & 0 & N_{np} F_m & 0 & N_{np+1} F_m \end{bmatrix}, m=1, \dots, MM,$$

$$\hat{\mathbf{G}}(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}}_1(\xi, \zeta) & \hat{\mathbf{G}}_2(\xi, \zeta) & \dots & \hat{\mathbf{G}}_i(\xi, \zeta) & \dots & \hat{\mathbf{G}}_{MM}(\xi, \zeta) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

illetve deriváltjaik

$$\hat{\mathbf{G}}_{m,\xi}(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} N_{3,\xi} F_m & 0 & N_{4,\xi} F_m & 0 & \dots & N_{np,\xi} F_m & 0 & N_{np+1,\xi} F_m & 0 \\ 0 & N_{3,\xi} F_m & 0 & N_{4,\xi} F_m & \dots & 0 & N_{np,\xi} F_m & 0 & N_{np+1,\xi} F_m \end{bmatrix}, m=1, \dots, MM,$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{m,\zeta}(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} N_3 F_{m,\zeta} & 0 & N_4 F_{m,\zeta} & 0 & \dots & N_{np} F_{m,\zeta} & 0 & N_{np+1} F_{m,\zeta} & 0 \\ 0 & N_3 F_{m,\zeta} & 0 & N_4 F_{m,\zeta} & \dots & 0 & N_{np} F_{m,\zeta} & 0 & N_{np+1} F_{m,\zeta} \end{bmatrix}, m=1, \dots, MM. \quad (13)$$

Látható, hogy az elmozdulás közelítése alakilag minden  $m$ -nél azonos, a különbséget az  $F_m(\zeta) = (\zeta)^{m-1}$  tag hordozza. Az  $MM$  hierarchikus szint növelésével a héjra vonatkozó megoldás a 3D-s megoldás felé konvergál. A fentiek szerint elemünk az elmozdulás közelítése szempontjából két ( $I$  és  $J$ ) csomópörrel rendelkezik, lásd 1a. ábra, továbbá a belső  $\hat{\mathbf{a}}$  paramétereken keresztül a héj hossza (középvonala) mentén magasabb rendű approximációt is biztosítani tudunk.

A koordináta-rendszerek közötti transzformáció mátrixát jelölje  $\mathbf{T}^{LG}$  (globálisból a helyibe), vagyis a globális rendszerbeli elmozdulás a  $\mathbf{T}^{GL} = (\mathbf{T}^{LG})^{-1}$  figyelembevételével

$$\mathbf{u}_G = \begin{bmatrix} U(\xi, \zeta) \\ W(\xi, \zeta) \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta) \mathbf{u}_L(\xi, \zeta) =$$

$$\mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta) \left\{ \mathbf{G}^L(\xi, \zeta) \left\langle \mathbf{T}_I^{LG} \mathbf{T}_I^{LG}, \dots, \mathbf{T}_J^{LG} \mathbf{T}_J^{LG} \right\rangle \mathbf{q}^G + \hat{\mathbf{G}}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{a}} \right\},$$

$$\mathbf{u}_G(\xi, \zeta) = \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta) \left( \mathbf{G}^L(\xi, \zeta) \mathbf{T}_{IJ}^{LG} \mathbf{q}^G + \hat{\mathbf{G}}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{a}} \right) = \mathbf{G}^G(\xi, \zeta) \mathbf{q}^G + \hat{\mathbf{G}}^G \hat{\mathbf{a}}, \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_U^{GT} \\ \mathbf{g}_W^{GT} \end{bmatrix} \mathbf{q}^G + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_U^{GT} \\ \hat{\mathbf{g}}_W^{GT} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{a}},$$

$$\mathbf{q}_I^{G,T} = \left[ U^{m=1}, W^{m=1}; U^{m=2}, W^{m=2}; \dots; U^{m=i}, W^{m=i}; \dots; U^{m=MM}, W^{m=MM} \right]_I, \quad I \rightarrow J,$$

$$\mathbf{q}^{G,T} = \left[ \mathbf{q}_I^{G,T} \quad \mathbf{q}_J^{G,T} \right], \mathbf{u}_{G,I} = \mathbf{T}^{GL} \mathbf{u}_{L,I}.$$

Itt

$$\mathbf{T}_{IJ}^{LG} = \left\langle \underbrace{\mathbf{T}_I^{LG}, \dots, \mathbf{T}_I^{LG}}_{MM}, \dots, \underbrace{\mathbf{T}_J^{LG}, \dots, \mathbf{T}_J^{LG}}_{MM} \right\rangle \text{kvázidiagonál mátrixot, } T \text{ transzponálást jelöl,}$$

$\mathbf{T}_I^{LG}$ -t az  $I$  csomópörnél számoljuk. A feladathoz tartozó, egy elemhez rendelt ismeretlen paraméterek száma:  $n_{ismeretlen}^{elem} = 4MM + 2(p-1)MM = (4 + 2(p-1))MM$ .

Az  $r_k = 0.5(r_{1-2} + r_{4-3})$  középvonalon véve a  $\mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$  elemeinek  $(\sin \alpha = z / r_k, \cos \alpha = x / r_k)$  deriváltját, (2) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sin \alpha_{,\xi} &= -\alpha_d \cos(\alpha_k - \xi \alpha_d), \cos \alpha_{,\xi} = +\alpha_d \sin(\alpha_k - \xi \alpha_d), \\ \sin \alpha_{,\zeta} &= 0.5b \sin(\alpha_k - \xi \alpha_d) / r_k, \cos \alpha_{,\zeta} = 0.5b \cos(\alpha_k - \xi \alpha_d) / r_k. \end{aligned} \quad (15)$$

Mivel  $\mathbf{u}_G(\xi, \zeta) = \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta) \mathbf{u}_L(\xi, \zeta)$ , ezért ennek helyi rendszerbeli deriváltjai

$$\frac{\partial \mathbf{u}_G(\xi, \zeta)}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \mathbf{u}_L(\xi, \zeta) + \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta) \frac{\partial \mathbf{u}_L(\xi, \zeta)}{\partial \xi}, \quad \xi \Rightarrow \zeta. \quad (16)$$

vagyis részletesebben

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_G(\xi, \zeta)}{\partial \xi} &= \left( \frac{\partial \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \mathbf{G}^L(\xi, \zeta) + \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta) \mathbf{G}_{,\xi}^L(\xi, \zeta) \right) \mathbf{T}_{LL}^{LG} \mathbf{q}^G \\ &\quad + \left( \frac{\partial \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \hat{\mathbf{G}}(\xi, \zeta) + \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{G}}_{,\xi}(\xi, \zeta) \right) \hat{\mathbf{a}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_G(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} &= \left( \frac{\partial \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \mathbf{G}^L(\xi, \zeta) + \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta) \mathbf{G}_{,\zeta}^L(\xi, \zeta) \right) \mathbf{T}_{LL}^{LG} \mathbf{q}^G \\ &\quad + \left( \frac{\partial \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \hat{\mathbf{G}}(\xi, \zeta) + \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{G}}_{,\zeta}(\xi, \zeta) \right) \hat{\mathbf{a}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_G(\xi, \zeta)}{\partial \xi} &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{U,\xi}^T \\ \mathbf{g}_{W,\xi}^T \end{bmatrix} \mathbf{q}^G + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_{U,\xi}^T \\ \hat{\mathbf{g}}_{W,\xi}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_G(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{U,\zeta}^T \\ \mathbf{g}_{W,\zeta}^T \end{bmatrix} \mathbf{q}^G + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_{U,\zeta}^T \\ \hat{\mathbf{g}}_{W,\zeta}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}. \end{aligned} \quad (17)$$

A kapott vektorok első tagjai  $U_{,\xi}, U_{,\zeta}$ -nek, ill. a második tagjai  $W_{,\xi}, W_{,\zeta}$ -nek felelnek meg.

Tengelyszimmetrikus alakváltozáskor (Szabó és Babuska, 2011) kis elmozdulásánál és alakváltozásnál forgástestek esetén az alakváltozási vektor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{,r} \\ W_{,z} \\ U / r \\ U_{,z} + W_{,r} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Itt  $U_{,r} = \partial U / \partial r$ ,  $U_{,z} = \partial U / \partial z$  stb. deriválást jelöli. Láthatóan az elmozdulások  $r$  sugár és forgástengely-irányú  $z$  szerinti deriváltjára van szükség.

Az  $[U_{,\xi} \ U_{,\zeta} \ W_{,\xi} \ W_{,\zeta}]$  deriváltak (16) szerint számíthatók, majd a  $\mathbf{J}$  Jacobi-mátrix segítségével (Szabó és Babuska, 2011; Páczelt, 1999) a globális deriváltak  $[U_{,r} \ U_{,z} \ W_{,r} \ W_{,z}] \cdot \left( \begin{bmatrix} U_{,r} \\ U_{,z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} U_{,\xi} \\ U_{,\zeta} \end{bmatrix} \right)$ , azaz

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_{,r} \\ U_{,z} \end{bmatrix} &= \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} U_{,\xi} \\ U_{,\zeta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{U,\xi}^T \\ \mathbf{g}_{U,\zeta}^T \end{bmatrix} \mathbf{q}^G + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_{U,\xi}^T \\ \hat{\mathbf{g}}_{U,\zeta}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{U1}^T \\ \mathbf{h}_{U2}^T \end{bmatrix} \mathbf{q}^G + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{U1}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{U2}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}, \\ \begin{bmatrix} W_{,r} \\ W_{,z} \end{bmatrix} &= \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} W_{,\xi} \\ W_{,\zeta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{W,\xi}^T \\ \mathbf{g}_{W,\zeta}^T \end{bmatrix} \mathbf{q}^G + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_{W,\xi}^T \\ \hat{\mathbf{g}}_{W,\zeta}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{W1}^T \\ \mathbf{h}_{W2}^T \end{bmatrix} \mathbf{q}^G + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{W1}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{W2}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Mivel a Jacobi mátrix  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$ , ezért a deriváltak közötti alábbi ismert összefüggés áll fenn

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

A kapott (16) alatti deriváltakkal az alakváltozási vektor (Páczelt, 1999)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{,r} \\ W_{,z} \\ U/r \\ U_{,z} + W_{,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{U1}^T \\ \mathbf{h}_{W2}^T \\ \mathbf{g}_U^{GT}/r \\ \mathbf{h}_{U2}^T + \mathbf{h}_{W1}^T \end{bmatrix} \mathbf{q}^G + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{U1}^T \\ \hat{\mathbf{h}}_{W2}^T \\ \hat{\mathbf{g}}_U^{GT}/r \\ \hat{\mathbf{h}}_{U2}^T + \hat{\mathbf{h}}_{W1}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{B}(\xi, \zeta) \mathbf{q}^G + \hat{\mathbf{B}}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{a}} \quad (21)$$

alakban írható fel. Homogén, izotrop anyagnál ( $E$  – Young-modulus,  $\nu$  – Poissontényező) az anyagállandók mátrixa:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Az elem  $\mathbf{K}$  merevségi mátrixa

$$\left[ \mathbf{q}^{G,T} \hat{\mathbf{a}}^T \right] \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^G \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\mathbf{B}(\xi, \zeta) \mathbf{q}^G + \hat{\mathbf{B}}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{a}})^T \mathbf{D} (\mathbf{B}(\xi, \zeta) \mathbf{q}^G + \hat{\mathbf{B}}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{a}}) \det \mathbf{J} d\xi d\zeta \quad (23)$$

energiából nyerhető, amit felhasználva az  $\hat{\mathbf{a}}$  a szokásos módon az egyensúlyi egyenletből elemi szinten eliminálható (Páczelt, 1999; Béda és Kozák, 1987).

Az  $r_{1-2}$  sugarú felületen a  $p_o$  intenzitású nyomásból kapott munkából

$$\left[ \mathbf{q}^{G,T} \hat{\mathbf{a}}^T \right] \mathbf{f} = \int_{-1}^{+1} (\mathbf{G}^G(\xi, \zeta = -1) \mathbf{q}^G + \hat{\mathbf{G}}^G(\xi, \zeta = -1) \hat{\mathbf{a}})^T \mathbf{p}^G 2\pi r \det \mathbf{J}_\Gamma d\xi \quad (24)$$

az  $\mathbf{f}$  redukált terhelési vektor vezethető le.

Itt  $\det \mathbf{J}_\Gamma = r_{1-2} \alpha_d$ ,  $\mathbf{p}^{GT} = p_o [\cos \alpha \quad \sin \alpha]$ ,  $r = r_{1-2} \cos \alpha$ .

### 3. Forgáshéjakra vonatkozó számpéldák

#### 3.1. Hengeres héj példája

Vizsgáljuk a 2. ábrán vázolt rugalmas hengerszerkezetet, ami egy vastag falú hengeres héjnak is tekinthető. Rugalmassági tényező:  $E = 200 \text{ GPa}$ , Poisson tényező  $\nu = 0,3$ . Terhelés  $\bar{p} = p_o = 20,0 \text{ MPa}$  belső nyomás. A henger felső felületén a  $z$  tengelyirányú elmozdulás zérus.

Vékonyhéj-elméletet használ a (Herpai és Páczelt, 1977; Páczelt, 1980) cikk  $p$  verziós számítását lehetővé téve. Itt most a számításokat a fent ismertetett különböző hierarchikus modellel ( $MM = 2, \dots, 9$ ) fogjuk elvégezni, a testet egy elemmel modellezve.

A fenti képletekben  $\alpha = 0$ ,  $\mathbf{T}^{GL}$ ,  $\mathbf{T}^{LG}$  transzformációs mátrixok állandóak, így  $\xi$  és  $\zeta$

szerinti deriváltjuk zérus. A Jacobi mátrix  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -45 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\det \mathbf{J} = 900$ ,

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial r} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -2,2222 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} \quad \mathbf{T}^{GL} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{LG} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$n_c = 0$  ( $np = 1$ ) mellett végeztük el a számításokat, így az összes ismeretlen szám  $NDOF = 4 \cdot MM$ . Különböző hierarchikus szinteken kapott radiális elmozdulások az  $r_b$  és sugarú helyeken a 2c. ábrán láthatóak, míg az alsó  $z = 0$  síkfelület  $z$  irányú elmozdulásának  $m = MM$  függvényeként észlelt változását a 2d. ábra tünteti fel. A megoldás konvergenciája nagyon jól látszik. A  $\sigma_\varphi$  és  $\sigma_r$  feszültségek konvergencia diagramjait a 3. ábra tartalmazza. A  $\sigma_\varphi$  és  $\sigma_r$   $rz$  sík feletti megoszlása a 4a,b. ábrákon látható. A mutatott feszültségek a  $z$ -ben nem változnak. Közelítő megoldás ellenére az  $r_b$  felületen a  $\sigma_r = -p_o$  feltétel is nagyon jól kielégül.

