

HENCKY-TÍPUSÚ NEMLINEÁRIS ANYAGMODELL HŐRUGALMAS, GUMISZERŰ ANYAGOKRA

Bertóti Edgár 

egyetemi tanár, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: edgar.bertoti@uni-miskolc.hu

Absztrakt

A lineáris hőrugalmasságtan anyagmodelljei nem alkalmasak a gumyszerű polimerek alakváltozása során megjelenő termoelasztikus inverziós jelenség modellezésére. Ugyanez vonatkozik a logaritmikus nyúlásokra épülő, Hencky-típusú lineáris modellekre, noha utóbbiak előnyösen alkalmazhatók mérsékelten nagy rugalmas alakváltozások leírására is, a feszültségek és a nyúlások közötti exponenciális függvénykapcsolatnak köszönhetően. Ez a cikk a Gibbs-féle szabad energián alapuló, a Kirchhoff-féle feszültségtenzortól és a hőmérséklettől, mint termodinamikai alapváltozóktól függő, Hencky-típusú hőrugalmas anyagmodell egy lehetséges módosítását mutatja be. Az anyagi paraméterek hőmérséklettől való függésének bevezetésével a módosított modell alkalmassá válik a gumyszerű anyagoknál megjelenő termoelasztikus inverziós jelenség és a kapcsolódó hatások modellezésére is, mérsékelten nagy alakváltozásoknál. A nyúlásokra és az entrópiára származtatott anyagegyenletek alkalmazhatósága az egytengelyű és a kéttengelyű húzás feladatain keresztül kerül bemutatásra, illetve összevetésre a lineáris modellel, valamint a nemlineáris Ogden–Holzapfel-féle anyagmodellel.

Kulcsszavak: hőrugalmasságtan, Gibbs-féle szabad energia, logaritmikus nyúlás, térfogatállandóság

Abstract

It is well-known that linear thermoelastic models are unable to predict the thermoelastic inversion effect and related phenomena in rubber-like polymeric materials. This limitation also applies to the logarithmic stretch-based Hencky-type linear models, even though they can be advantageously applied to moderately large deformations due to the exponential relationship between stress and strain variables. This paper presents a slightly modified Hencky-type thermoelastic constitutive model based on the Gibbs free energy, which is considered a function of the Kirchhoff stress tensor and temperature as independent constitutive variables. By introducing temperature dependence into the material parameters of the linear model, modified constitutive equations for stretch and entropy are derived. The capability of the proposed model to predict the thermoelastic inversion phenomenon and structural heating is investigated for uniaxial and equibiaxial tension problems. The results are compared with those obtained using the nonlinear Ogden–Holzapfel thermoelastic model for incompressible rubber-like materials.

Keywords: thermoelasticity, Gibbs free energy, logarithmic strain, incompressibility

1. Bevezetés

Gumiszerű anyagok, polimerek és biológiai szövetek hőrugalmas viselkedése jelentősen eltér a fémeknél tapasztaltakkal. Régóta ismert például, hogy egy gumiszalag gyors (adiabatikus) nyújtása

során felmelegszik, ha pedig állandó terhelés (feszültség) alatt tartják, akkor hő hatására összehúzódik. Ezeknek a jelenségeknek a leírására a lineáris hőrugalmaságtan anyagmodelljei nem alkalmasak (Nowacki, 1986). A nemlineáris hőrugalmaságtan keretein belül elsősorban a Helmholtz-féle szabad energián alapuló anyagmodellek alkalmazása terjedt el, amelyeknél az alakváltozási jellemzők és a hőmérséklet jelenik meg független termodinamikai alapváltozóként, az anyagegyenletek pedig a feszültségi jellemzőkre és az entrópiára, mint másodlagos termodinamikai változókra vonatkoznak (Šilhavý, 1997).

A Gibbs-féle szabad energián alapuló nemlineáris hőrugalmaságtani anyagmodelleknél a feszültségi jellemzők és a hőmérséklet jelentik a független termodinamikai alapváltozókat, az anyagegyenletek pedig az alakváltozásokra és az entrópiára vonatkoznak. A Gibbs-féle szabad energián alapuló modellek elterjedését elsősorban a nagy rugalmas alakváltozások leírására alkalmas inverz anyagmodellek viszonylagosan kevés száma magyarázza. Gumyszerű, összenyomhatatlan és izotrop anyagokra az utóbbi években többek között a (Bustamante et al., 2021; Bustamante, 2021; Bertóti, 2023) publikációk, hőrugalmaságtani alkalmazásokra pedig a (Průša et al., 2020; Bustamante et al., 2024; Bertóti, 2026) cikkek mutattak be új, nemlineáris anyagmodelleket. Ezekben a modellekben termodinamikai alapváltozóként a Hencky-féle logaritmusos nyúlástenzor és a Kirchhoff-féle feszültségtenzor jelennek meg az entrópia és a hőmérséklet mellett. A Hencky-féle nyúlástenzor alkalmazásának egyik előnye az, hogy lineáris alakú anyagegyenletek esetén is lehetővé teszi a mérsékelt nagy alakváltozások leírását (Anand, 1979; Anand, 1986; Bruhns et al., 2001), másik nagy előnye pedig abból az egyedülálló tulajdonságából fakad, hogy additív felbontása nemlineáris esetben is alkalmassá teszi a térfogati és a torzulási alakváltozások független, nem kapcsolt leírását (Flory, 1961; Criscione et al., 2000).

Ebben a cikkben egy olyan, a Gibbs-féle szabad energián alapuló anyagmodellt vizsgálunk, amely a lineáris hőrugalmaságtanban alkalmazott Hencky-típusú, logaritmusos nyúlástenzorra vonatkozó inverz anyagmodell kis mértékű módosításával alkalmas a gumyszerű anyagoknál megjelenő termoelasztikus inverziós jelenség és a kapcsolódó hatások modellezésére, mérsékelt nagy alakváltozások esetén. A 2. fejezet röviden áttekinti a Gibbs-féle szabad energián alapuló hőrugalmaságtani anyagegyenleteket és bemutatja a Hencky-féle lineáris anyagmodell – logaritmusos nyúlásokra és entrópiára vonatkozó, részlegesen inverz – anyagegyenleteit. A módosított, Hencky-típusú hőrugalmaságtani anyagmodell a 3. fejezetben kerül bemutatásra, felhasználva a (Bertóti, 2026) cikkben ismertett elméleti eredményeket. A modell alkalmazhatóságára vonatkozó számításokat és eredményeket a 4. fejezet ismerteti, amelynek során a módosított anyagmodell egytengelyű és kéttengelyű húzás feladatain keresztül kerül összevetésre a lineáris modell, valamint az Ogden–Holzapfel-féle hatparaméteres, nemlineáris anyagmodell eredményeivel.

