

# KÜLSŐ PEREMÉN KÖRHENGERHÉJJAL MEREVÍTETT KÖRLEMEZEK STABILITÁSVIZSGÁLATÁNAK EGYES KÉRDÉSEI

**Burmeister Dániel**

tanársegéd, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék  
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: [daniel.burmeister@uni-miskolc.hu](mailto:daniel.burmeister@uni-miskolc.hu)

## **Összefoglalás**

A jelen tanulmány fő célja külső peremén körhengerhéjjal merevített körlemezek esetén a szerkezet stabilitásvizsgálata. Feltételezzük, hogy a szerkezetet a körlemez síkjában fekvő konstans sugárirányú erőrendszer terheli. Feltételezzük továbbá, hogy a kihajlási alak tengelyszimmetrikus és hogy alkalmazhatók a vékony lemezek és héjak elméletének összefüggései. A két szerkezeti elemmel kapcsolatos mezőegyenletek áttekintése és a folytonossági feltételek tisztázása után meghatározzuk a szerkezet kritikus terhelését. Az eredmények alkalmazhatóságát numerikus példák szemléltetik.

**Kulcsszavak:** stabilitás vizsgálat, kritikus terhelés, héjjal merevített körlemez, körhengerhég

## **Abstract**

The main objective of the present paper is the stability investigation of shell-stiffened circular plates subjected to a constant radial load in the middle plane of the plate. We shall assume that the deflections due to the load are axisymmetric. It is also assumed that we can apply theory of thin plates and shells. After presenting the field equations of the plate and shell and clarifying the continuity conditions between the two structural elements we shall determine the critical load of the structure. The numerical examples presented prove the applicability of the results.

**Keywords:** stability investigation, critical load, shell-stiffened circular plate, cylindrical shell

## **1. Bevezetés**

Mérnöki szerkezetekben számos esetben találkozhatunk saját síkjukban is terhelt szerkezeti elemekkel: rudakkal, lemezekkel avagy héjakkal. Ezek közül a feladatok közül jelentőségét, és lehetséges alkalmazásait is tekintve kitüntetett szerepe van a saját síkjában terhelt lemezek stabilitási feladatainak.

Ami a körlemezek stabilitási problémáját illeti, érdemes megemlíteni, hogy a kérdéskörrel foglalkozó az első cikk 1891-ben jelent meg [1]. Kiemeljük ehelyütt még Nádai stabilitási kérdésekkel foglalkozó cikkét [2]. Megjegyezzük továbbá, hogy a kérdéskörben számos tanulmány született azóta, de a jelen bevezetésben csak azokat emeljük ki, amelyek a szerkezeti merevítések hatásával is foglalkoznak.

A körlemez merevebbé tehető, ha azt különböző módokon, pl. bordázás, avagy az átmérő mentén elhelyezett merevítés, avagy a lemez peremére rögzített gyűrű – ezt görbe rúd-ként érdemes modellezni – avagy a lemez peremén elhelyezett körhengerháj segítségével ellenállóbbá tesszük a horpadással szemben.

Ami az irodalmi előzményeket illeti kiderült, hogy relatíve alacsony a merevített körlemez feladataival foglalkozó publikációk száma. Rugalmas megfogással ellátott körlemez feladatát Thevendran vizsgálta [3]. Körlemez pereme mentén elhelyezett merevítés hatásával Turvay és szerzőtársai foglalkoztak [4]. Az idézett cikk kísérleti eredményekről is beszámol, de stabilitási kérdésekkel ugyanakkor nem foglalkozik. A szerző és munkatársai egy másik tanulmánya az átmérője mentén merevített körlemez egyes feladatait vizsgálja, de stabilitási kérdésekkel ez a cikk sem foglalkozik [5].

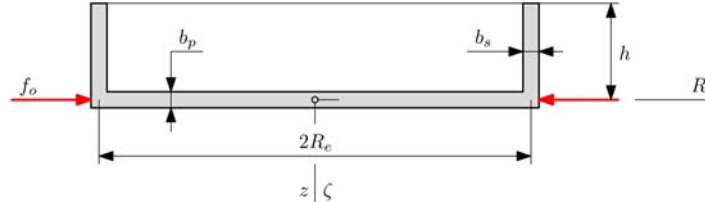
A körlemez peremén elhelyezett merevítő körgyűrű hatását a körlemez stabilitására Frostig és Simistes tanulmánya vizsgálja [6]. Kiderül azonban e cikk irodalomjegyzékéből, hogy a szerzők nem ismerik Szilassy István idevágó eredményeit [7], [8]. Szilassy István egyetemi doktori értekezésében [7] és egy későbbi cikkében [8] foglalkozott a külső peremén körhengerhájjal merevített körlemez egyes stabilitási feladataival. Az első feladat egy tömör, a második feladat, pedig egy lyukas körlemez egy peremértékfeladata volt. A szerző feltételezte, hogy (i) a lemez síkjában működő terhelés merev és tengelyszimmetrikus (ii) továbbá, hogy a körlemez és a körhengerháj alakváltozása ugyancsak tengelyszimmetrikus, illetve közölt egyenleteket a nem tengelyszimmetrikus alakváltozás esetére is. A szerző a körlemez esetén a szögelfordulásra felírt differenciálegyenlet megoldását, a körhengerháj esetén pedig vékony héjak elméletén alapuló megoldást használta fel. A körhengerháj a lemez két oldalán, a középsíkjára szimmetrikusan helyezkedik el. Szilassy vizsgálatai után a következő kérdések vethetők fel: (a) érdemes a megoldható peremértékfeladatok körének bővítése miatt a körlemez esetén a lemez síkjára merőleges elmozdulásra felírt differenciálegyenletet használni, mivel (b) az elmozduláskoordinátára felírt lemezegyenlet segítségével további megtámasztások (peremértékfeladatok) esetén meg lehet határozni a kritikus terhelést; (c) érdemes lenne megvizsgálni mi történik, ha a terhelés tengelyszimmetrikus, de a vele társuló alakváltozás azonban nem, (d) és végül további kérdésként vetődik fel, mi történik, ha a terhelés sem tengelyszimmetrikus.