Ugyanezen testet úgy is megvizsgáltuk, hogy a  $z = 0$  felületen is előírtuk a  $z$  irányú elmozdulás zérusértékét. A megoldásban minden  $z$  sík pontjai csak saját síkjukban mozognak. A radiális elmozdulások kevesebbek, mint az előző megtámasztásnál kaptak. Pl.  $z = 25 \text{ mm}$ -nél  $u_r = u_r(u_z = 0 \text{ a peremeken}) = 0,0040399$ , míg  $u_r = u_r(u_z = 0 \text{ csak a } z = 90 \text{ peremen}) = 0,0041181 \text{ mm}$ .

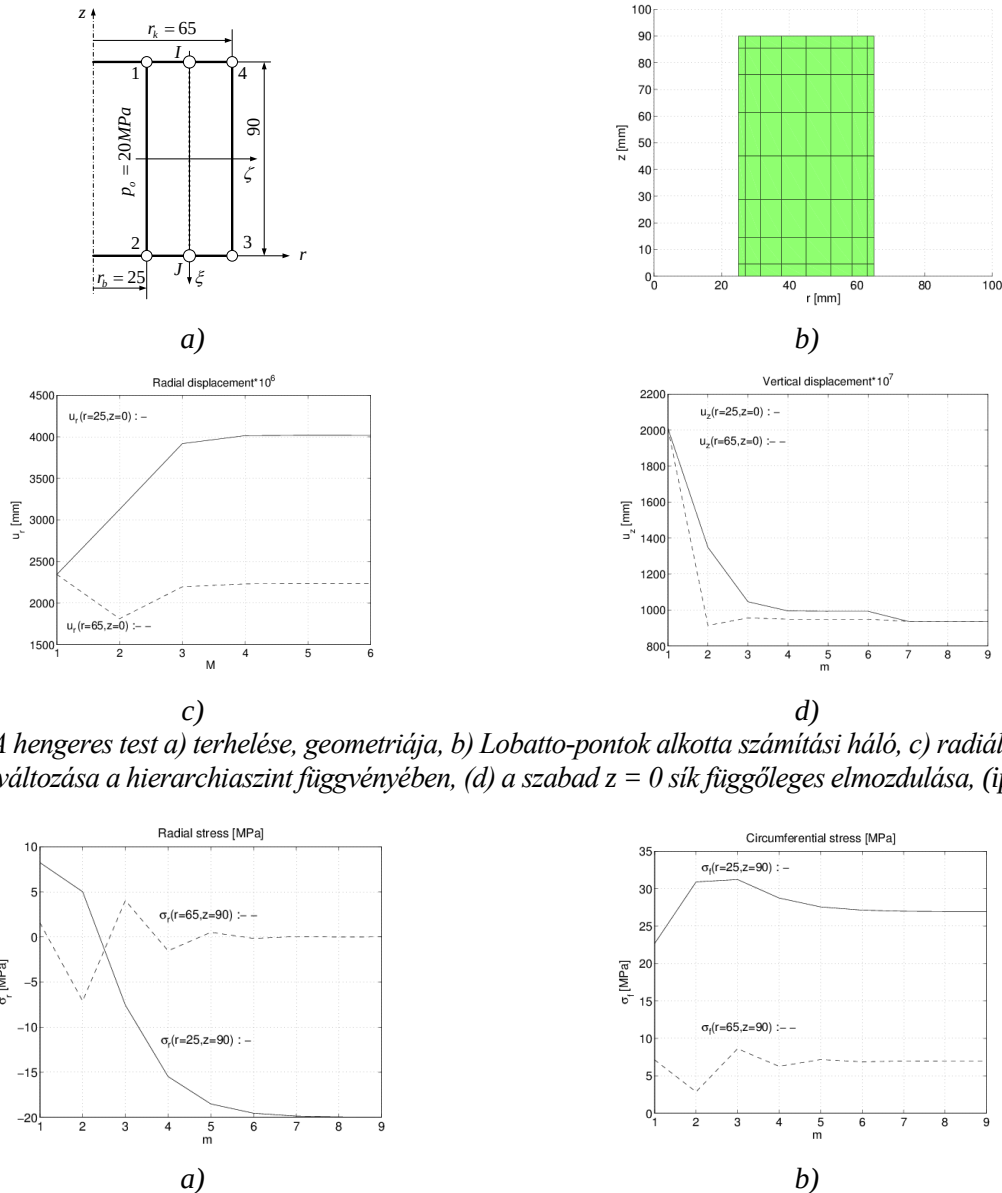
ABAQUS programmal ([www.abaqus.com](http://www.abaqus.com)) is megnéztük a feladatot *SAX8R – 8 csomópontú tengelyszimmetrikus elem, 8 x 18 elemes felosztással*. Kaptuk, hogy  $\sigma_\varphi(r_b) = 26,59 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_\varphi(r_k) = 6,93 \text{ MPa}$ . StressCheck programmal (<https://esrd.com>),  $p$  verziós elemekkel,  $p=8$  -nál,  $\sigma_\varphi(r_b) = 26,95 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_\varphi(r_k) = 6,946 \text{ MPa}$ . A rugalmasságtani elméleti megoldás (síkalakváltozást feltételezve) vastagsőre  $\sigma_\varphi(r_b) = 26,94 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_\varphi(r_k) = 6,94 \text{ MPa}$ .

Elvileg a  $z$  irányú normál feszültség zérus, ez is jó közelítéssel fennáll, lásd 4 c. ábra.

A feszültségek konvergenciáját tartalmazza az 1. táblázat. Jól látható, hogy egy elem felvételével a StressCheck program  $p=8$ -nál, product térnél / által kapott eredményeket kevesebb ismeretlen felvételével a mi hierarchikus modellünk szolgáltatja.

Különböző falvastagságnál kapott  $\sigma_\varphi$  feszültségeket tartalmazza a 2. táblázat  $MM = 2$  és  $MM = 9$  esetén az  $ipolt = -1$  irányfüggvényeknél.  $MM$  hatása jelentős,  $MM = 9$  mellett a hierarchikus modell eredményei azonosak az elméletiekkel. Itt  $\sigma_\varphi(elmélet)$  a vastag falú cső rugalmasságtani analitikus megoldása  $r_b = 25$ ,  $r_k = 65$ ;  $r_b = 30$ ,  $r_k = 60$  stb. belső, külső sugár pároknál.

Következtetés:  $MM$  növelésével konvergens megoldáshoz jutunk, vagyis a modellünk biztosítja az elmélet által kiszámolt értékeket.

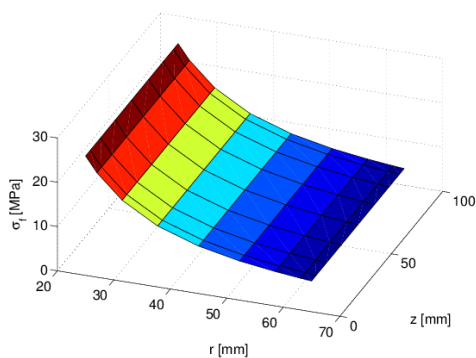


**2. ábra.** A hengeres test a) terhelése, geometriája, b) Lobatto-pontok alkotta számítási háló, c) radiális elmozdulások változása a hierarchiaszint függvényében, (d) a szabad  $z = 0$  sík függőleges elmozdulása, (ipolt = 0)

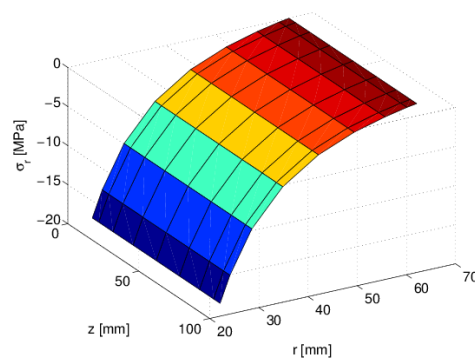
**3. ábra.** A hengeres testben feszültségek konvergenciája az  $m = MM$  függvényeként, a)  $\sigma_r$  radiális feszültség, b) a  $\sigma_\varphi$  körirányú feszültség vonatkozásában, (ipolt = 0)

1. táblázat. Feszültségek konvergenciája ( $np = 1$ )

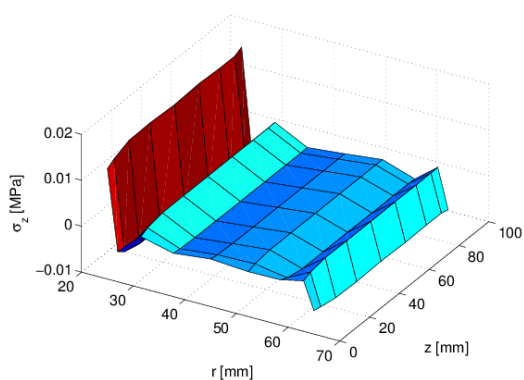
| StressCheck<br>$p$ ,<br>$NDF$ | $MM$ ,<br>(Hierar) | $NDF = 4MM$ | $\sigma_\phi(r_b = 25)$ [MPa] |        | $\sigma_r(r_b = 25)$ [MPa] |        |
|-------------------------------|--------------------|-------------|-------------------------------|--------|----------------------------|--------|
|                               |                    |             | StressCheck                   | Hierar | StressCheck                | Hierar |
| 2                             |                    | 3           |                               | 32,21  |                            | -8,031 |
| 3                             | 28                 | 4           | 28,7749                       | 28,76  | -15,692                    | -15,85 |
| 4                             | 45                 | 5           | 27,5821                       | 27,56  | -18,563                    | -18,54 |
| 5                             | 66                 | 6           | 27,1377                       | 27,14  | -19,563                    | -19,55 |
| 6                             | 91                 | 7           | 27,0034                       | 27,00  | -19,871                    | -19,87 |
| 7                             | 120                | 8           | 26,9610                       | 26,96  | -19,963                    | -19,96 |
| 8                             | 153                | 9           | 26,9492                       | 26,95  | -19,990                    | -19,99 |



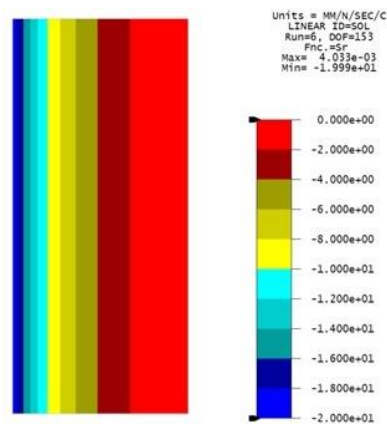
a)



b)

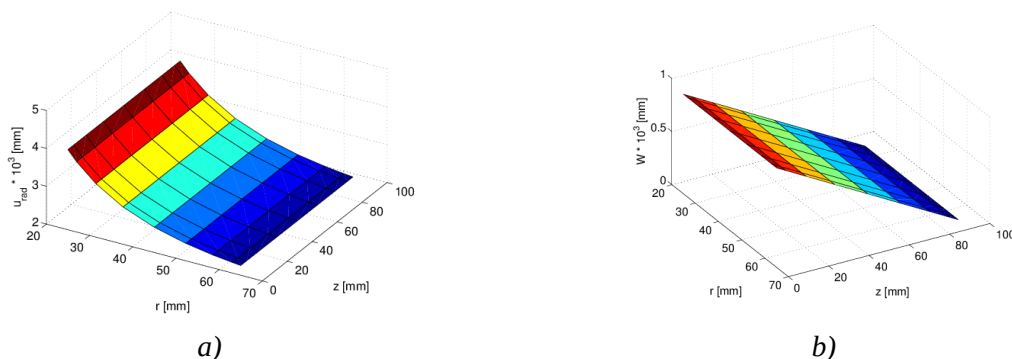


c)



d)

4. ábra. Feszültségek változása 8 hierarchikus szinten: a)  $\sigma_\phi$  változása ( $\sigma_\phi(r_b) = 26,96$  MPa), b)  $\sigma_r$  változása ( $\sigma_r(r_b) = -19,96$  MPa), c)  $\sigma_z$  változása, ( $MM = 8$ ,  $ipolt = 0$ ), d)  $p = 8$ -nál a StressCheck által számított  $\sigma_r$  feszültségek



5. ábra. Elmozdulások: a) radiális irányban, b) axiális irányban ( $MM = 8$ ,  $ipolt = 0$ )

2. táblázat.  $\sigma_\varphi$  [MPa] feszültségek különböző falvastagságnál

| Sugarak    | $\sigma_\varphi$<br>$MM = 2$ | $\sigma_\varphi$<br>$MM = 9$ | $\sigma_\varphi$ (elmélet) | Sugarak    | $\sigma_\varphi$<br>$MM = 2$ | $\sigma_\varphi$<br>$MM = 9$ | $\sigma_\varphi$ (elmélet) |
|------------|------------------------------|------------------------------|----------------------------|------------|------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| $r_b = 25$ | 32,38                        | 26,95                        | 26,944                     | $r_b = 30$ | 40,31                        | 33,33                        | 33,33                      |
| $r_k = 65$ | 3,831                        | 6,946                        | 6,944                      | $r_k = 60$ | 9,029                        | 13,33                        | 13,33                      |
| $r_b = 35$ | 55,02                        | 47,22                        | 47,22                      | $r_b = 40$ | 99,05                        | 91,11                        | 91,11                      |
| $r_k = 55$ | 21,70                        | 27,22                        | 27,22                      | $r_k = 50$ | 64,47                        | 71,11                        | 71,11                      |

### 3.2. Kúpos héjak példája

#### 3.2.1. Kúpos héj 1

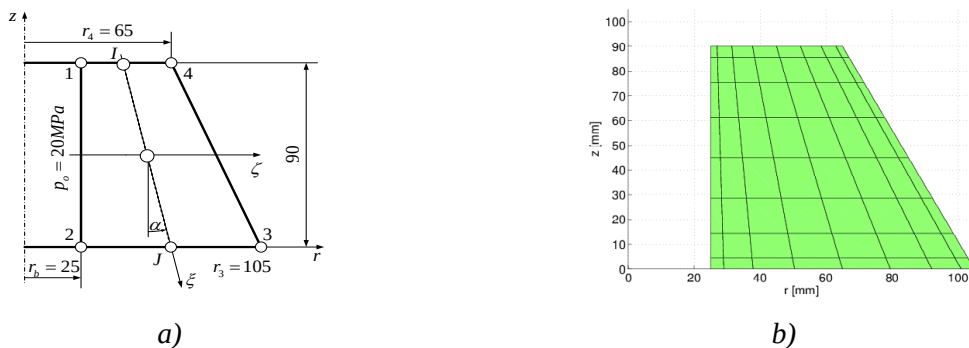
Vizsgáljuk a 6. ábrán vázolt tengelyszimmetrikus testet.

Itt a képvonalon  $\tan \alpha_k = 20/90$ , míg a többi helyen

$$\alpha = \arctan \frac{(0,5 \cdot ((r_3 - r_2) - (r_4 - r_1)) \cdot (1 + \zeta))}{z_1} \equiv \arctan(\lambda(\zeta)), \quad -1 \leq \zeta \leq 1. \text{ Ha az } \alpha \text{ a } \zeta \text{ függvénye, akkor}$$

szükség van ennek a deriváltjára:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \arctan \lambda(\zeta) \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} = \frac{1}{1 + \lambda^2} \frac{0,5(r_3 - r_4)}{z_1}.$$



6. ábra. Kúpos héj a) geometriája, b) koordinátavonalak a Lobatto-integrálásnál

Mivel a helyi  $\xi\zeta$  koordináta-rendszer ferdeszögű ezért külön megfontolást igényel az  $r\zeta$  és a  $\xi\zeta$  rendszerekben értelmezett elmozdulások transzformálása.