2. Hőrugalmaságtani bevezető

2.1. A nemlineáris hőrugalmaságtan anyagegyenletei Gibbs-féle szabad energiával

Hőrugalmas szilárd test nagy alakváltozásának leírása során jelölje \mathbf{X} és \mathbf{x} egy tetszőleges anyagi pont kezdeti és pillanatnyi konfigurációban elfoglalt helyét; kapcsolatukat az $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ mozgásfüggvény írja le, ahol t az időt jelző paraméter. A deformációt jellemző $\mathbf{F} = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$ alakváltozási gradiens poláris felbontását az

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (1)$$

összefüggés értelmezi, ahol \mathbf{R} egy ortogonális forgástenzor, \mathbf{U} és \mathbf{V} pedig a szimmetrikus, pozitív definit, jobb- és bal oldali nyúlástenzorok, amelyek determinánsait a

$$J = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} = \det \mathbf{V} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0 \quad (2)$$

kifejezés értelmezi, ahol $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ a vizsgált pontbeli főnyúlásokat jelöli. Az $\ln \mathbf{U}$ és $\ln \mathbf{V}$ materiális és a térbeli Hencky-féle logaritmikus nyúlástenzorok sajátértékeit $\ln \lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ jelölik, amelyekre fennáll az

$$\ln J = \text{tr}(\ln \mathbf{U}) = \text{tr}(\ln \mathbf{V}) = \ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 + \ln \lambda_3 \quad (3)$$

összefüggés, ahol $\text{tr}(\cdot)$ a trace operátort jelöli. A Hencky-féle logaritmikus nyúlástenzorok alkalmazásának egyik legfontosabb, egyedülálló előnye az, hogy additív, deviátoros és gömbi részekre történő felbontásuk nagy alakváltozások esetén is lehetővé teszi a térfogatváltozási és a torzítási részek nem kapcsolt leírását (Flory, 1961; Criscione et al., 2000). Ez a cikk a térbeli (bal oldali) Hencky-féle nyúlástenzorra vonatkozó anyagegyenleteket tárgyal, amelynek additív felbontása az

$$\ln \mathbf{V} = \frac{1}{3} \text{tr}(\ln \mathbf{V}) \mathbf{1} + \text{dev}(\ln \mathbf{V}) \quad (4)$$

módon adható meg, ahol $\mathbf{1}$ a másodrendű egységtenzor, a $\text{dev}(\cdot)$ pedig a deviátor operátort jelöli.

Izotrop anyag esetén az $\ln \mathbf{V}$ logaritmikus nyúlástenzor energia értelemben konjugált párja a Kirchhoff-féle $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$ feszültségi tenzor (Hill, 1968; Hoger, 1987), ahol J az alakváltozási gradiens (2) szerinti determinánsa, $\boldsymbol{\sigma}$ pedig a Cauchy-féle feszültségi tenzor. A Kirchhoff-féle feszültségi tenzor additív felbontását a

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} = p_\tau \mathbf{1} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \quad p_\tau = (\text{tr} \boldsymbol{\tau})/3, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \text{dev} \boldsymbol{\tau} \quad (5)$$

kifejezések értelmezik, ahol p_τ a hidrosztatikus Kirchhoff-feszültség, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ pedig a $\boldsymbol{\tau}$ tenzor deviátor része.

Hőrugalmas, nagy alakváltozások Gibbs-féle szabad energiájának materiális idő szerinti deriváltja a

$$\dot{G} = \ln \mathbf{V} : \dot{\boldsymbol{\tau}} + \eta \dot{T} \quad (6)$$

módon adható meg (lásd pl. Průša et al., 2020), ahol G a kezdeti térfogategységre eső Gibbs-féle szabad energia, η a kezdeti térfogategységre vonatkozó entrópia, T pedig a Kelvin-féle abszolút hőmérséklet (egy mennyiség jele feletti pont annak materiális idő szerinti deriváltját jelöli). A (6) összefüggés szerint a $G = G(\boldsymbol{\tau}, T)$ függvény egy termodinamikai potenciálnak tekinthető, amelyből, behelyettesítve annak materiális idő szerinti deriváltját (6)-ba és figyelembe véve $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ és \dot{T} tetszőlegességét, az

$$\ln \mathbf{V} = \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad \eta = \frac{\partial G}{\partial T} \quad (7)$$

általános érvényű anyagegyenletek származtathatók (Xiao et al., 2003; Xiao et al., 2004).

2.2. Az alakváltozási gradiens multiplikatív felbontása

Hőrugalmas alakváltozások esetén az \mathbf{F} alakváltozási gradiens multiplikatív felbontása az

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_M \cdot \mathbf{F}_H, \quad \mathbf{F}_H = \lambda_H \mathbf{1}, \quad (8)$$

módon adható meg (Holzapfel, 2000), ahol \mathbf{F}_M a mechanikai terhelésből, \mathbf{F}_H pedig a hőterhelésből származó rész, $\lambda_H(T) > 0$ a hőterhelés által okozott nyúlás. A (8) felbontásból következően az \mathbf{F} tenzor (2) szerinti determinánsa a

$$J = \det \mathbf{F} = J_M J_H = J_M \lambda_H^3 \quad (9)$$

szorzat szerint bontható fel, ahol $J_M = \det \mathbf{F}_M > 0$ és $J_H = \det \mathbf{F}_H = \lambda_H^3 > 0$.

Mivel a hőterhelésből származó deformáció forgásmentes, az alakváltozási gradiens $(1)_2$ alakú poláris felbontása hőrugalmas alakváltozásoknál az

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{V}_M \cdot \mathbf{V}_H \cdot \mathbf{R}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_M \cdot \mathbf{V}_H = \lambda_H \mathbf{V}_M \quad (10)$$

alakban írható, ahol \mathbf{V}_M a mechanikai terheléshez, $\mathbf{V}_H = \lambda_H \mathbf{1}$ pedig a hőterheléshez tartozó nyúlás-tenzorok. Mivel \mathbf{V} pozitív definit és $\lambda_H(T) > 0$, a $(10)_2$ szerint felbontott nyúlástenzor logaritmus nagy alakváltozások esetén is felírható az

$$\ln \mathbf{V} = \ln \mathbf{V}_M + \ln \mathbf{V}_H = \ln \mathbf{V}_M + \ln \lambda_H \mathbf{1} \quad (11)$$

additív formában, ahol $\ln \mathbf{V}_M$ és $\ln \mathbf{V}_H = \ln \lambda_H \mathbf{1}$ a logaritmikusan Hencky-féle nyúlástenzor mechanikai és hőtani része.

2.3. A lineáris hőrugalmasságtan Hencky-típusú, részlegesen inverz anyagegyenletei

A lineáris hőrugalmasságtan Hencky-típusú anyagegyenletei a (7) általános egyenletekből származtathatók a $G(\boldsymbol{\tau}, T)$ Gibbs-féle szabad energia $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ és $T = T_0$ referencia értékek körüli Taylor-sorba fejtésével, feltételezve, hogy $G(\boldsymbol{\tau}, T)$ analitikus függvénye a $\boldsymbol{\tau}$ és T változóknak. A Gibbs-féle energia Taylor sora – másodrendű tagokkal bezárólag – a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{\tau}, T) = G_0 + \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\tau}} \Big|_0 : \boldsymbol{\tau} + \frac{\partial G}{\partial T} \Big|_0 (T - T_0) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} : \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \boldsymbol{\tau}} \Big|_0 : \boldsymbol{\tau} \\ + \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial T} \Big|_0 : \boldsymbol{\tau} (T - T_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \Big|_0 (T - T_0)^2, \end{aligned} \quad (12)$$

ahol a $|_0$ jelölés az előtte álló mennyiség referencia állapotban vett értékére utal. Figyelembe véve a \mathbb{C}_0^{-1} negyedrendű rugalmassági tenzor, valamint a hőtágulási együtthatók $\boldsymbol{\alpha}_0$ másodrendű tenzorának és az állandó feszültségen vett, kezdeti térfogategységre vonatkoztatott c_p fajlagos hőkapacitásnak a

$$\mathbb{C}_0^{-1} = \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \boldsymbol{\tau}} \Big|_0, \quad \boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial T} \Big|_0, \quad c_p = T_0 \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \Big|_0 \quad (13)$$

képletek szerinti – kezdeti állapotbeli – értelmezését, továbbá az alakváltozási tenzor és az entrópia (7) egyenletek alapján értelmezett

$$\ln \mathbf{V}_0 = \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\tau}} \Big|_0, \quad \eta_0 = \frac{\partial G}{\partial T} \Big|_0 \quad (14)$$

kezdeti értékeit, a (12) Gibbs-féle szabad energia a

$$G(\boldsymbol{\tau}, T) = G_0 + \ln \mathbf{V}_0 : \boldsymbol{\tau} + \eta_0 (T - T_0) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} : \mathbb{C}_0^{-1} : \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\alpha}_0 : \boldsymbol{\tau} (T - T_0) + \frac{1}{2} \frac{c_p}{T_0} (T - T_0)^2 \quad (15)$$

alakot vesz fel. A hőtágulási együtthatók tenzorának $\boldsymbol{\alpha}_0 = \boldsymbol{\alpha}_0^T$ szimmetriája és a rugalmassági tenzor $(\mathbb{C}_0^{-1})_{ijkl} = (\mathbb{C}_0^{-1})_{klij} = (\mathbb{C}_0^{-1})_{jikl}$ szimmetria tulajdonsága a (13) összefüggésekből következnek.