Legyenek a  $\xi$  és  $\zeta$  tengelyek irányában felvett bázisvektorok  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ . Ekkor

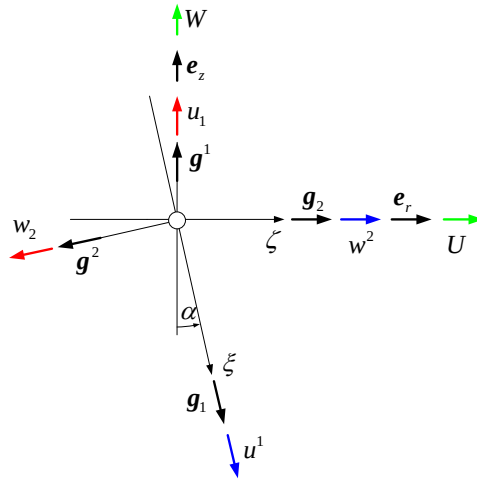
$$\mathbf{g}_1 = \sin \alpha \mathbf{e}_r - \cos \alpha \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_y.$$

Az elmozdulásmezők:  $\mathbf{u}_G = U\mathbf{e}_r + W\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{u}_L = u^1\mathbf{g}_1 + w^2\mathbf{g}_2$ ,  $\mathbf{u}_{L,rb} = u_1\mathbf{g}^1 + w_2\mathbf{g}^2$ .

A reciprok bázisvektorok az alábbiak

$$\mathbf{g}^1 = \frac{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3}{\gamma_0} = \frac{\mathbf{e}_z}{\gamma_0}, \quad \mathbf{g}^2 = \frac{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1}{\gamma_0} = \frac{-\sin \alpha \mathbf{e}_z - \cos \alpha \mathbf{e}_r}{\gamma_0}, \quad \mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\gamma_0} = -\frac{\cos \alpha \mathbf{e}_y}{\gamma_0},$$

ahol  $\gamma_0 = \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) = -\cos \alpha$ .



**7. ábra.** Koordináta-rendszerek és az elmozdulások értelmezése ( $\mathbf{g}_1$ -et a numerikus Lobatto féle integrálás  $\zeta = 0$  koordinátavonala jelöli ki).

Ily módon a 7. ábra felhasználásával

$$u^1 = U \sin \alpha - W \cos \alpha, \quad w^2 = U, \quad \text{továbbá} \quad u_1 = -u^1 \cos \alpha, \quad w_2 = -w^2 \cos \alpha.$$

Ebből következik, hogy a globális elmozdulások és a reciprok bázison értelmezettek között állnak az alábbiak:

$$\mathbf{u}_{L,rb} = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \begin{bmatrix} -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \\ -\cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{LG} \mathbf{q},$$

illetve a reciprok bázison kapottaknak a globálisba való visszavitelét az alábbi transzformáció szolgáltatja:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}^{GL} \mathbf{u}_{L,rb} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \alpha \\ 1 & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}.$$

Természetesen fennáll  $\mathbf{T}^{GL}\mathbf{T}^{LG} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  eredmény, az elmondottakat igazoló egyenlőség.

Különböző  $MM$  és  $np$  értékeknél lefuttatott programunk által kapott eredmények konvergenciáját jól érzékeltetik a 3. és 4. táblázatba foglalt adatok. Jól látható, hogy  $MM = 6$  és  $np = 5$  felett már az eredmények lényegesen nem változnak, bár a radiális feszültségnél a dinamikai peremfeltétel csak az  $MM = 8$ -nál elégül ki.

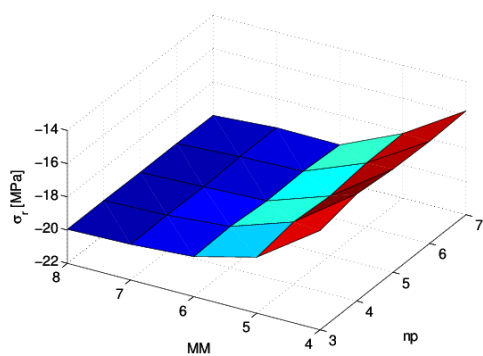
3. táblázat.  $\sigma_r(r = 25, z = 90)$  [MPa]

| $MM$ | $np = 3$ | $np = 4$ | $np = 5$ | $np = 6$ | $np = 7$ |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 4    | -16,024  | -15,562  | -15,783  | -15,845  | -15,752  |
| 5    | -18,629  | -18,246  | -18,414  | -18,154  | -18,114  |
| 6    | -19,598  | -19,511  | -19,700  | -19,645  | -19,792  |
| 7    | -19,854  | -19,824  | -19,860  | -19,769  | -19,759  |
| 8    | -19,951  | -19,950  | -19,982  | -19,979  | -20,027  |

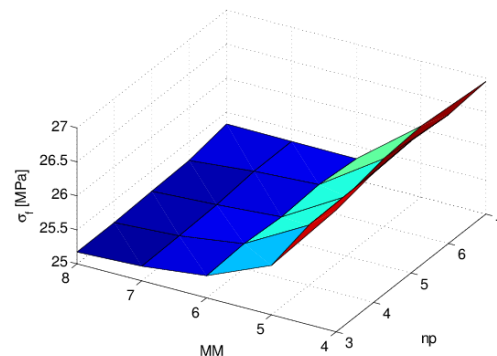
A potenciális energia az 5. táblázat szerint változik az  $MM$  és  $np$  választásától függően. A konvergencia felület a 8c. ábrán látható. A potenciális energiát az  $r = r_1$  sugarú felületen ható  $p_o$  nyomás munkájából számoltuk ki az  $U(r_1, z_2 \leq z \leq z_1)$  radiális elmozdulás segítségével, numerikus integrálás révén.

4. táblázat.  $\sigma_\phi(r = 25, z = 90)$  [MPa].

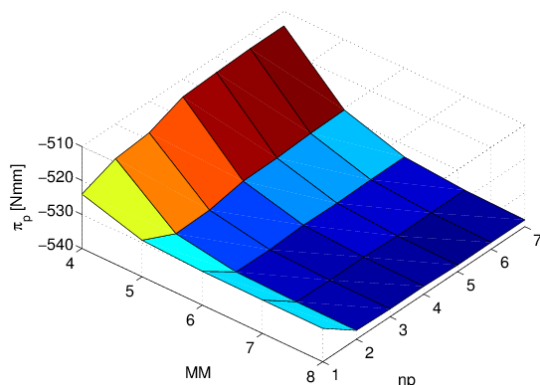
| $MM$ | $np = 3$ | $np = 4$ | $np = 5$ | $np = 6$ | $np = 7$ |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 4    | 26,792   | 26,909   | 26,943   | 26,895   | 26,950   |
| 5    | 25,727   | 25,886   | 25,877   | 25,998   | 26,044   |
| 6    | 25,326   | 25,364   | 25,325   | 25,368   | 25,314   |
| 7    | 25,215   | 25,230   | 25,254   | 25,314   | 25,320   |
| 8    | 25,174   | 25,175   | 25,202   | 25,223   | 25,326   |



a)



b)



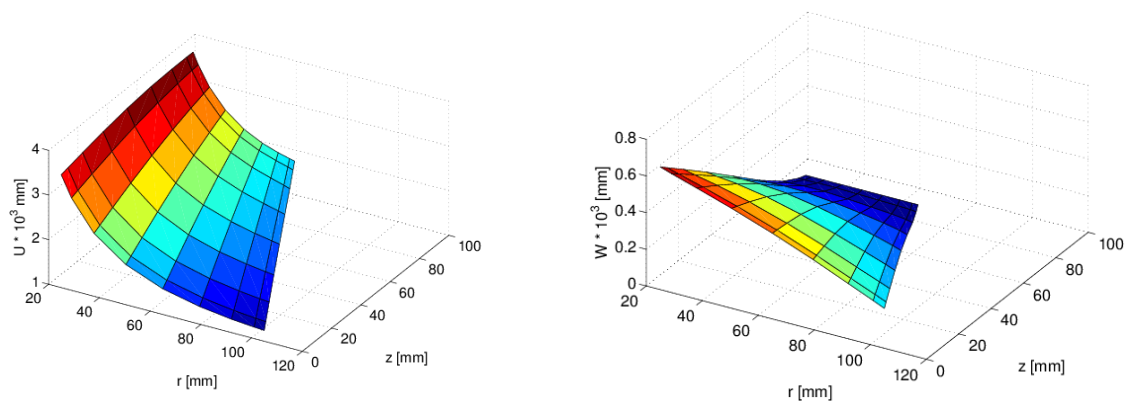
c)

**8. ábra.** Konvergencia felületek a  $\sigma_r(r=25, z=90)$  és a  $\sigma_\varphi(r=25, z=90)$  feszültségekkel és a potenciális energiával kapcsolatosan

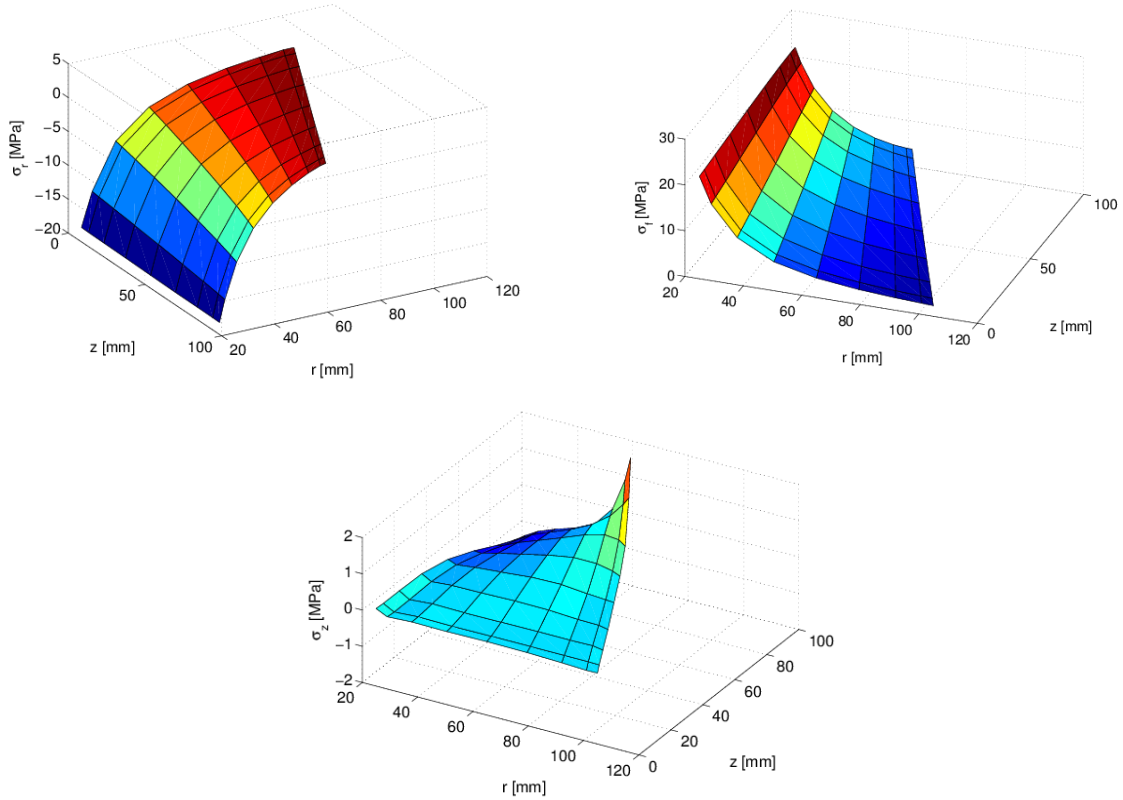
**5. táblázat.**  $\Pi_p$  [Nmm]

| MM | np = 1  | np = 2  | np = 3  | np = 4  | np = 5  | np = 6  | np = 7  |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 4  | -524,03 | -520,23 | -519,21 | -515,29 | -514,74 | -514,32 | -514,28 |
| 5  | -529,24 | -533,95 | -533,63 | -531,75 | -531,55 | -530,95 | -530,67 |
| 6  | -530,04 | -536,85 | -536,95 | -536,36 | -536,52 | -536,23 | -536,18 |
| 7  | -530,16 | -537,30 | -537,59 | -537,40 | -537,80 | -537,65 | -537,61 |
| 8  | -530,17 | -537,36 | -537,70 | -537,67 | -538,06 | -538,01 | -538,01 |

Az  $MM = 8$ ,  $np = 5$  esetén kapott elmozdulás mezőket a 9. ábra, a feszültségeket a 10. ábra tartalmazza.



**9. ábra.** Az elmozdulásmezők  $r$  és  $z$  irányú  $U$ ,  $W$  skalár koordinátái.



**10. ábra.** Normálfeszültségek megoszlása az  $rz$  meridián síkban

Amennyiben a kúp felső és alsó felületén a függőleges elmozdulás zérusra van előírva, akkor a  $MM = 8$ ,  $np = 5$  esetén kapott feszültségek lefutása a 11. ábrán bemutatott módon változik.

A kúpos test kétfajta megfogása az elmozdulásmezők és a feszültségmezők különbözőségét okozza. Különösen jól látható ez a  $z$  irányú normálfeszültség lefutásában.