A logaritmikusan nyúlástenzorra és az entrópiára vonatkozó (7) szerinti anyagegyenletek a (15) potenciál alkalmazásával a következő alakot veszik fel:

$$\ln \mathbf{V}(\boldsymbol{\tau}, T) = \ln V_0 + \mathbb{C}_0^{-1} : \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\alpha}_0 (T - T_0), \quad (16)$$

$$\eta(\boldsymbol{\tau}, T) = \eta_0 + \boldsymbol{\alpha}_0 : \boldsymbol{\tau} + c_p \frac{T - T_0}{T_0}. \quad (17)$$

Ezek az anyagegyenletek lineáris összefüggéseket adnak a Kirchhoff-féle feszültségi tenzor és a hőmérséklet, mint független állapotjellemzők függvényében. Ugyanakkor a (16) egyenlet nemlineáris (exponenciális) nyúlás–feszültség függvényt jelent, amely alkalmas nemlineáris alakváltozás–feszültség kapcsolat modellezésére is mérsékelt nagy nyúlások esetén (Anand, 1979; Anand, 1986; Bruhns et al., 2001). A (17) entrópia feszültségektől való lineáris függése azt jelzi, hogy a (16)–(17) anyagegyenletek nem alkalmasak a gumyszerű anyagoknál tapasztalható hőrugalmasságtani inverziós jelenség modellezésére.

2.4. Izotrop, hőrugalmas anyagok Hencky-típusú anyagegyenletei

Izotrop anyag esetében a (13)₁ szerinti negyedrendű rugalmassági tenzor a

$$\mathbb{C}_0^{-1} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\mathbb{1} - \frac{1}{3} \mathbf{1}\mathbf{1} \right) + \frac{1}{9K_0} \mathbf{1}\mathbf{1} \quad (18)$$

alakban írható (Nowacki, 1986), ahol μ_0 és K_0 a T_0 referencia hőmérsékleten vett nyírási és térfogati rugalmassági modulusokat jelöli, $(\mathbb{1})_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$ a negyedrendű egységtenzor, δ_{ij} a Kronecker-delta, $(\mathbf{1}\mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$ pedig a másodrendű egységtenzorok tenzoriális szorzatát jelöli. A hőtágulási együtthatók (13)₂ másodrendű tenzora izotrop esetben az

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \alpha_0 \mathbf{1} \quad (19)$$

alakot vesz fel, ahol α_0 az anyag hőtágulási együtthatója. A (18)–(19) összefüggések figyelembevétele után – a G_0 és az $\ln V_0$ értékét az általánosság megsértése nélkül zérusnak választva – a Gibbs-féle (15) szabad energia a következő alakban adható meg izotrop, hőrugalmas anyagra:

$$G(\boldsymbol{\tau}, T) = G_M(\boldsymbol{\tau}) + G_H(p_\tau, T) \quad (20)$$

$$G_M(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{4\mu_0} \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^2 + \frac{1}{2K_0} p_\tau^2, \quad (21)$$

$$G_H(p_\tau, T) = \eta_0 (T - T_0) + 3\alpha_0 p_\tau (T - T_0) + \frac{1}{2} \frac{c_p}{T_0} (T - T_0)^2, \quad (22)$$

ahol $G_M(\boldsymbol{\tau})$ az energia mechanikai terhelésekből, míg $G_H(p_\tau, T)$ az energia hőterhelésekből származó részei. Az előzőek figyelembevételével a logaritmus alakváltozási tenzorra vonatkozó (16) szerinti inverz anyagegyenlet izotrop esetben az

$$\ln \mathbf{V}(\boldsymbol{\tau}, T) = \ln V_M(\boldsymbol{\tau}) + \ln V_H(T) = \frac{1}{2\mu_0} \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \frac{1}{3K_0} p_\tau \mathbf{1} + \alpha_0 (T - T_0) \mathbf{1} \quad (23)$$

formában adható meg, ahol $\ln V_M(\boldsymbol{\tau}) = \partial G_M / \partial \boldsymbol{\tau}$ és $\ln V_H(T) = \partial G_H / \partial T$ az $\ln \mathbf{V}$ tenzor mechanikai és hőtani részét jelölik. Az entrópiára vonatkozó (17) anyagegyenlet az

$$\eta(p_\tau, T) = \eta_0 + 3\alpha_0 p_\tau + c_p \frac{T - T_0}{T_0} \quad (24)$$

alakot veszi fel. A (23) anyagegyenlet szerint a Hencky-féle alakváltozási tenzor három, egymástól független (nem-kapcsolt) rész összegeként képezhető: $\ln \mathbf{V}_M(\boldsymbol{\tau})$ egy deviátor és egy gömbi részből áll, $\ln \mathbf{V}_H(T)$ pedig egy gömbi tenzor.

3. Módosított Hencky-típusú hőrugalmas anyagmodell

A 2.4. részben ismertetett Hencky-típusú, lineáris, hőrugalmas anyagmodell nem alkalmas a gumiszerű, inkompresszibilis anyagokra jellemző hőrugalmasságtani jelenségek (pl. termoelasztikus inverzió, alakváltozással kapcsolt melegedés, illetve hűlés) modellezésére, amely az entrópia feszültségtől és hőmérséklettől való lineáris függésével magyarázható. Ez a fejezet a Hencky-féle modell kis mértékű módosításával egy olyan anyagmodellt mutat be, amely nemlineáris entrópia–feszültség és entrópia–hőmérséklet függvénykapcsolatot eredményez. A nemlineáris modell egyszerűsége lehetővé teszi olyan zárt alakú kifejezések származtatását, amelyek alkalmazhatóak a termoelasztikus inverziós pontot jellemző értékek közelítő meghatározására.

3.1. A módosított Hencky-típusú, részlegesen inverz anyagmodell

Alkalmazva a (Bertóti, 2026) cikk elméleti eredményeit, a módosított Hencky-típusú anyagmodell Gibbs-féle szabad energiája olyan módon is származtatható, hogy a Kirchhoff-féle $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}$ feszültség és a logaritmusos nyúlástenzor kapcsolatát meghatározó nyírási és a térfogati rugalmassági modulusok hőmérséklettől való függését a

$$\mu(T) = J_H \frac{T}{T_0} \mu_0, \quad K(T) = J_H \frac{T}{T_0} K_0, \quad (25)$$

alakban tételezzük fel, ahol $\mu_0 = \mu(T_0)$ és $K_0 = K(T_0)$ a nyírási és a térfogati rugalmassági modulusok kezdeti, T_0 referencia hőmérsékleten vett értékei, J_H pedig az alakváltozási gradiens hőtani részének (9)-beli determinánsa, amelynek hőmérséklettől való függését a széles körben alkalmazott

$$J_H(T) = e^{3\alpha_0(T-T_0)} > 0 \quad (26)$$

összefüggés írja le (lásd pl. Holzapfel, 2000). Behelyettesítve a (25) anyagjellemzőket a (20) potenciálba, a Gibbs-féle szabad energia a következő alakban adódik:

$$G(\boldsymbol{\tau}, T) = G_M(\boldsymbol{\tau}, T) + G_H(p_\tau, T) \quad (27)$$

$$G_M(\boldsymbol{\tau}, T) = \frac{1}{J_H} \frac{T_0}{T} \left(\frac{1}{4\mu_0} \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^2 + \frac{1}{2K_0} p_\tau^2 \right), \quad (28)$$

$$G_H(p_\tau, T) = \eta_0(T - T_0) + 3\alpha_0 p_\tau(T - T_0) + \frac{1}{2} \frac{c_p}{T_0} (T - T_0)^2, \quad (29)$$

amelyben a $G_H(p_\tau, T)$ függvény azonos a lineáris modell (22) potenciáljával. A módosított Hencky-féle hőrugalmas modell anyagegyenletei a (27)–(29) potenciálból (7) alkalmazásával származtathatók, ha figyelembe vesszük a (26)-ból következő $\partial J_H / \partial T = 3\alpha_0 J_H$ deriválási szabályt. A logaritmusos nyúlástenzorra vonatkozó inverz anyagegyenlet és az entrópiára vonatkozó anyagegyenlet az

$$\ln \mathbf{V}(\boldsymbol{\tau}, T) = \frac{1}{J_H} \frac{T_0}{T} \left(\frac{1}{2\mu_0} \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \frac{1}{3K_0} p_\tau \mathbf{1} \right) + \alpha_0 (T - T_0) \mathbf{1}, \quad (30)$$

$$\eta(\boldsymbol{\tau}, T) = \eta_0 - \frac{1 + 3\alpha_0 T}{T} G_M + 3\alpha_0 p_\tau + c_p \frac{T - T_0}{T_0} \quad (31)$$

alakban adódik. Az entrópiát meghatározó (31) anyagegyenlet a jobb oldalon álló második tagban különbözik a lineáris modell (24) egyenletétől. Ez a tag mutatja a módosított modellben az entrópia nemlineáris függését a feszültségmezőtől és a hőmérsékletmezőtől. Inkompesszibilis, hőrugalmas anyag esetén fennállnak az

$$1/K_0 = 0, \quad J_M = 1, \quad J = J_H \quad (32)$$

összefüggések.

3.2. Egytengelyű húzás anyagegyenletei inkompresszibilis anyagra

Az egytengelyű húzás feladatát Descartes-i derékszögű koordináta-rendszerben vizsgáljuk, a koordinátákat x_i , a bázisvektorokat \mathbf{e}_i jelölik. A terhelést jelentő \mathbf{e}_1 irányú Cauchy-féle húzófeszültséget jelölje $\sigma > 0$, a Kirchhoff-féle húzófeszültséget pedig $\tau = J_H \sigma > 0$. A Kirchhoff-féle feszültségi tenzor, valamint annak gömbi és deviátor részei a következők:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad p_\tau = \frac{1}{3} \tau, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\tau}{3} (2\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3). \quad (33)$$

Figyelembe véve a (33) alatti összefüggéseket és a $\text{tr} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^2 = 2\tau^2/3$ értéket, valamint (32)₁-et, a (27)–(29) szerinti Gibbs-féle szabad energia τ húzófeszültségtől és T hőmérséklettől függő alakja a következő:

$$G(\boldsymbol{\tau}, T) = \frac{1}{J_H} \frac{T_0}{T} \frac{1}{6\mu_0} \tau^2 + (\eta_0 + \alpha_0 \tau) (T - T_0) + \frac{1}{2} \frac{c_p}{T_0} (T - T_0)^2. \quad (34)$$

Az axiális irányú logaritmusos nyúlásra vonatkozó anyagegyenlet (30) alapján az

$$\ln \lambda(\boldsymbol{\tau}, T) = \frac{1}{J_H} \frac{T_0}{T} \frac{1}{3\mu_0} \tau + \alpha_0 (T - T_0) \quad (35)$$

alakban, az entrópiára vonatkozó (31) anyagegyenlet pedig az

$$\eta(\boldsymbol{\tau}, T) = \eta_0 - \frac{1}{J_H} \frac{T_0}{T^2} \frac{1 + 3\alpha_0 T}{6\mu_0} \tau^2 + \alpha_0 \tau + c_p \frac{T - T_0}{T_0} \quad (36)$$

alakban adódik egytengelyű húzás esetén.

3.3. Kéttengelyű húzás anyagegyenletei inkompresszibilis anyagra

A kéttengelyű húzás feladatát Descartes-i derékszögű koordináta-rendszerben vizsgálva a terhelést jelentő, \mathbf{e}_1 és \mathbf{e}_2 irányú, azonos nagyságú Cauchy-féle húzófeszültséget $\sigma > 0$, a Kirchhoff-féle húzófeszültséget pedig $\tau = J_H \sigma > 0$ jelölik. A Kirchhoff-féle feszültségi tenzor, valamint annak gömbi és deviátor részei ebben a terhelési esetben a következők:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2), \quad p_\tau = \frac{2}{3} \tau, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\tau}{3} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3). \quad (37)$$

Figyelembe véve a (37) összefüggéseket és a $\tau\tilde{\tau}^2 = 2\tau^2/3$ értéket, valamint (32)₁-et, a (27)–(29) szerinti Gibbs-féle szabad energia τ húzófeszültségtől és T hőmérséklettől függő alakja a következő:

$$G(\tau, T) = \frac{1}{J_H} \frac{T_0}{T} \frac{1}{6\mu_0} \tau^2 + (\eta_0 + 2\alpha_0\tau)(T - T_0) + \frac{1}{2} \frac{c_p}{T_0} (T - T_0)^2. \quad (38)$$

A terhelési irányokkal párhuzamos, azonos nagyságú logaritmikus (fő)nyúlásra vonatkozó anyagegyenlet (30) alapján az

$$\ln\lambda(\tau, T) = \frac{1}{J_H} \frac{T_0}{T} \frac{1}{6\mu_0} \tau + \alpha_0(T - T_0) \quad (39)$$

alakban, az entrópiára vonatkozó (31) anyagegyenlet pedig az

$$\eta(\tau, T) = \eta_0 - \frac{1}{J_H} \frac{T_0}{T^2} \frac{1 + 3\alpha_0 T}{6\mu_0} \tau^2 + 2\alpha_0\tau + c_p \frac{T - T_0}{T_0} \quad (40)$$

alakban adódik kéttengelyű húzás esetén.

4. Eredmények és összevetések inkompresszibilis anyag esetén

A 3. fejezetben ismertetett, módosított Hencky-féle anyagmodell alkalmazhatóságát ebben a fejezetben egy olyan gumyszerű anyag viselkedésén keresztül mutatjuk be, amelynek anyagi paramétereit az 1. táblázat tartalmazza. Ezek a paraméterek azonosak a Treloar-féle kísérletekben (Treloar, 1944; Treloar, 1975) alkalmazott, széles körben vizsgált és tesztelt anyag paramétereivel. Inkompresszibilis anyagról lévén szó, az állandó alakváltozáson és állandó feszültségen vett fajlagos hőkapacitás értékei azonosnak tekinthetők.