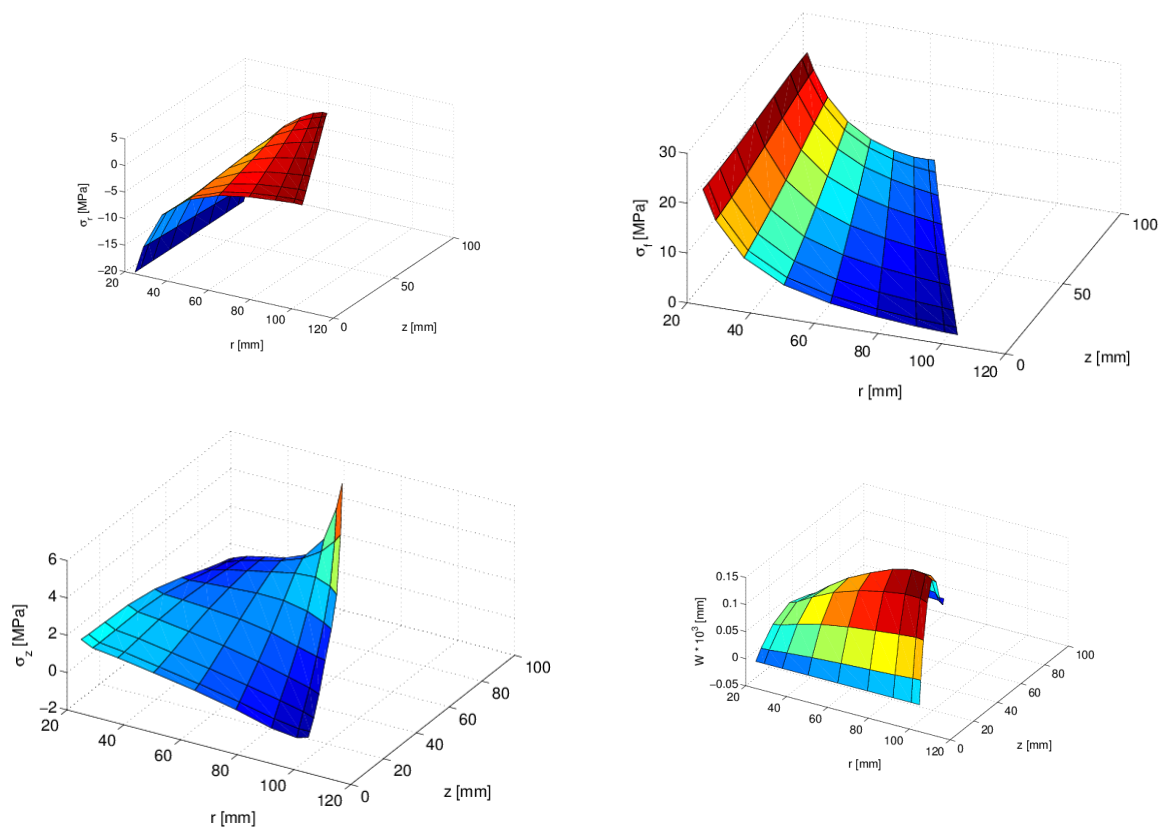
A kúpos héj  $Z = 90$  es peremének függőleges megfogásánál a *StressCheck* programmal kapott eredményeket az alábbi 12. ábra mutatja.

Konvergencia az  $r = 25$ ,  $z = 90$  helyen számolt körirányú feszültségre vonatkozóan a 13. ábrán látható.

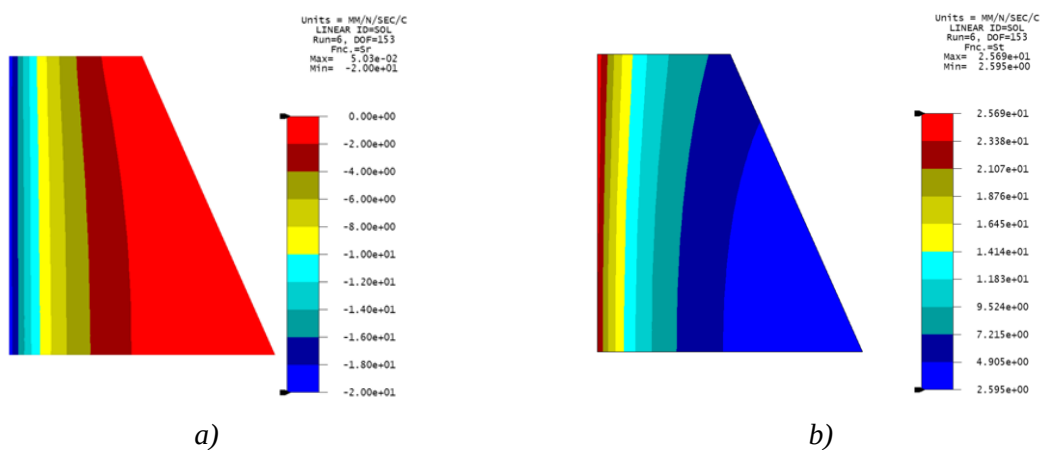
Összehasonlítva a saját eredményünket a *StressCheck* által kapottakkal, a hiba mértéke

$$\begin{aligned} \text{error} &= 100 \frac{\sigma_{\varphi}(r = 25, z = 90, \text{StressCheck}) - \sigma_{\varphi}(r = 25, z = 90, MM = 8, np = 7)}{\sigma_{\varphi}(r = 25, z = 90, \text{StressCheck})} \\ &= 100 \frac{25,694 - 25,326}{25,694} = 1,43\% \end{aligned}$$

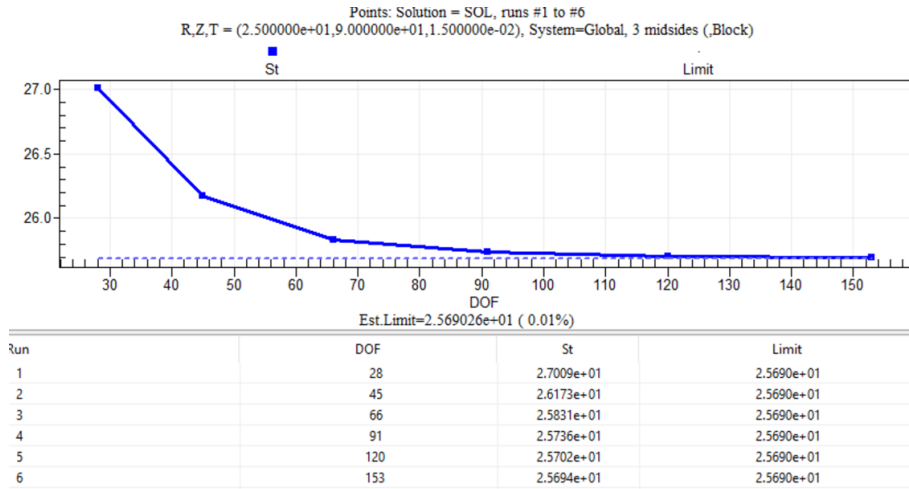
ami azt hangsúlyozza, hogy a hierarchikus modell is igen jó közelítéssel oldotta meg a feladatot. Az ismeretlenek száma 153 (*StressCheck*) ill. 128 (*Hierar*).



**11. ábra.** Normál feszültségek és  $z$  irányú elmozdulásmező megoszlása az  $rz$  meridián síkban alsó és felső peremek zérus függőleges elmozdulásakor ( $MM = 8$ ,  $np = 5$ )



**12. ábra.** Radiális és körirányú feszültségek  $p$  verziós véges elemmel számolva,  $p = 8$



13. ábra.  $\sigma_\phi(r = 25, z = 90)$  konvergenciája  $3 \leq p \leq 8$  polinom foksámoknál

### 3.2.2. Kúpos héj 2

Vizsgáljuk a 14. ábrán vázolt szerkezetet. Ellentétben a Kúpos héj 1-gyel itt az 1-es, 2-es peremeken a feszültségállapot szingularitással rendelkezik. Az  $I$ - $J$  alkotta középfelületre merőlegesen alkalmazott  $F_m(\zeta)$  tag pedig a héj vastagsága menti elmozdulás megoszlását van hivatva befolyásolni.

A megoldás folyamán az  $np$  a középfelület elmozdulásmezijénél használt polinom foksámát adja meg, a hierarchikus szinteket az  $m = 1, \dots, MM$  tagok képviselik a (4)–(13) -es összefüggésekben. A transzformációs mátrixok

$$\mathbf{T}^{GL} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{LG} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \text{ állandóak, így } \xi \text{ és } \zeta \text{ szerinti deriváltjuk zérus:}$$

Várható, hogy egy elem felvételével a szingularitást nem tudjuk lekezelni.

Ezt jól mutatja a  $\sigma_r$  normál feszültség megoszlása (15a. ábra). Az 1-es és a 2-es csomóköröknél a feszültség megemelkedik, míg a test közepén az lecsökken. Elvileg  $-20 \text{ MPa}$  kellene, hogy legyen a felületi nyomási terhelés miatt.

Konkrét feszültségek és elmozdulások értékeit az  $MM$  és  $np$  függvényeként a 6–10. táblázatok tüntetik fel.

Az elmozdulásra és a  $\sigma_r$ -re vonatkozólag a konvergenciafelületeket a 16. ábra tünteti fel, a  $6 \leq MM$  és  $5 \leq np$  esetekben nincs lényeges változás.

6. táblázat.  $\sigma_r(r = r_1, z = z_1)$  [MPa]

| $MM$ | $np = 3$ | $np = 4$ | $np = 5$ | $np = 6$ | $np = 7$ |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 4    | -16,665  | -15,998  | -15,549  | -14,984  | -14,560  |
| 5    | -19,208  | -19,097  | -18,919  | -18,574  | -17,869  |
| 6    | -20,101  | -20,308  | -20,406  | -20,407  | -19,724  |
| 7    | -20,338  | -20,595  | -20,958  | -21,179  | -20,817  |
| 8    | -20,411  | -20,685  | -21,141  | -21,391  | -21,322  |

7. táblázat.  $\sigma_r(r=r_1, z=0,5(z_1+z_2))$  [MPa]

| MM | $np = 3$ | $np = 4$ | $np = 5$ | $np = 6$ | $np = 7$ |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|
| 4  | -12,678  | -12,376  | -12,322  | -12,459  | -12,477  |
| 5  | -16,383  | -16,193  | -16,186  | -16,369  | -16,330  |
| 6  | -17,956  | -17,805  | -17,734  | -18,011  | -17,879  |
| 7  | -18,614  | -18,488  | -18,274  | -18,664  | -18,425  |
| 8  | -18,866  | -18,743  | -18,403  | -18,869  | -18,545  |

8. táblázat.  $\sigma_\varphi(r=r_1, z=z_1)$  [MPa]

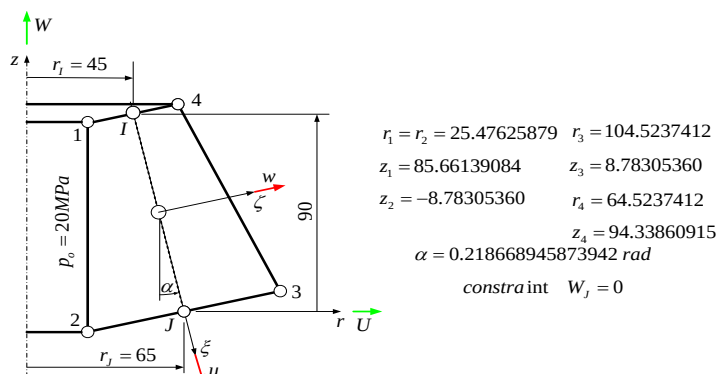
| MM | $np = 3$ | $np = 4$ | $np = 5$ | $np = 6$ | $np = 7$ |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|
| 4  | 19,302   | 19,810   | 19,227   | 19,349   | 19,307   |
| 5  | 18,225   | 18,882   | 17,931   | 18,222   | 18,235   |
| 6  | 17,811   | 18,421   | 17,145   | 17,444   | 17,376   |
| 7  | 17,705   | 18,308   | 16,803   | 17,085   | 16,759   |
| 8  | 17,674   | 18,270   | 16,679   | 16,990   | 16,419   |

9. táblázat.  $\sigma_\varphi(r=r_1, z=0,5(z_1+z_2))$  [MPa]

| MM | $np = 3$ | $np = 4$ | $np = 5$ | $np = 6$ | $np = 7$ |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|
| 4  | 27,512   | 27,355   | 27,302   | 27,306   | 27,313   |
| 5  | 26,083   | 25,923   | 25,834   | 25,816   | 25,838   |
| 6  | 25,427   | 25,256   | 25,168   | 25,126   | 25,188   |
| 7  | 25,147   | 24,968   | 24,923   | 24,845   | 24,963   |
| 8  | 25,040   | 24,859   | 24,862   | 24,757   | 24,921   |

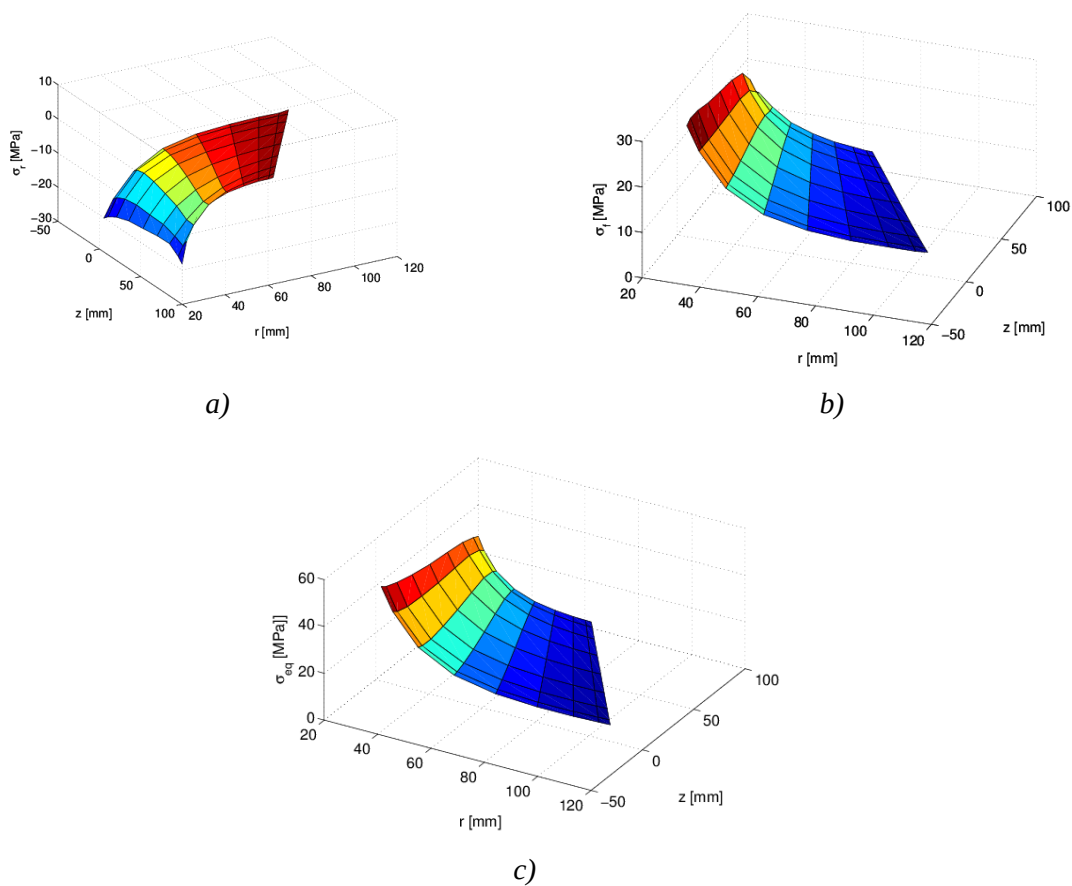
10. táblázat.  $U(r=r_1, z=z_1) \cdot 10^{+7}$  [mm]

| MM | $np = 3$ | $np = 4$ | $np = 5$ | $np = 6$ | $np = 7$ |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|
| 4  | 32437    | 32143    | 31830    | 31707    | 31620    |
| 5  | 32532    | 32324    | 31993    | 31899    | 31779    |
| 6  | 32522    | 32326    | 31995    | 31890    | 31765    |
| 7  | 32517    | 32323    | 31991    | 31866    | 31752    |
| 8  | 32517    | 32323    | 31990    | 31855    | 31751    |