1. táblázat. Referencia hőmérséklet és anyagi paraméterek

T_0 [K]	ρ_0 [kg/m ³]	μ_0 [MPa]	α_0 [1/K]	c_p [Nm/kg/K]
293,15	950	0,4225	2,2333 e-4	1830

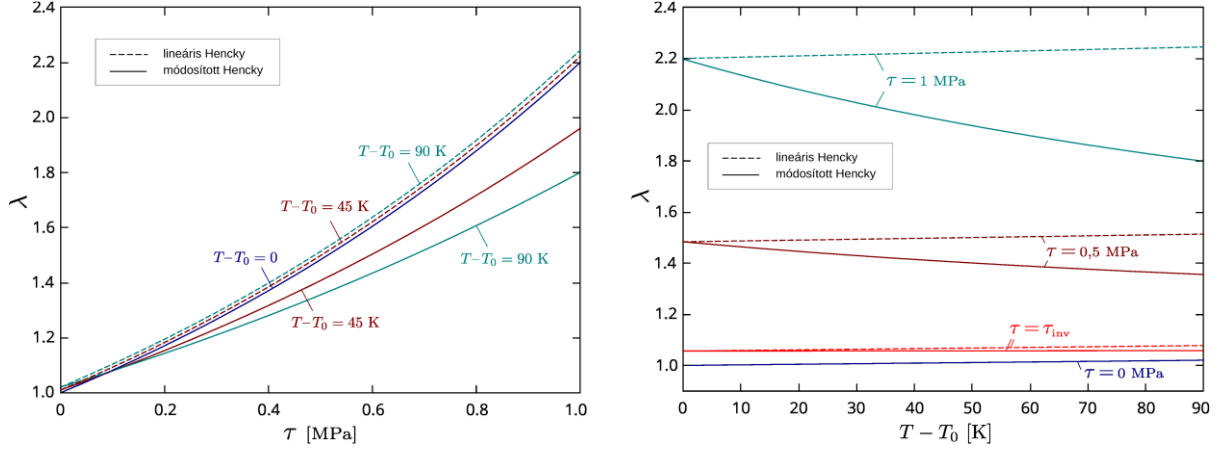
Mivel a 3.2.–3.3. fejezetekben tárgyalt terhelési esetek anyagegyenletei azonos szerkezetűek, részletesebb analitikus vizsgálatot és numerikus eredményeket, illetve összevetéseket csak az egytengelyű húzás esetére mutatunk be.

4.1. Egytengelyű húzás vizsgálata

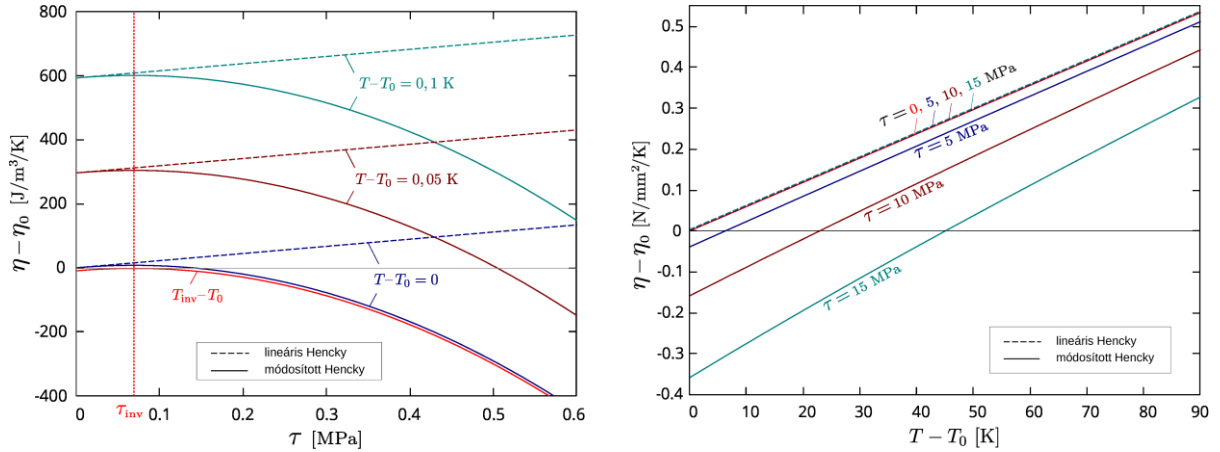
Az axiális irányú, (35) szerinti nyúlás állandó hőmérsékleti értékekhez tartozó, izoterm görbéit és állandó feszültségi értékekhez tartozó, izobár görbéit az 1. ábra szemlélteti és veti össze a lineáris modell (23) szerint számított görbéivel, illetve értékeivel. A (36) entrópia állandó hőmérsékleti értékekhez tartozó, izoterm görbéit és állandó feszültségi értékekhez tartozó, izobár görbéit a 2. ábra mutatja és hasonlítja össze a lineáris modell (24) alapján számítható értékeivel.

Az 1.b) ábra szerint a módosított modellben a termoelasztikus inverziós pont τ_{inv} feszültségi értékéhez tartozó nyúlás a hőmérséklettől függetlenül állandó, $\tau < \tau_{inv}$ konstans feszültségnél a nyúlás a hőmérséklet függvényében nő, $\tau > \tau_{inv}$ állandó feszültség esetében pedig csökken, ellentétben a lineáris modell jelleggörbéivel. Ez azt jelenti, hogy a módosított modell alkalmas a gumyszerű anyagoknál tapasztalható

Gough–Joule-féle jelenség modellezésére, amelynek egyik jellegzetes megnyilvánulása a hő hatására állandó feszültségnek kitett gumiszalag összehúzódása.



1. ábra. Egytengelyű húzás: a) izoterm nyúlás–feszültség görbék $T-T_0 = 0, 45$ és 90 K hőmérsékletnél b) izobár nyúlás–hőmérséklet görbék $\tau = 0, \tau_{inv} = 0,06936, \tau = 0, 5$ és 1 MPa feszültségi értékeknél



2. ábra. Egytengelyű húzás: a) izoterm entrópia–feszültség görbék $T-T_0 = 0, 0,05$ és $0,1$ K hőmérsékleteknél; b) izobár entrópia–hőmérséklet görbék $\tau = 0, 5, 10$ és 15 MPa feszültségi értékeknél

A termoelasztikus inverzió vizsgálata szempontjából a 2.a) ábrán látható diagramnak van szemléletesebb jelentése: az eredeti, lineáris modell entrópia–feszültség görbéi egyenesek, a módosított anyagmodell entrópiájának viszont a terhelés függvényében – minden izoterm görbe esetén – maximuma van. A görbék alapjául szolgáló (36) anyagegyenlet szerint az entrópia a Kirchhoff-féle τ húzófeszültség másodfokú függvénye, amelynek maximális értéke a hőmérséklet függvényében a

$$\frac{\partial \eta(\tau, T)}{\partial \tau} = -\frac{1}{J_H} \frac{T_0}{T^2} \frac{1 + 3\alpha_0 T}{3\mu_0} \tau + \alpha_0 = 0 \quad (41)$$

egyenletből számítható, a

$$\tau(T)|_{\eta_{max}} = J_H \frac{3\alpha_0\mu_0}{1 + 3\alpha_0 T} \frac{T^2}{T_0} \quad (42)$$

összefüggésnek megfelelően. Ez azt jelenti, hogy minden izoterm görbéhez tartozik egy olyan (inverziós) feszültségi érték, amelynél az entrópiának maximuma van. Ezek az értékek az $\eta = \eta_0$ entrópia közelében gyakorlatilag megegyeznek, és a 2.a) ábra entrópia–feszültség síkján berajzolt, a maximális entrópia pontjait összekötő függőleges egyenesen helyezkednek el (a feszültségi pontok vizsgált hőmérsékleti tartományon kívül is nagyon jó közelítéssel függőleges egyenest alkotnak). Az entrópia különböző hőmérsékletre tartozó maximális értékét a (36) egyenlet adja a (42) függvény behelyettesítése után:

$$\eta_{max}(T) = \eta_0 + J_H \frac{3\alpha_0^2\mu_0}{2(1 + 3\alpha_0 T)} \frac{T^2}{T_0} + c_p \frac{T - T_0}{T_0}. \quad (43)$$

Ez a függvény az $\eta = \eta(\tau, T)$ felületen a maximális értékek „gerincvonalát” adja, amelynek vetülete a 2.b) ábrán látható entrópia–hőmérséklet síkon gyakorlatilag azonos a $\tau = 0$ izobár görbével (legfelső görbe), az entrópia–feszültség síkra vonatkozó vetülete pedig a már említett, 2.a) ábra szerinti függőleges egyenest adja. A logaritmikus nyúlás maximális entrópia melletti izoterm görbéi a (42) összefüggés (35) anyagegyenletbe történő behelyettesítésével kaphatók meg:

$$\ln\lambda(T)|_{\eta_{max}} = \frac{\alpha_0 T}{1 + 3\alpha_0 T} + \alpha_0(T - T_0). \quad (44)$$

A termoelasztikus inverziós pont adiabatikus folyamatra van értelmezve: az $\eta(\tau, T) = \eta_0$ sík egy olyan $T = T(\tau)$ (sík)görbét határoz meg, amelynek minimum pontja adja a termoelasztikus inverziós pont $T = T_{inv}$ hőmérsékleti értékét és $\tau = \tau_{inv}$ feszültségi helyét. Ez az inverziós pont a 2.a) ábra szerinti síkon egy olyan $T = T_{inv}$ hőmérsékleti értékhez tartozó izoterm görbén található (legalsó görbe), amelynek $\eta_{max} = \eta_0$ pontja az $\eta - \eta_0 = 0$ abszcisszán helyezkedik el, a hozzá tartozó feszültség pedig a $\tau = \tau_{inv}$ inverziós érték. Az inverziós pont T_{inv} hőmérséklete a (43) függvény $T = T_{inv}$ helyen vett $\eta_{max}(T_{inv}) = \eta_0$ értékéből számítható, amely átrendezés után az

$$\alpha_0^2 T_{inv}^2 + (1 + 3\alpha_0 T_{inv}) \frac{2c_p(T_{inv} - T_0)}{3J_H(T_{inv})\mu_0} = 0 \quad (45)$$

nemlineáris algebrai egyenletre vezet. A T_{inv} inverziós hőmérséklet ismeretében az inverziós pontbeli feszültség értéke a (42) összefüggésből a

$$\tau_{inv} = \tau(T_{inv})|_{\eta_0} = J_H(T_{inv}) \frac{3\alpha_0\mu_0}{1 + 3\alpha_0 T_{inv}} \frac{T_{inv}^2}{T_0} \quad (46)$$

módon, az inverziós nyúlás pedig a (44) összefüggésből, a

$$\ln\lambda_{inv} = \ln\lambda(T_{inv})|_{\eta_0} = \frac{\alpha_0 T_{inv}}{1 + 3\alpha_0 T_{inv}} + \alpha_0(T_{inv} - T_0) \quad (47)$$

képlet szerint számítható. Az 1. táblázat anyagi paramétereivel számolt inverziós pontbeli értékek a következők:

$$T_{inv} - T_0 = -1,306 \text{ e} - 03 \text{ K}, \quad \tau_{inv} = 6,936 \text{ e} - 02 \text{ MPa}, \quad \ln\lambda_{inv} = 1,0562. \quad (48)$$

Az adiabatikus húzáshoz tartozó feszültség–hőmérséklet függvény, illetve görbe az entrópiára vonatkozó (36) anyagegyenletből, az $\eta(\tau, T) = \eta_0$ állandó feltétel alkalmazásával származtatható, illetve ábrázolható. Bevezetve a

$$\mu_T(T) = \frac{\mu_0}{1 + 3\alpha_0 T} \quad (49)$$

jelölést, az $\eta(\tau, T) = \eta_0$ sík által meghatározott adiabatikus görbén a Kirchhoff-féle feszültség és a hőmérséklet kapcsolatát a τ -ra vonatkozó, (36) szerinti másodfokú egyenlet megoldásával a

$$\tau_{1,2}(T) = J_H 3\mu_T \frac{T}{T_0} \left(\alpha_0 T \pm \sqrt{\alpha_0^2 T^2 + \frac{2c_p(T - T_0)}{3J_H \mu_T}} \right) \quad (50)$$

függvény adja meg, a logaritmusos nyúlás és a hőmérséklet kapcsolata pedig (50) behelyettesítése után a (35) anyagegyenletből adódik:

$$\ln \lambda_{1,2}(T) = \frac{1}{1 + 3\alpha_0 T} \left(\alpha_0 T \pm \sqrt{\alpha_0^2 T^2 + \frac{2c_p(T - T_0)}{3J_H \mu_T}} \right) + \alpha_0(T - T_0). \quad (51)$$

Az (50) függvény által meghatározott síkgörbe két részből tevődik össze a feszültség–hőmérséklet síkon: minden T hőmérsékletre két feszültségi érték (τ_1 és τ_2) tartozik, kivéve a görbe T szerinti minimum pontjához tartozó $T = T_{\text{inv}}$ hőmérsékleti értéket és a hozzá tartozó, egyetlen $\tau_{\text{inv}} = \tau_1(T_{\text{inv}}) = \tau_2(T_{\text{inv}})$ feszültségi értéket. Ez a pont az $\eta(\tau, T) = \eta_0$ görbéhez tartozó, egyetlen termoelasztikus inverziós pont, T_{inv} pedig a ponthoz tartozó inverziós hőmérséklet, amelynek pontos értéke az (50) összefüggésből, az

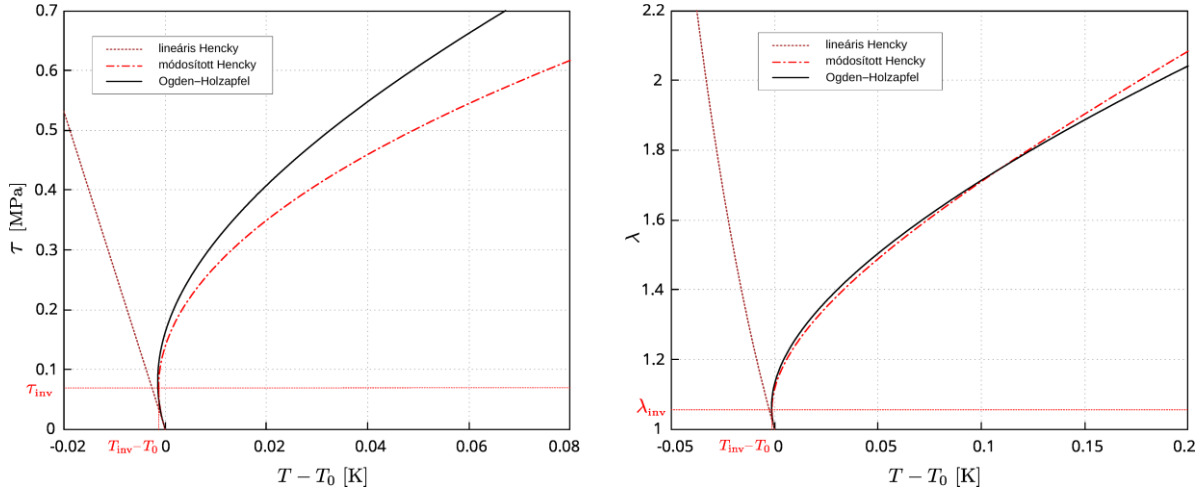
$$\alpha_0^2 T_{\text{inv}}^2 + \frac{2c_p(T_{\text{inv}} - T_0)}{3J_H(T_{\text{inv}}) \mu_T(T_{\text{inv}})} = 0 \quad (52)$$

nemlineáris egyenlet megoldásával számítható. Ez az egyenlet természetesen megegyezik az entrópia maximuma alapján korábban származtatott (45) egyenlettel. Az (51) függvény által meghatározott síkgörbe ugyancsak két részből tevődik össze a nyúlás–hőmérséklet síkon, és a görbe T szerinti minimum pontja ugyancsak az (52) egyenletből számítható, mivel az (50) és az (51) függvényekben a görbeágak közötti eltérést meghatározó gyökjel alatti kifejezés ugyanaz.

A termoelasztikus inverziós pont T_{inv} hőmérsékletének ismeretében a ponthoz tartozó τ_{inv} Kirchhoff-féle feszültség és az $\ln \lambda_{\text{inv}}$ logaritmusos nyúlás értéke az (50) és (51) összefüggésekből számítható; ezek értelemszerűen megegyeznek az entrópia maximumának vizsgálatával származtatott, (46) és (47) szerinti összefüggésekkel.