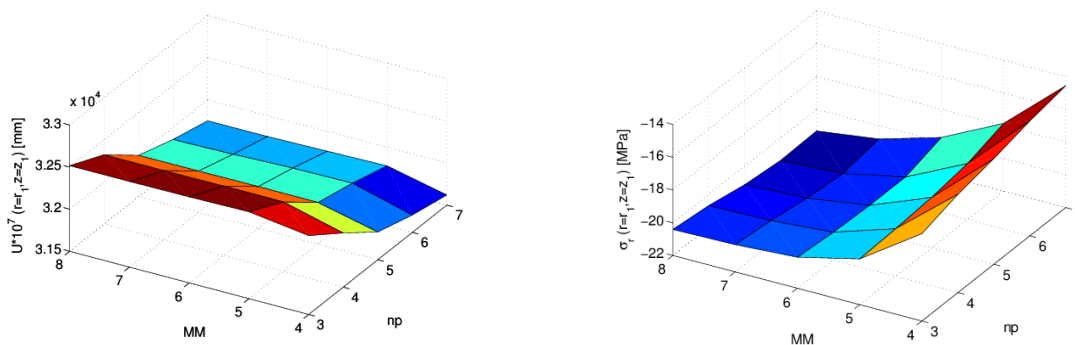


14. ábra. Kúpos héj 2 geometriája, a globális és a helyi rendszerben értelmezett elmozdulások

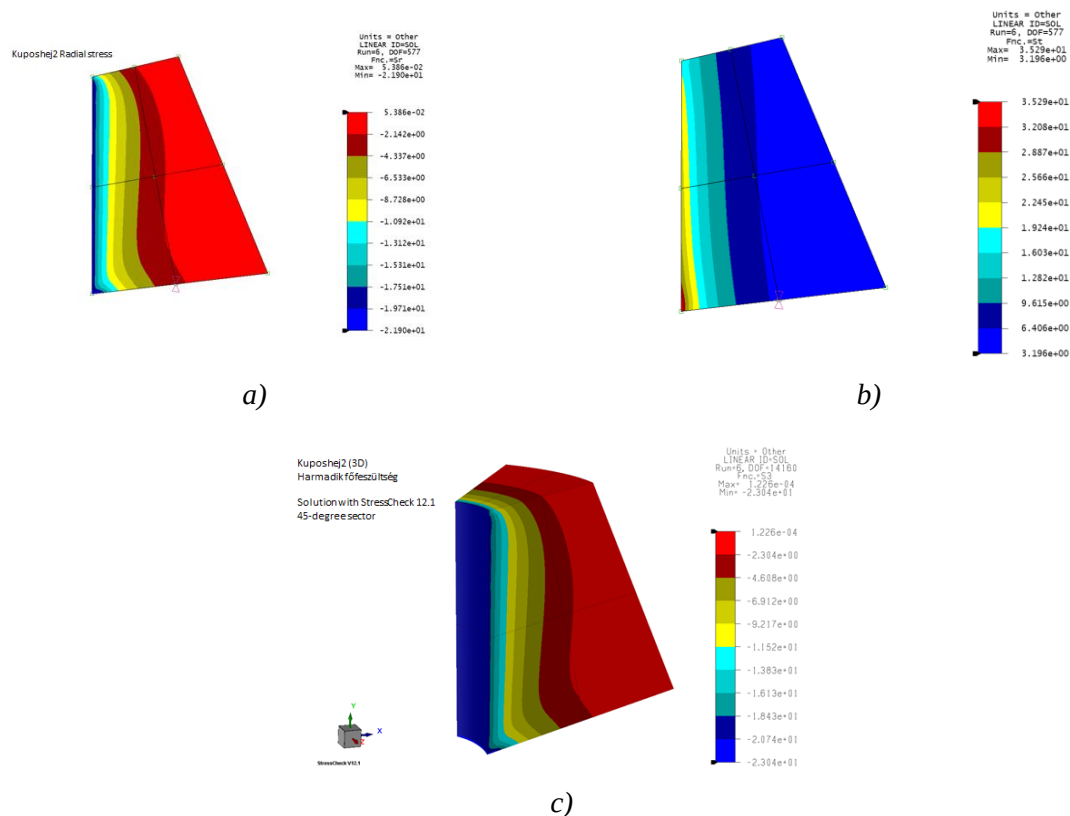
A StressCheck által kiszámolt eredmények a 17. ábrán láthatóak.



15. ábra.  $\sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_{eq}$  feszültségek megoszlása  $MM = 8, np = 5$  értékeknél

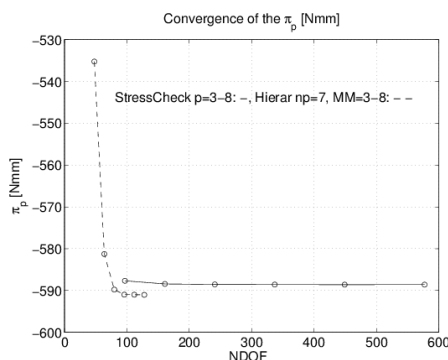


16. ábra. Konvergenciafelületek az  $r$  irányú elmozdulásra és a  $\sigma_r(r=r_1, z=z_1)$  feszültségre



**17. ábra.** Kup2-ben ébredő feszültségek. a) radiális, b) körirányú feszültségek 4 db gyűrű alakú elemmel ( $NDOF = 577$ ), c) hexahedron elemekkel 45-ös szeleten végzett számítás legkisebb főfeszültség megoszlása ( $NDOF = 14168$ )

A kétfajta modellezéssel kapott potenciális energiák konvergenciáját a 18. ábra tünteti fel. A *StressCheck* megbízhatóbb konvergenciája a pontosabb megoldást mutatja. A kétfajta megoldás közötti eltérés kicsiny, 1% környéki. A radiális feszültségekben az 1-2 peremen a  $-20$  MPa-tól való eltérés kb. 7.5%-os, ami rámutat arra, hogy ezzel a modellel szinguláris feszültségállapotot nem lehet megbízhatóan megközelíteni.



**18. ábra.** A kétfajta modellel számolt potenciális energiák konvergenciagörbéi

### 3.3. Vastag falú gömbhéj példája

Vizsgáljuk a 19. ábrán vázolt, a belső gömbfelületen  $p_o = 20$  MPa nyomással terhelt vastag falú héjat. Anyagállandói megegyeznek a 3.1. példában megadottakkal.

Geometriai méretek: belső sugár  $r_b = r_{1-2} = 25$  mm, külső sugár  $r_k = r_{4-3} = 65$  mm.

Geometriai peremfeltételek: radiális elmozdulás zérus a  $z$  tengely mentén, ill. a függőleges elmozdulás a  $z = 0$  tengelyen.

Ismeretes a feladat rugalmasságtani pontos megoldása.

Vagyis bevezetve az alábbi nyomást:  $p_h = p_o r_b^3 / (r_k^3 - r_b^3)$ , a feszültségek

$$\sigma_r(r) = p_h(1 - r_k^3 / r^3), \quad \sigma_\varphi(r) = p_h(1 + r_k^3 / 2r^3)$$

összefüggések szerint változnak, amelyek a belső, külső felületeken

$$\sigma_r(r_b) = -p_o, \quad \sigma_\varphi(r_b) = p_h(1 + r_k^3 / 2r_b^3), \quad \sigma_\varphi(r_k) = -1.5p_h.$$

A sugárirányú elmozdulások a belső és külső felületeken

$$u_r(r_b) = p_h r_b (K + r_k^3 / 4Gr_b^3), \quad u_r(r_k) = p_h r_k (K + 1 / 4G),$$

ahol a szokásos anyagállandók  $G = E / 2(1 + \nu)$ ,  $K = (1 - 2\nu) / 2G(1 + \nu)$ .

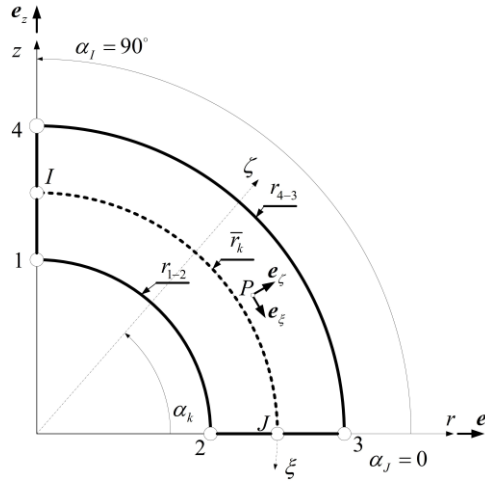
$$\text{Adatainkkal } G = E / 2(1 + \nu) = 0.7692307692307692 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2,$$

$$K = (1 - 2\nu) / 2G(1 + \nu) = 2.0 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2 / \text{N},$$

$$p_h = 1.206563706563707 \text{ MPa}, \quad \sigma_r(r_b) = -20 \text{ MPa}, \quad \sigma_r(r_k) = 0.,$$

$$\sigma_\varphi(r_b) = 11.809845559845559 \text{ MPa}, \quad \sigma_\varphi(r_k) = 1.809845559845560 \text{ MPa}$$

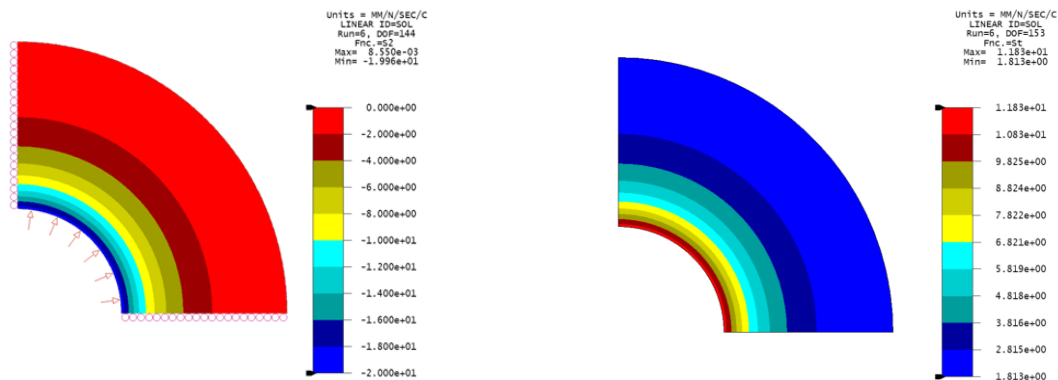
$$u_r(r_b) = 0.001783361486486 \text{ mm}, \quad u_r(r_k) = 4.117398648648649 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$$



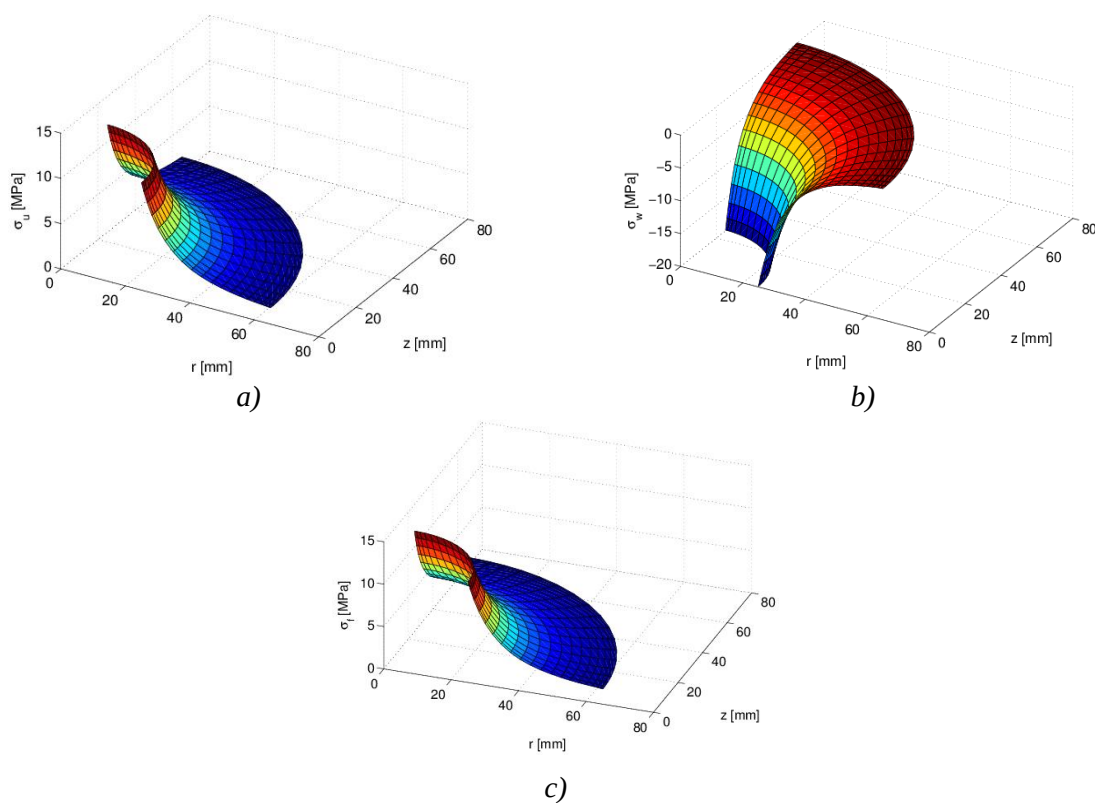
19. ábra. Vastag falú gömbhéj

A StressCheck program által kapott megoldást a  $\sigma_r$  vonatkozásában a 20. ábra tünteti fel.

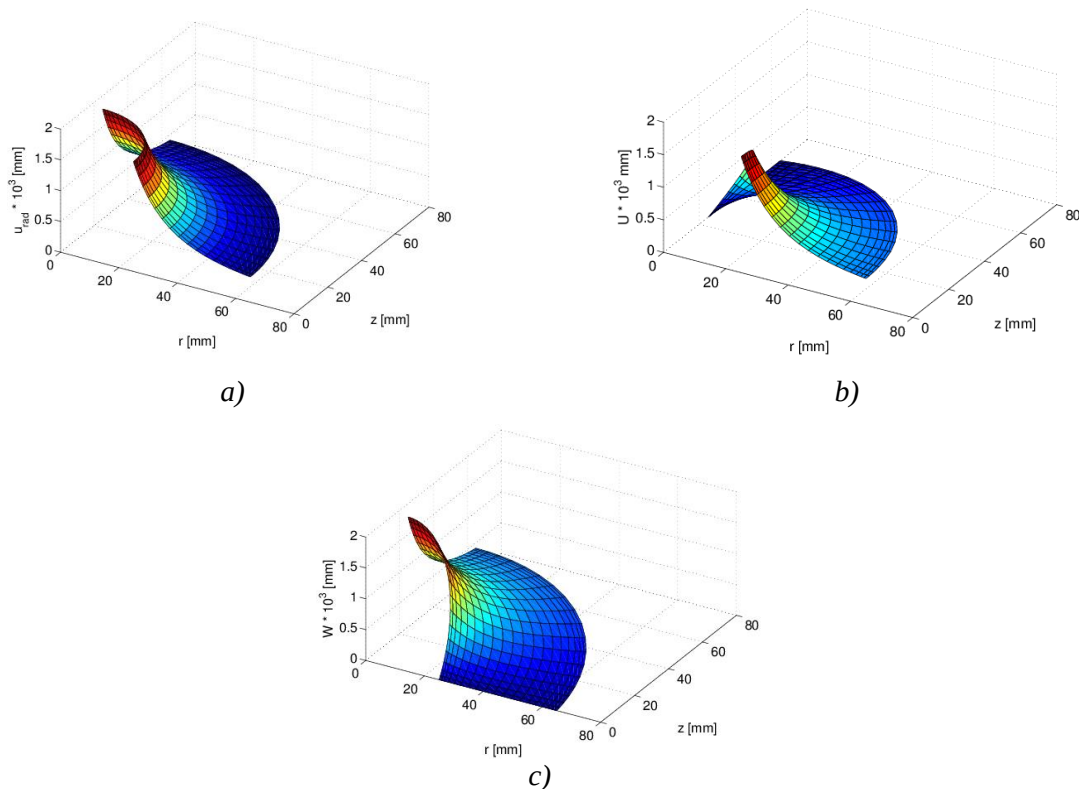
Saját modellünkkel  $MM = 8$ ,  $np = 5$  mellett a feszültségek és elmozdulások a helyi koordináta-rendszerben a 21. ábrákon láthatóak.



20. ábra. StressCheck által kapott  $\sigma_r$  és  $\sigma_\phi$  változása a gömbhéjban  $np=8$  értékénél  $NDOF = 144$ , illetve 153 ismeretlennél



21. ábra. Feszültségek a helyi rendszerben a)  $\sigma_u$  tangenciális, b)  $\sigma_w$  radiális irányban, továbbá a körirányú  $\sigma_\phi$  feszültség. A gömbszimmetria miatt  $\sigma_u = \sigma_\phi$



22. ábra. Elmozdulások, a) helyi rendszerbeli sugárirányú elmozdulás, b)  $r$  irányú  $U$ , c)  $z$  irányú  $W$  elmozdulás

11. táblázat. Gömbre vonatkozó konvergencia adatok,  $np = 1, np = 2, np = 3, np = 4, np = 5, np = 6, \sigma_i$  [MPa],  $u_r$  [mm]

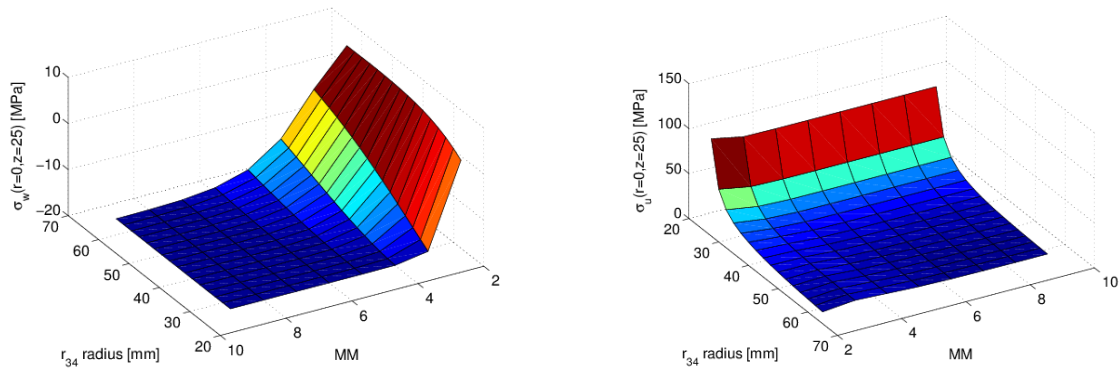
| $MM$ | $\sigma_u$<br>( $r = 0, z = 25$ ) | $\sigma_u$<br>( $r = 0, z = 65$ ) | $\sigma_w$<br>( $r = 0, z = 25$ ) | $\sigma_w$<br>( $r = 0, z = 65$ ) | $u_r$<br>( $r = 0, z = 25$ ) |
|------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| 4    | 14,825                            | 1,1308                            | -12,038                           | -1,5318                           | 0,0017487                    |
| 5    | 13,105                            | 2,0783                            | -16,863                           | 0,63307                           | 0,0017790                    |
| 6    | 12,286                            | 1,7093                            | -18,876                           | -0,23306                          | 0,0017829                    |
| 7    | 11,971                            | 1,8443                            | -19,622                           | 0,08041                           | 0,0017833                    |
| 8    | 11,862                            | 1,7986                            | -19,878                           | 0,02626                           | 0,0017834                    |
| 9    | 11,829                            | 1,8123                            | -19,956                           | 0,005754                          | 0,0017834                    |

A kapott eredmények egyrészt az elmozdulás és a  $\sigma_w$  vonatkozásában igen jól megközelítik a pontos megoldást, másrészt számszerűsítve

$\sigma_u(r=0, z=25)$ -nél a hiba:  $error \sigma_u = 100 \frac{\sigma_u(r=0, z=25) - \sigma_u(exact)}{\sigma_u(exact)} = 0.162\%$ , míg  $\sigma_u(r=0, z=65)$ -

nél a hiba 0.136%, amelyek úgyszintén igen jónak tekinthetők. Mivel a gömbnél a középvonalon az elmozdulások az  $\xi$  koordinátától függetlenek, az elmozdulást elegendő lineáris függvénnyel közelíteni. E miatt az  $np$  növelésével az eredmények nem változnak. Vagyis a feladatot  $MM = 9$ , és  $np = 1$ -et felvéve,  $NDOF = 36$  ismeretlennel lehetett a feladatot megoldani. A gömbre vonatkozó konvergencia-adatokat a 11. táblázatba foglaltuk.

A külső sugár hatását jól érzékelteti a 23. ábra. Az eredeti gömb belső sugarát  $r_b = r_{1-2} = 25$  mm megtartva,  $\Delta r = 2.5$  mm-es lépcsőkben azt növelve, a kapott  $r_k = r_{4-3} = 25 + isug \cdot \Delta r$ ,  $isug = 1, \dots, 16$  külső sugarú gömbhéjakat megoldva szemléljük a belső felületen dinamikai peremfeltétel teljesedését. Elvileg  $\sigma_w = -20$  MPa kell, hogy legyen. Látható, hogy vékonyabb héjaknál ( $r_k = 50$  mm -ig), már  $MM = 5, 6$ -nál teljesül ez a peremfeltétel, de a nagyobb falvastagságnál, már fentebb kell menni, sőt az  $r_k = 65$  mm-es héjánál az  $MM = 9$  érték  $-20$  helyett csak  $-19,956$  MPa szolgáltat. Az is jól látszik nagyobb külső sugárnál a konvergencia lassúbb.



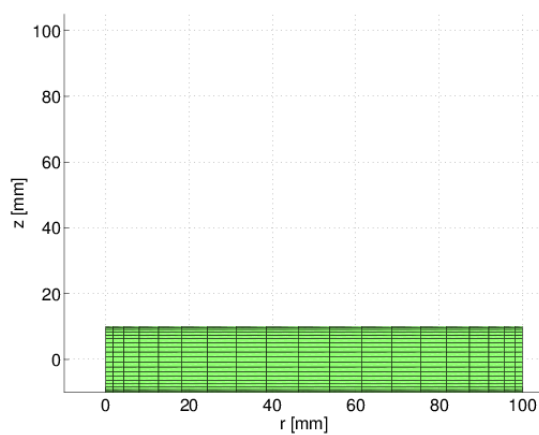
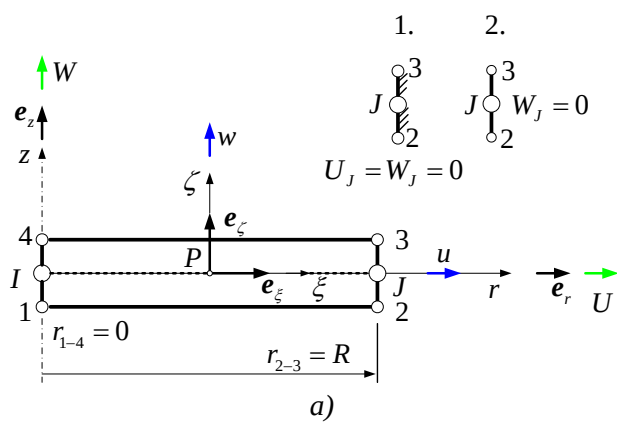
**23. ábra.** Konvergencia felületek különböző gömbhéjaknál, az  $MM$  hatását vizsgálandó, a)  $\sigma_w$ , b)  $\sigma_u$

$MM = 2$ -nél (ami lineáris közelítésnek felel meg), igen rossz a  $\sigma_w$  közelítése, még a negatív értékű tartományba se esik bele. A legelső héjánál ( $r_b = 25, r_k = 27.5$ ) a  $\sigma_u$  irányú normál feszültség a vizsgált helyen ( $r = 0, z = r_b = 25$ )  $MM = 2$ -nél 108,23 MPa, a pontos 100,64 MPa helyett, míg a radiális elmozdulás a belső felületen 0.0095039 mm, a pontos 0,009555 mm helyett. Ez a szokásos vékony héjaknál használt közelítésnek felel meg, amely a héjat terhelő nyomási peremfeltétellel nem foglalkozik.  $MM > 2$ -nél a pontos megoldást kapjuk az elmozdulásra.

### 3.4. Körlemez példája

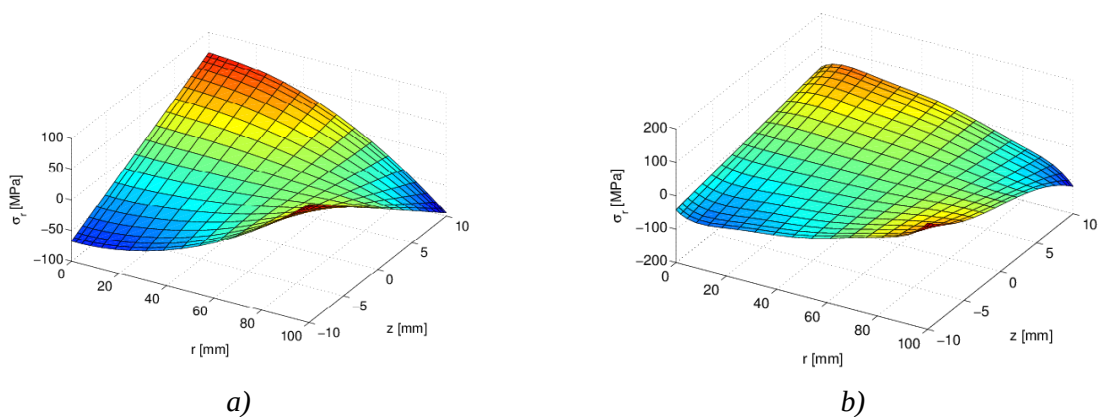
Állandó vastagságú körlemezt vizsgálunk (lásd. 24. ábra), amelyre alulról  $z = -b/2 = -10$  mm felületen  $p_0 = 5$  MPa nagyságú nyomás hat. Az  $R = 100$  mm-es peremen kétfajta megtámasztás lehetséges: 1. befalazott, azaz  $U = W = 0$ , 2. görgősen alátámasztott, azaz  $W = 0$  végig a lemez vastagsága mentén.

A hierarchikus modellezéssel jól lehet majd érzékelni a vastagságmenti elmozdulás különböző fokú approximációját, ami a klasszikus technikai lemezelmélet, a *Mindlin*-féle modellel kapott eredmények összevetésére ad kiváló lehetőséget. A lemez vastagsága  $b = 20$  mm, ezért már a lemez vastagnak tekinthető,  $b/R = 0.2$ .

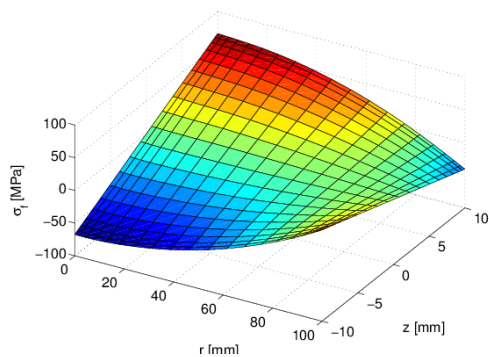


**24. ábra.** Köralakú lemez egy elemmel modellezve, a) geometria, koordináta-rendszerek és elmozdulások, b) végeleemes számításnál használt Gauss integrálási vonalak

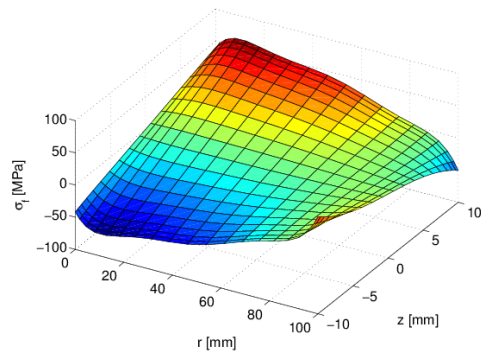
1. variáns megoldása



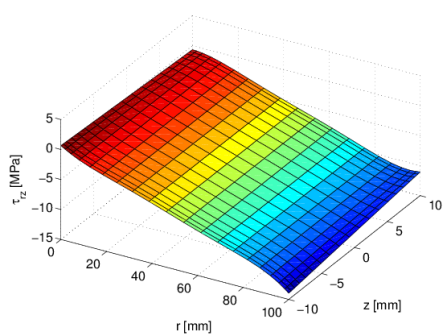
**25. ábra.**  $\sigma_u = \sigma_r$  változása  $MM = 2,5$  függvényeként



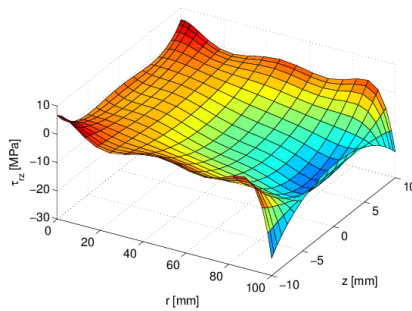
a)



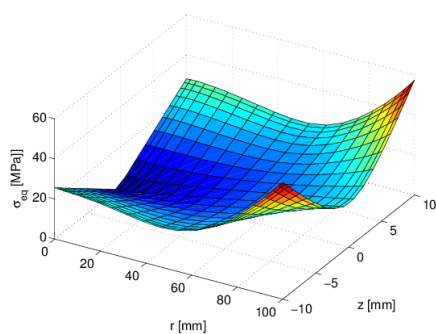
b)

26. ábra.  $\sigma_\varphi$  változása  $MM = 2,5$  függvényeként

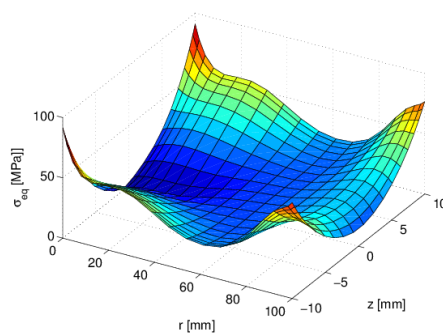
a)



b)