Az előzőekben származtatott feszültség–hőmérséklet és nyúlás–hőmérséklet függvények görbéit – az 1. táblázatban megadott anyagi paraméterek alkalmazásával – a 3. ábra szemlélteti az inverziós pont környezetében. Az ábra feltünteti a 2.4. pontban összefoglalt, a Hencky-féle eredeti, lineáris modellel számított, inverziós pont nélküli görbéket, valamint a Helmholtz-féle szabad energián alapuló, Ogden–Holzapfel-féle hatparaméteres, nemlineáris anyagmodellel (Holzapfel, 2000), mint referencia modellel számított feszültség–hőmérséklet és nyúlás–hőmérséklet görbéket. Látható, hogy a mérsékelt nagy nyúlások tartományában ($\lambda < 2$) a módosított Hencky-típusú hőrugalmas modell jó egyezést mutat a nemlineáris referencia megoldással.

Megjegyzés. A Helmholtz-féle szabad energián alapuló modelleknél a nyúlás a független változó, ebben az esetben a $T(\lambda)$ függvény származtatható. Az (51) szerinti $\lambda(T)$ függvénnyel való összevetetőség céljából a (Holzapfel, 2000) alapján számított $T(\lambda)$ referencia megoldás a 3. ábrán felcserélt tengelyeken került ábrázolásra.



3. ábra. Adiabaticus egytengelyű húzás: a) feszültség–hőmérséklet diagram; b) nyúlás–hőmérséklet diagram

4.1.1. Analitikus közelítő összefüggések a termoelasztikus inverziós pontra

A termoelasztikus inverziós pontra vonatkozó (46)–(47) és (52) összefüggésekből kiindulva analitikus, nagy pontosságú közelítő összefüggések származtathatók, ha figyelembe vesszük, hogy az inverziós pont hőmérsékleti értéke nagyon közel esik a T_0 referencia hőmérsékletéhez (gumiszerű anyagok esetén $T_{inv} - T_0$ általában 10^{-3} nagyságrendű). Alkalmazva a $T_{inv} \approx T_0$ közelítést, az inverziós pontbeli feszültség és logaritmikus nyúlás közelítő értéke – tekintettel a $J_H(T_0) = 1$ értékre is – a (46) és (47) képletekből számíthatók:

$$\tau_{inv} \cong \frac{3\mu_0\alpha_0 T_0}{1 + 3\alpha_0 T_0}, \quad (53)$$

$$\ln \lambda_{inv} \cong \frac{\alpha_0 T_0}{1 + 3\alpha_0 T_0}, \quad (54)$$

a két közelítő érték között az $\ln \lambda_{inv} = \tau_{inv} / 3\mu_0$ kapcsolat áll fenn. A $T_{inv} - T_0$ hőmérsékletre vonatkozó közelítő érték az (52) nemlineáris egyenletből a $J_H(T_{inv}) \approx 1$, $\mu_T(T_{inv}) \approx \mu_T(T_0)$, $T_{inv}^2 \approx T_0^2$ közelítések alkalmazásával származtatható a

$$T_{inv} - T_0 \cong -\frac{3\mu_0\alpha_0^2 T_0^2}{2c_p(1 + 3\alpha_0 T_0)} = -\frac{T_0}{c_p} [\eta_{\max}(T_0) - \eta_0] \quad (55)$$

alakban. Az inverziós hőmérséklet és az inverziós feszültség, valamint az inverziós nyúlás közelítő értékei között az előzőek alapján a

$$T_{\text{inv}} - T_0 \cong -\frac{\alpha_0 T_0}{2c_p} \tau_{\text{inv}} = -\frac{3\mu_0 \alpha_0 T_0}{2c_p} \lambda_{\text{inv}} \quad (56)$$

kapcsolat áll fenn. A közelítő képletek pontossága a 2. táblázat alapján ítéltető meg, amely az inverziós pontot jellemző, (46)–(47) és (52) összefüggésekkel számított értékeket összeveti a (53)–(55) közelítésekkel, valamint az Ogden–Holzapfel-féle modell alapján számított értékekkel.

2. táblázat. Egytengelyű húzás: a termoelasztikus inverziós pontot jellemző értékek

modell/inverziós pont	λ_{inv}	τ_{inv} [MPa]	$T_{\text{inv}} - T_0$ [K]
analitikus közelítés	1,0562	0,069359	–0,001306
numerikus megoldás	1,0562	0,069360	–0,001306
Ogden–Holzapfel (Holzapfel, 2000)	1,0637	0,079856	–0,001484

Megjegyezzük, hogy az inverziós pontbeli nyúlásra vonatkozóan az Ogden–Holzapfel-féle modell a $\lambda_{\text{inv}} \approx (1 + 3\alpha_0 T_0)^{1/3} = 1,0616$ becslést adja (lásd Holzapfel, 2000, p. 351), míg az ugyancsak a Helmholtz-féle szabad energián alapuló Chadwick-féle modell (Chadwick, 1974) a $\lambda_{\text{inv}} \approx 1 + \alpha_0 T_0 = 1,0655$ becslést adja. A 2. táblázat alapján megállapítható, hogy a Gibbs-féle szabad energián alapuló, módosított Hencky-típusú (illesztési paramétereket nem tartalmazó) modell az egytengelyű húzáshoz tartozó inverziós pontbeli nyúlást 0,7%-os hibával közelíti a hat illesztési paramétert tartalmazó Ogden–Holzapfel-féle modellhez képest.

4.2. Kéttengelyű húzás eredményei

Az egytengelyű és a kéttengelyű húzás 3.2 és 3.3 pontokban származtatott anyagegyenleteiben az együtthatók csak konstans szorzókban különböznek egymástól. Ez azt jelenti, hogy kéttengelyű húzás esetén a terhelés irányába eső, (39) szerinti nyúlások izoterm és izobár görbéi ugyanolyan jellegűek, mit az 1. ábrán szemléltetett görbék. Ugyanez vonatkozik a (40) szerinti entrópia izoterm és izobár görbéire is, amelyek jellegre a 2. ábra görbéivel egyeznek meg, így ezen ábrák közlésétől eltekintünk.

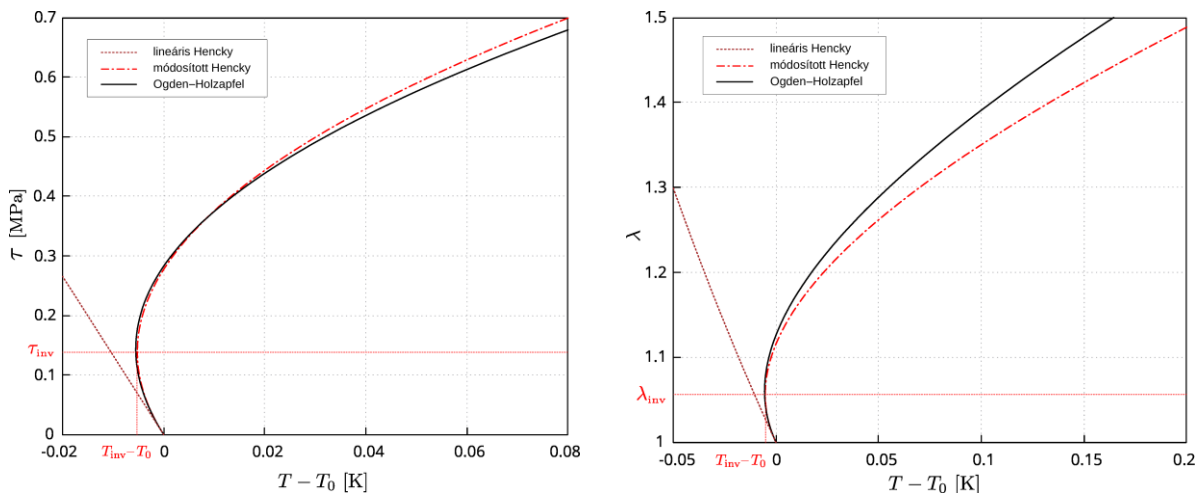
A termoelasztikus inverziós pontra vonatkozó összefüggések származtatása ugyancsak megegyezik a 4.1 pontban elmondottakkal; az inverziós pontot jellemző nyúlás, feszültség és hőmérséklet értékeket a 3. táblázat foglalja össze. Megállapítható, hogy az inverziós nyúlás értéke megegyezik az egytengelyű húzásnál számított értékkel, míg a feszültségi érték a kétszerese, a referencia hőmérséklethez viszonyított inverziós hőmérséklet értéke pedig négyszerese az egytengelyű húzásnál számított értékeknek. Az Ogden–Holzapfel-féle referenciamodell értékei ugyanilyen arányokat mutatnak.