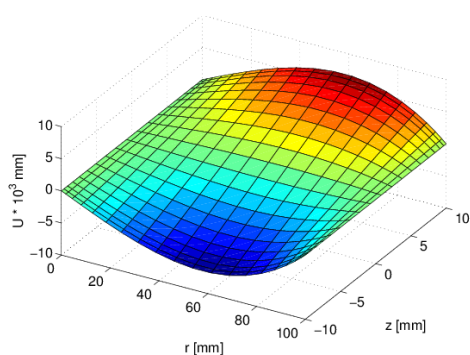
27. ábra.  $\tau_{rz}$  változása  $MM = 2,5$  függvényeként

a)

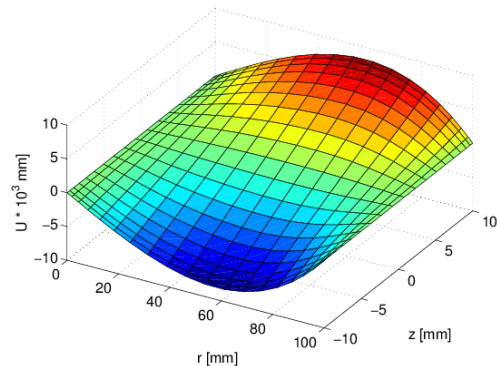


b)

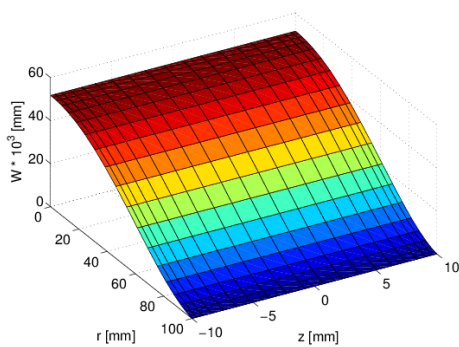
28. ábra.  $\sigma_{eq}$  redukált feszültség változása  $MM = 2,5$  függvényeként



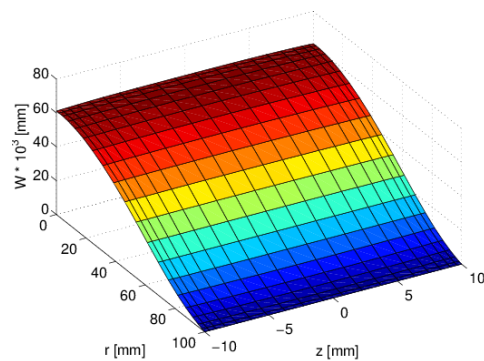
a)



b)



c)

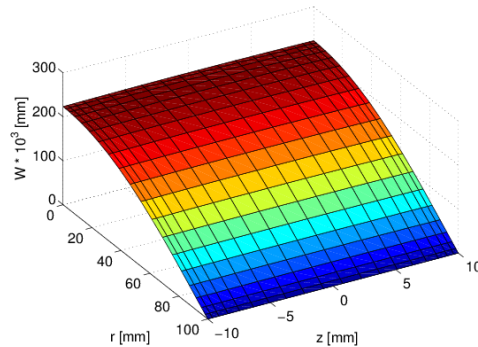
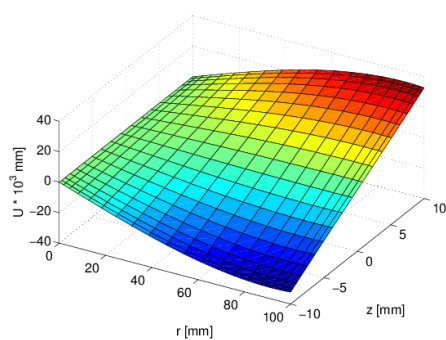


d)

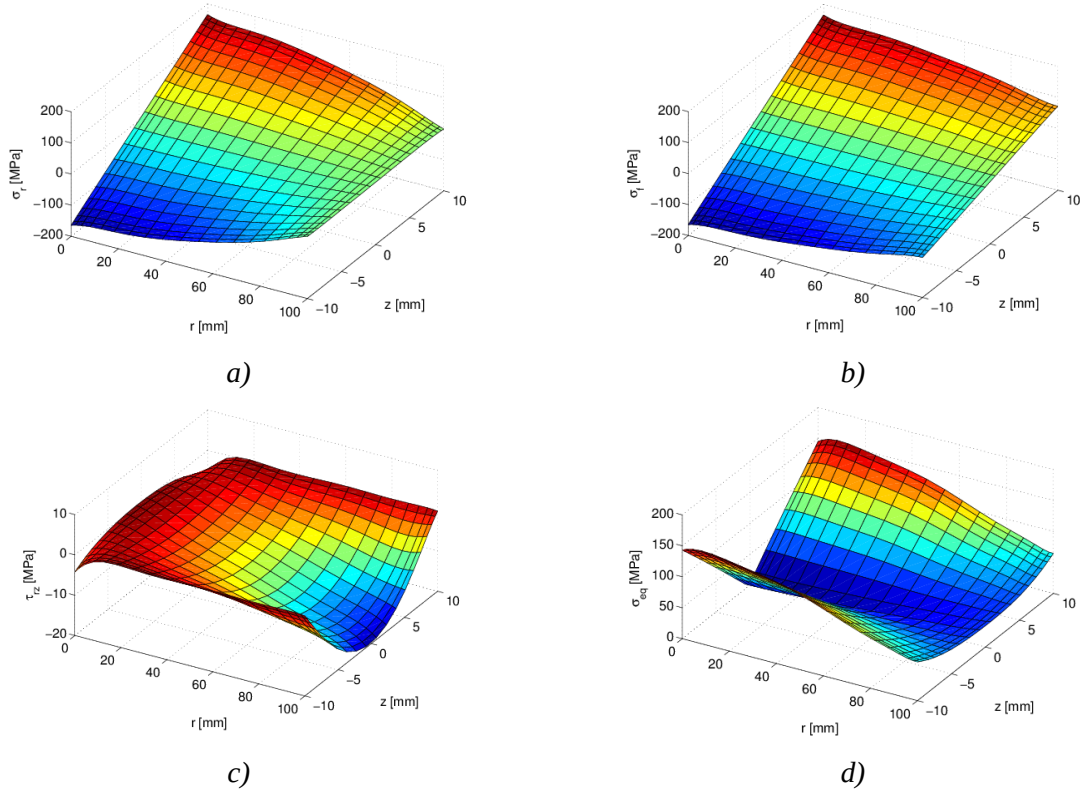
29. ábra.  $U$  (a,b) és  $W$  (c,d) változása  $MM = 2,5$  függvényeként

## 2. variáns megoldása

A lemez szélén görgős támasztást alkalmazva az elmozdulások, feszültségek nagyobbak lesznek. Az eredményeket nem részletezve,  $MM = 8$  hoz tartozóan mutatjuk be azokat.



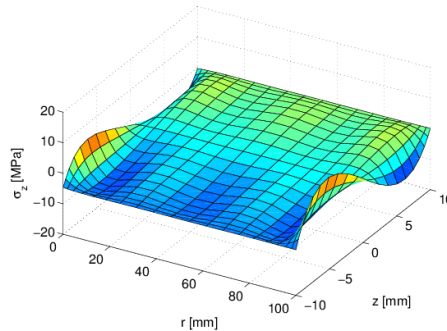
30. ábra. Elmozdulások a görgős alátámasztású lemeznél



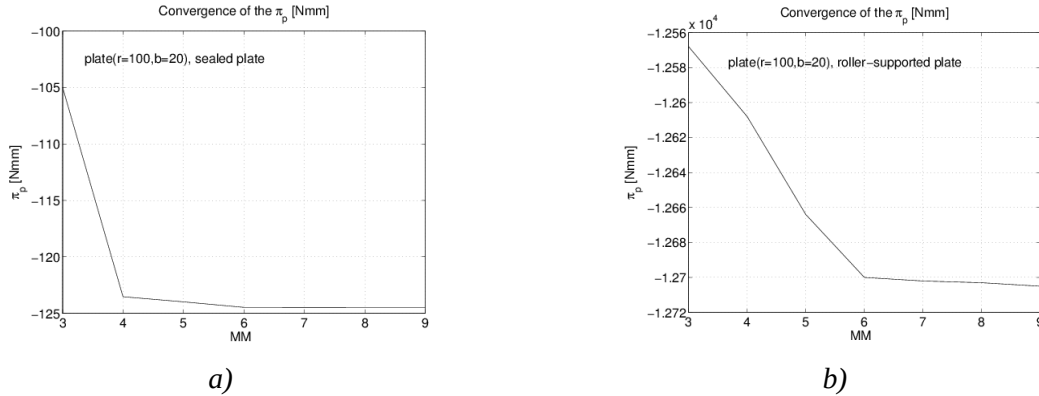
31. ábra.  $\sigma_r, \sigma_\phi, \tau_{rz}, \sigma_{eq}$  feszültségek a görgős alátámasztású lemeznél

A hierarchikus szinttől függően a nyírófeszültség megoszlása jelentősen változik. Míg  $MM = 2$  mellett a lemez megfogásának peremén lineáris,  $MM = 3, 4, \dots$  már parabolikus lesz a vastagságmenti megoszlás. A  $\sigma_z$  megoszlását a modellünk nem tudja pontosan lekövetni (lásd a 32. ábrát). A meridián keresztmetszet sarokpontjaiban a szingularitás miatt a feszültség abszolút értéke megnő, a  $z = -10$  peremen kb. a  $-5$  MPa feszültséget megkapjuk, míg a  $z = 10$  peremen jól közelítjük a zérusértéket. Mivel a többi normál feszültség jóval nagyobb, a redukált feszültség megoszlása (28. ábra, 31d. ábra) megbízhatónak mondható.

A potenciális energiák vonatkozásában a konvergenciagörbék a 33. ábrán láthatók.



32. ábra.  $\sigma_z$  feszültség megoszlása görgős alátámasztású lemeznél ( $MM = 8$ )



**33. ábra.**  $\Pi_p$  potenciális energia konvergencia görbéje a vizsgált lemezeknél,  
a) befalazott lemez, b) görgős megtámasztású lemez

#### Modifikált megfogások

A klasszikus lemezeknél használt befalazás és a görgős támasz klasszikus megfogása helyett, a szingularitások csökkentésére, modellünkben az  $R=100$  mm-es peremen parabolikusan megoszló nyíró feszültséget helyezünk el a függőleges terhelő erőt ellensúlyozva, tehát

$$2\pi R \int_{-b/2}^{b/2} \tau_o (1 - \zeta^2) d\zeta = R^2 \pi p_o \text{ egyenletből } \tau_o = \frac{3}{4} \frac{p_o}{b} R = 18.5 \text{ MPa adódik.}$$

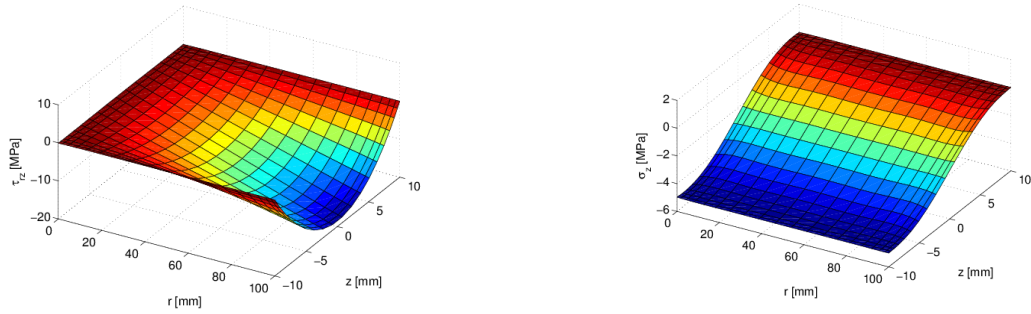
Vagyis az 1-es befalazásnál, a  $W(R, z=0)=0$  függőleges elmozdulás és  $U(R, -b/2 \leq z \leq b/2)=0$  radiális elmozdulás előírt és a fenti megoszlóterhelés hat  $-z$  irányban, míg a 2-es görgős támasznál az előbbieket az  $U$  radiális elmozdulás megkötése nélkül. Ezeket a megfogási eseteket Modifikált megfogás 1-nek, ill. Modifikált megfogás 2-nek fogjuk elnevezni.

**12. táblázat.** Megfogási variációk főbb eredményei ( $np = 6$ ,  $MM = 8$ ,  $p_o = 5$  MPa).

| Variáció      | $u_z = W$<br>( $r = 0, z = -10$ )<br>mm | $\sigma_r$<br>( $r = 0, z = -10$ )<br>MPa | $\tau_{rz}$<br>( $r = R, z = 0$ )<br>MPa | $\sigma_{eq}$<br>( $r = 0, z = -10$ )<br>MPa | $\sigma_{eq}$<br>( $r = R, z = -10$ )<br>MPa |
|---------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 1             | 0,0611                                  | -41,61                                    | 8,40                                     | 92,98                                        | 79,73                                        |
| Mod 1         | 0,0624                                  | -67,33                                    | -15,00                                   | 62,62                                        | 98,00                                        |
| 2             | 0,2233                                  | -155,50                                   | -16,87                                   | 150,95                                       | 62,60                                        |
| Mod 2         | 0,2233                                  | -155,31                                   | -18,75                                   | 150,34                                       | 63,59                                        |
| Elmélet 1. v. | 0,05312                                 | 61,25                                     |                                          |                                              | 93,5                                         |
| Elmélet 2. v. | 0,2187                                  | 154,68                                    |                                          | 155                                          |                                              |

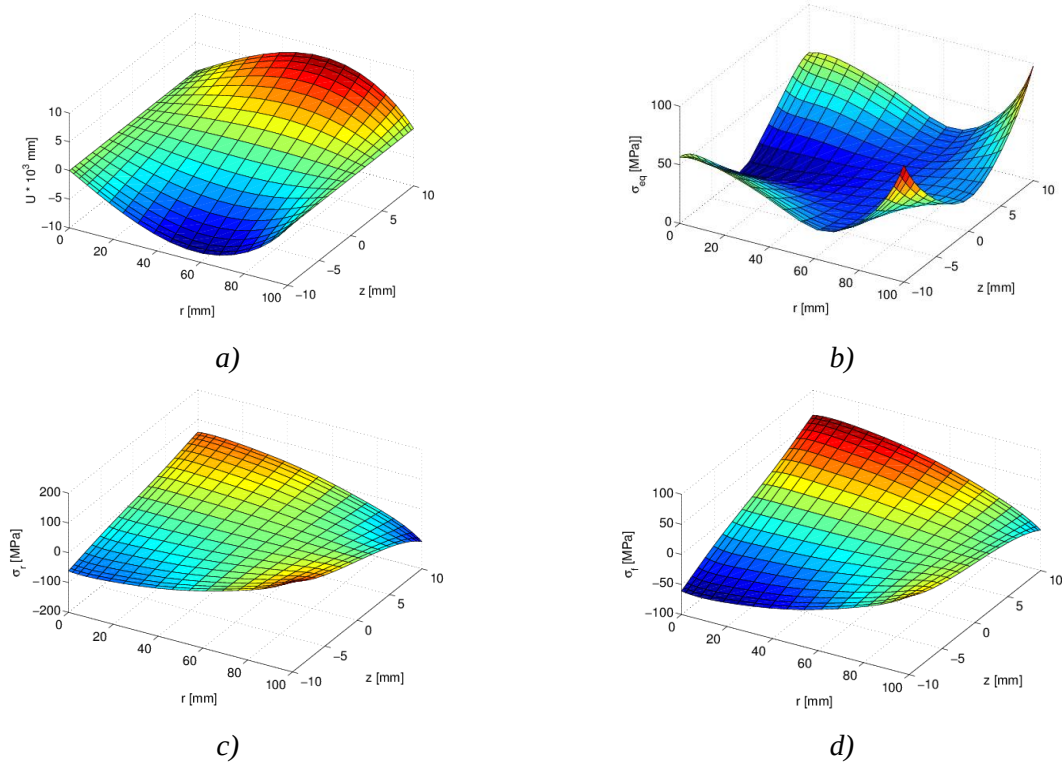
Összehasonlítva a megfogási variációk néhány eredményét a 12. táblázat tartalmazza. Látható, hogy habár az elmozdulások között nincs lényeges eltérés, a feszültségeknél az 1-es megtámasztásnál azonban már igen. A megfogási nyírófeszültség használata segítette a simább megoldás elérését. Vékonylemez-elmélet szerint számítottak (Ponomarjov et al., 1965) az Elmélet soraiban találhatók. Mivel az általunk vizsgált körlemez vastagnak tekinthető, az eltérések érthetőek.

A 34. ábra a 2. megtámasztás módosított esetében mutatja a  $\tau_{rz}$  nyíró- és  $\sigma_z$  normál feszültség megoszlását, jól kielégítve a dinamikai peremfeltételeket. A  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_{eq}$  feszültségek gyakorlatilag azonosak a 31. ábrán, az elmozdulások pedig a 30. ábrán látottakkal.



**34. ábra.** A 2. módosított megtámasztásnál keletkező  $\tau_{rz}$  és  $\sigma_z$  feszültségek megoszlása

A módosított 1-es befalazási feladatnál a radiális elmozdulást, a redukált, radiális és a körirányú feszültség megoszlását láthatjuk a 35. ábrán. Vékony lemezeknél a befalazásnál az  $M_\varphi = \nu M_r$  (Ponomarev et al., 1965), ezért a keletkező feszültségek is egymással  $\nu$  Poisson tényezővel vannak kapcsolatban. Ez globálisan megfigyelhető a mi esetünkben is.



**35. ábra.** Az 1. módosított megtámasztásnál ébredő a) radiális elmozdulás, b)  $\sigma_{eq}$  redukált feszültség, c)  $\sigma_r$  radiális, d)  $\sigma_\varphi$  körirányú feszültség megoszlása

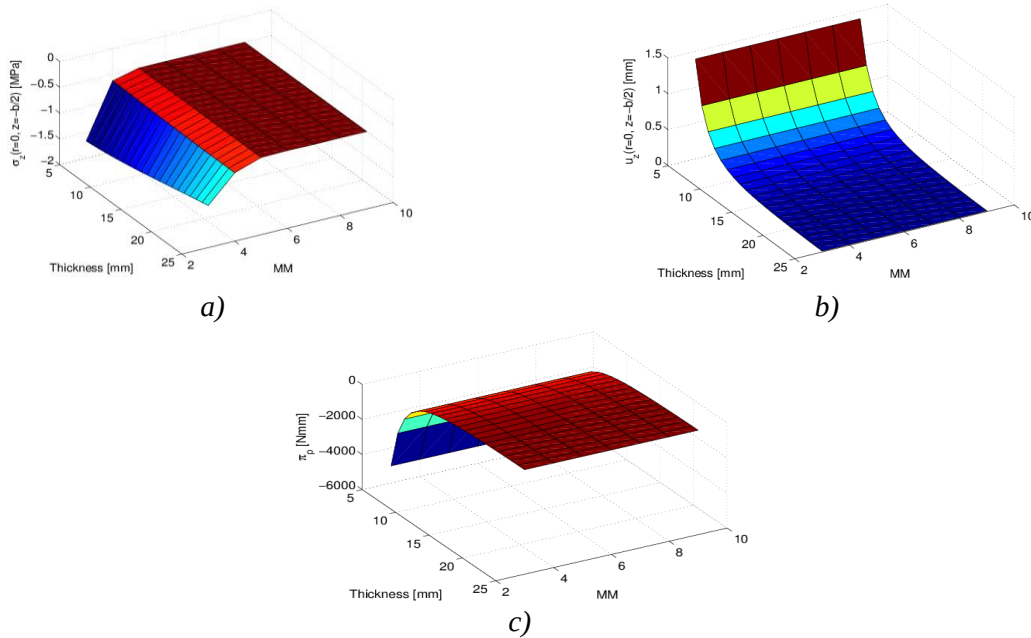
Hasonlóan a gömb feladatához itt is megvizsgáljuk a lemezvastagság hatását a megoldás konvergenciájára a 2. módosított megtámasztásnál (görgös alátámasztás). A vékony lemezek miatt a terhelő nyomást  $p_o = 0.5 \text{ MPa}$  -ra választjuk. A 36. ábrán a  $\sigma_z$  feszültségre, a forgástengelyen lévő alsó pont függőleges elmozdulásra vonatkozó megoldások értékeit, illetve a potenciális energiát szemléljük a vastagság és az  $MM$  függvényében. A mezőfüggvény approximációját  $np = 6$  értékkel építettük fel.

Minden függvénynél az  $MM \geq 5$  választással az értékek gyakorlatilag állandósultak, a  $\sigma_z$ -re vonatkozó peremfeltétel teljesül. Az elmozdulás erősen függ a lemez vastagságától.

Az is világos, hogy a dinamikai peremfeltétel kielégítéséhez  $MM \geq 5$  értékeket kell választani. A 13. táblázat megmutatja, hogy az  $\sigma_\varphi(r=0, z=-b/2)$  és  $u_z(r=0, z=-b/2)$  értékei az  $MM = 2$  és  $MM = 9$  nél kevésbé térnek el egymástól, ami alátámasztja a klasszikus lemezelméletek használatát.

**13. táblázat.** Tipikus eredmények különböző falvastagságú lemeznél

| $b \text{ [mm]}$                       | 5       | 10      | 15       | 20       | 25       |
|----------------------------------------|---------|---------|----------|----------|----------|
| $u_z(r=0, z=-b/2)$<br>[mm], $MM = 2$   | 1,0618  | 0,13395 | 0,042999 | 0,017365 | 0,009134 |
| $MM = 3$                               | 1,3931  | 0,17482 | 0,052156 | 0,022219 | 0,011524 |
| $MM = 9$                               | 1,5935  | 0,17506 | 0,052302 | 0,022327 | 0,011609 |
| $\sigma_\varphi(r=0, z=-b/2)$<br>[MPa] |         |         |          |          |          |
| $MM = 2$                               | -257,14 | -64,286 | -28,571  | -16,071  | -10,286  |
| $MM = 3$                               | -247,95 | -62,423 | -28,046  | -15,965  | -10,331  |
| $MM = 9$                               | -247,56 | -61,935 | -27,563  | -15,533  | -9,9631  |



**36. ábra.** 2. módosított megtámasztású lemez konvergenciaeredményei a)  $\sigma_z(r=0, z=-b/2)$ , b)  $u_z(r=0, z=-b/2)$ , c)  $\Pi_p$  mennyiségekre vonatkozóan.

#### 4. Összefoglalás

A hierarchikus végeelem-modellek felépítésének gondolatát először a (Stein, 2012) publikációban találjuk meg. E közelítési móddal a tartók, lemezek, héjak elmozdulásállapotát egyrészt a hosszmenti, másrészt az erre merőlegesen felvett függvényekkel, azok szorzatával tudjuk megközelíteni. A keresztirányú elmozdulásfüggvények (polinomok) /*irányfüggvények*/ fokszámának növelésével különböző hierarchikus szinteket tudunk elérni, egyre közelebb jutva a háromdimenziós feszültségi állapothoz. A jelen munkában ezt az eleve forgásszimmetrikus testekre, héjakra alkalmaztuk. Az elméleti egyenletek levezetését követően konkrét testeket vizsgáltunk: vastag falú hengeres testet, kúpos testeket, gömbhéjat, köralakú lemezt. A számításoknál a közelítést a hosszirányban beálló változást kifejező polinom /*mezőfüggvények*/  $np$  fokszámával és a keresztirányban alkalmazott polinomok  $MM$  számának felvételével tudjuk jellemezni. Bevezetést nyertek a különböző mechanikai mennyiségek konvergenciáját szemléltető konvergenciafelületek az  $np$ ,  $MM$  függvényében.

A jelen modell eredményeit rugalmasságtani elméleti megoldásokkal, ill. 3D-s végeelem programmal kapottakkal vetettük össze. Ha a szerkezet nem tartalmazott szinguláris feszültségi pontokat, akkor igen jók a közelítések, kb. 2%-nál kisebb eltéréssel dolgoztak, míg szingularitásoknál már kevésbé remekeltek (lásd kúp 2 esetet). Nagy előnye a modellünknek, hogy kevés ismeretlennel is célhoz érünk nagy pontosságú megoldásokat kapva. A konvergens megoldást adó hierarchikus szint megadja azt is, hogy milyen típusú héjmodellek alkalmazhatók a kérdéses szilárdságtani feladat megoldására. A konvergens megoldások igazolják a modell alkalmazhatóságát, a kapott eredmények gyakorlat számára elfogadható voltát. A modellünkhöz kapcsolódó számításokat FORTRAN programnyelven készített laptopon futatott programmal végeztük el. Összevetve eredményeinket a térbeli megoldásokkal, helyes eredményekről beszélhetünk, ugyanis a kapottak jól megközelítik a térbeli feladatok megoldásait. Természetesen még pontosabb eredményeket a hierarchikus modellezés helyett célszerűbb a már kidolgozott és kipróbált 3D-s végeelem programok használatával biztosítani, hisz ezek már egy laptopon is nagyszámú ismeretlennel képesek dolgozni, pl. (<https://esrd.com>).

#### Irodalom

- [1] Ritz, W. (1908). Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 135 (1), pp. 1–61. <https://doi.org/10.1515/crll.1909.135.1>
- [2] Stein, E. (2012). Milestones of direct variational calculus and its analysis from the 17th century until today and beyond – Mathematics meets Mechanics – with restriction to linear elasticity. *Computer Assisted Methods in Engineering and Science*, 19, pp. 7–91.
- [3] Szabó, B., Babuska, I. (2011). *Introduction to Finite Element Analysis: Formulation, Verification and Validation*. John Wiley and Sons, Ltd. Chichester, UK. <https://doi.org/10.1002/9781119993834>
- [4] Páczelt I. (1999). *Végeelem-módszer, a mérnöki gyakorlatban*. I. kötet. Miskolc: Miskolci Egyetemi Kiadó.
- [5] Páczelt I., Szabó B. (2018). P-verziós végeelemeket felhasználó hierarchikus rúd modellek. In Csibi Vencel, J., Barabás, I. (Eds.), OGÉT 2018: XXVI. Nemzetközi Gépészeti Konferencia: 6th International Conference on Mechanical Engineering, (pp. 341–344). Cluj-Napoca, Románia, Kolozsvár, Románia Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság (EMT), 544 p.

- [6] Páczelt, I., Szabó, B., Baksa, A. (2023). Application of the p-version of FEM to hierarchic rod models with reference to mechanical contact problems. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 18 (1), pp. 35–84. <https://doi.org/10.32973/jcam.2023.002>
- [7] Obádovics, J. Gy., Szarka, Z. (2009). *Felsőbb matematika*. Budapest: Scolar Kiadó.
- [8] Carrera, E., Giunta, G., Petrolo, M. (2011). *Beam structures, Classical and advanced theories*. John Wiley and Sons, Ltd. <https://doi.org/10.1002/9781119978565>
- [9] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. (2005). *Finite element method for solid and structural mechanics*. Sixth edition. Amsterdam: Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [10] Vasiliev, V. V. (2024). The Theory of Thin Elastic Plates—History and Current State of the Problem. *Mech. Solids.*, 59, pp. 581–604. <https://doi.org/10.1134/S0025654424700286>
- [11] Tuan N. Nguyen, Tuan D. Ngo, H. Nguyen-Xuan (2017). A novel three-variable shear deformation plate formulation: Theory and Isogeometric implementation. *Compute Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 326, pp. 376–401. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.07.024>
- [12] Anssi T. Karttunen, Raimo von Herten, J. N. Reddy, Jani Romanoff (2017). Bridging plate theories and elasticity solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 106-107, pp. 251–263. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.09.037>
- [13] Vijayakumar, K. (2014). Review of a few selected theories of plates in bending. *Int Sch Res Notices*. <https://doi.org/10.1155/2014/291478>
- [14] Béda Gy., Kozák I. (1987). *Rugalmas testek mechanikája*. Budapest: Műszaki Kiadó.
- [15] Herpai, B., Páczelt, I. (1977). Analysis of axisymmetrically deformed shells by the finite element displacement methods. *Acta Techn. Hung.*, 85, pp. 93–122.
- [16] Páczelt I. (1980). TESZGA végesesemes programrendszer tengelyszimmetrikus geometriájú és alakváltozású szerkezetek szilárdságtani számítására. *Műszaki Tudomány*, 60, pp. 63–78.
- [17] Abaqus, <http://www.abaqus.com>
- [18] StressCheck, <https://esrd.com>
- [19] Ponomarjov, Sz. D., Bidermann, V. I., Liharev, K. K., Makusin, B. M., Malinyin, N. N., Feodoszjev, V. I. (Eds.) (1965). *Szilárdsági számítások a gépészetben, 3. kötet: Lemezek, héjak*. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
- [20] Rank, E., Düster, A., Nübel, V., Preusch, K., Bruhns, O. T. (2005). Higher order finite elements for shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 194, pp. 2494–2512. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.07.042>
- [21] Aghababaei, R., Reddy, J. N. (2009). Nonlocal third-order shear deformable plate theory with application to bending and vibration of plates. *J. Sound Vib.*, 326 (1–2), pp. 277–289. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.044>
- [22] Freund, J. (2018). Shear-corrected Reissner–Mindlin plate model. *Compos. Struct.*, 211, pp. 144–153. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.12.029>
- [23] Echter, R., Oesterle, B., Bischoff, M. (2013). A hierarchic family of isogeometric shell finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 254, pp. 170–180. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.10.018>
- [24] Tóth, B., Burmeister, D. (2020). Dual-mixed hp-version axisymmetric shell finite element using NURBS mid-surface interpolation. *Acta Mech.*, 231, pp. 2457–2483. <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02661-3>