3. táblázat. Kéttengelyű húzás: a termoelasztikus inverziós pontot jellemző értékek

modell/inverziós pont	λ_{inv}	τ_{inv} [MPa]	$T_{\text{inv}} - T_0$ [K]
analitikus közelítés	1,0562	0,13872	–0,0052239
numerikus megoldás	1,0562	0,13872	–0,0052238
Ogden–Holzapfel (Holzapfel, 2000)	1,0604	0,14372	–0,0055263

Adiabatikus kéttengelyű húzás esetén a feszültség–hőmérséklet és a nyúlás–hőmérséklet függvények görbéit – az 1. táblázatban megadott anyagi paraméterek alkalmazásával – a 4. ábra szemlélteti az

inverziós pont környezetében. Az ábra feltünteti a Hencky-féle lineáris modell (2.4. fejezet) inverziós pontot nem tartalmazó jelleggörbéit, valamint a Helmholtz-féle szabad energián alapuló Ogden–Holzapfel-féle hatparaméteres, nemlineáris anyagmodellel (Holzapfel, 2000), mint referencia modellel számított görbéket. Megállapítható, hogy amíg egytengelyű húzás esetében a nyúlások voltak közelebb a referencia megoldáshoz (a vizsgált, mérsékelt nagy nyúlások tartományában), addig ebben a terhelési esetben a feszültségek mutatnak pontosabb egyezést a referencia modellel számított értékekkel.



4. ábra. Adiabatikus kéttengelyű húzás: a) feszültség–hőmérséklet diagram; b) nyúlás–hőmérséklet diagram

5. Összefoglalás

A logaritmikus nyúlástenzor alkalmazásával felépített, Hencky-típusú lineáris anyagmodellek előnyösen alkalmazhatók mérsékelt nagy rugalmas alakváltozások modellezésére és fémek anyagok hőrugalmasságtani viselkedésének leírására. Ugyanakkor a gumyszerű anyagoknál tapasztalható nemlineáris hőrugalmasságtani jelenségek – mint pl. a termoelasztikus inverzió és a kapcsolódó, Gough–Joule-féle jelenségként ismert hatások – előrejelzésére és modellezésére a Hencky-típusú anyagmodellek sem alkalmas, annak ellenére sem, hogy a termoelasztikus inverzió környezetében az alakváltozások viszonylag kicsinek, a hőmérséklet változása pedig kifejezetten kicsinek mondhatók. Ez a cikk a Gibbs-féle szabad energián alapuló, Hencky-típusú, részlegesen inverz anyagmodell olyan egyszerű módosítását mutatja be, amely alkalmas az említett nemlineáris termoelasztikus jelenségek modellezésére és vizsgálatára. A javasolt modell viszonylagos egyszerűsége lehetővé teszi olyan zárt, analitikus összefüggések származtatását is, amelyek a gumyszerű, összenyomhatatlan anyagok termoelasztikus inverziós pontjának feszültségi, nyúlási és hőmérsékleti jellemzőire jó közelítéseket, illetve megoldásokat szolgáltatnak.

Irodalom

- [1] Nowacki, W. (1986). *Thermoelasticity* (2nd edition). PWN-Polish Scientific Publishers and Pergamon Press, Warsaw & Oxford. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-03247-1>
- [2] Šilhavý, M. (1997). *The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media*. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03389-0>

- [3] Bustamante, R., Rajagopal, K. R. (2021). A new type of constitutive equation for nonlinear elastic bodies. Fitting with experimental data for rubber-like materials. *Proceedings of the Royal Society, A* 477, 20210330. <https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0330>
- [4] Bustamante, R. (2021). A note on a new constitutive model for rubber-like solids. *Mechanics Research Communications*, 117, 103775. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2021.103775>
- [5] Bertóti, E. (2023). A non-linear complementary energy-based constitutive model for incompressible isotropic materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 148, 104262. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104262>
- [6] Průša, V., Rajagopal, K. R. & Tůma, K. (2020). Gibbs free energy based representation formula within the context of implicit constitutive relations for elastic solids. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 121, 103433. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103433>
- [7] Bustamante, R., Shariff, M. H. B. M. (2024). On a class of nonlinear isotropic thermoelastic body that is non-Green elastic: applications to large elastic deformations. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 76(12), 435–470. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbae001>
- [8] Bertóti, E. (2026). A non-linear thermoelastic constitutive model for isotropic materials based on Gibbs free energy. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 181, 105274. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2025.105274>
- [9] Anand, L. (1979). On H. Hencky's approximate strain-energy function for moderate deformations. *Journal of Applied Mechanics. Transactions ASME*, 46(1), 78–82. <https://doi.org/10.1115/1.3424532>
- [10] Anand, L. (1986). Moderate deformations in extension-torsion of incompressible isotropic elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 34(3), 293–304. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(86\)90021-9](https://doi.org/10.1016/0022-5096(86)90021-9)
- [11] Bruhns, O. T., Xiao, H. & Meyers, A. (2001). Constitutive inequalities for an isotropic elastic strain-energy function based on Hencky's logarithmic strain tensor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 457, 2207–2226. <https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0818>
- [12] Flory, P. J. (1961). Thermodynamic relations for high elastic materials. *Transactions of the Faraday Society*, 57, 829–838. <https://doi.org/10.1039/TF9615700829>
- [13] Criscione, J. C., Humphrey, J. D., Douglas, A. S. & Hunter, W. C. (2000). An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(12), 2445–2465. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(00\)00023-5](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(00)00023-5)
- [14] Hill, R. (1968). On constitutive inequalities for simple materials–I. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(4), 229–242. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(68\)90031-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(68)90031-8)
- [15] Hoger, A. (1987). The stress conjugate to logarithmic strain. *International Journal of Solids and Structures*, 23(12), 1645–1656. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(87\)90115-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(87)90115-6)
- [16] Xiao, H., Chen, L.-S. (2003). Hencky's logarithmic strain and dual stress-strain and strain-stress relations in isotropic finite hyperelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 40(6), 1455–1463. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00653-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00653-4)
- [17] Xiao, H., Bruhns, O. T. & Meyers, A. (2004). Explicit dual stress-strain and strain-stress relations of incompressible isotropic hyperelastic solids via deviatoric Hencky strain and Cauchy stress. *Acta Mechanica*, 168, 21–33. <https://doi.org/10.1007/s00707-004-0074-5>
- [18] Holzapfel, G. A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons, New York.

- [19] Treloar, L. R. G. (1944). Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation. *Transactions of the Faraday Society*, 40(4), 59–70. <https://doi.org/10.1039/tf9444000059>
- [20] Treloar, L. R. G. (1975). *The Physics of Rubber Elasticity*. Oxford University Press, London.
- [21] Chadwick, P. (1974). Thermo-mechanics of rubberlike materials. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* 276, 371–403. <https://doi.org/10.1098/rsta.1974.0026>