A jelen tanulmány az (a) és (b) alatt megfogalmazott feladatok megoldását tekinti feladatának, arra az esetre, amikor a merevítő körhengerháj pereme csatlakozik a körlemez külső pereméhez, azaz a hég csak a lemez középfelületének egyik oldalán helyezkedik el. A tanulmány szövegét öt szakaszba szerveztük. A 2. A feladat megfogalmazása című szakasz röviden ismerteti a megoldandó fizikai feladatot. A feladat egyenletei című 3. szakasz mind a körhengerháj, mind pedig a körlemez esetére áttekinti a feladat mezőegyenleteit, valamint a vonatkozó perem és illesztési feltételeket. A 4. szakasz a merevített tömör körlemez stabilitás-vizsgálatával foglalkozik. Megadja zárt alakban a kritikus terhelést szolgáltatató nemlineáris egyenletet, és közli a megoldásokat is

## 2. A feladat megfogalmazása

Az 1. ábra a vizsgált szerkezet metszeti képe. Maga a szerkezet tömör vagy lyukas körlemezről – az ábra az utóbbi esetre szemlélteti a viszonyokat – és a lemez külső peremére erősített merevítő héjból áll. A lemez és a hég középfelületei az  $R_e$  sugarú körben metszik egymást. Ezt sugarat tekintjük a körlemez külső pereméhez tartozó sugárnak. A lemez

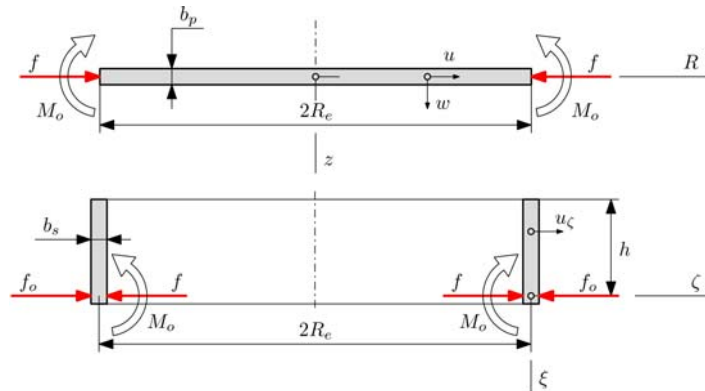
vastagságát  $b_p$ , a körhengerháj vastagságát pedig  $b_s$  jelöli. A körhengerháj lemez középsíkja feletti (alatti) mérete  $h$ . A szerkezetet a lemez középsíkjában fekvő sugárirányú és állandó intenzitású merev (iránytartó) megoszló erőrendszer terheli. Ennek  $f_o$  a sűrűsége.



1. ábra. Geometriai és terhelési viszonyok

Feltételezzük, hogy a lemez és a hég egyaránt vékony, következésképp használhatjuk a Kirchhoff-féle lemez- és hégmodellt. További feltevés hogy a feladat lineáris mind a geometria, mind pedig az anyagtörvény tekintetében. Hőhatásoktól eltekintünk. A lemez és a hég ugyanabból a homogén izotróp anyagból készült:  $E$  a rugalmassági modulus,  $\nu$  a Poisson szám.

A szerkezet tengelyszimmetrikus és kismértékű rugalmas alakváltozását vizsgálva a következő két kérdésre keressük a választ: (a) mekkora a szerkezet kritikus terhelése; (b) milyen mértékű a merevítő körhengerháj hatása a kritikus teherre.



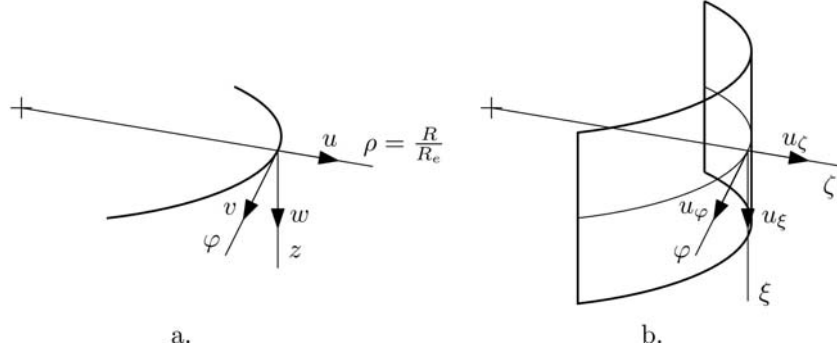
2. ábra. A szétválasztott szerkezeti elemek

A kitűzött feladat megoldása érdekében szétválasztjuk gondolatban két részre a szerkezetet. Ennek megfelelően a 2.a. ábra a körlemez, a 2.b. ábra pedig a körhengerhajt szemlélteti.

A körlemezhez kötött jobbsodratú  $(R, \varphi, z)$  henger-koordinátarendszerben a  $z=0$  sík a lemez középfelülete. A 3.a. ábra az  $R_e$  körön szemlélteti a vonatkozó koordinátavonalakat. A középfelület pontjainak  $R$  és  $z$  irányú elmozdulását rendre  $u$  és  $w$  jelöli. A 2.a. ábra feltünteti a körhengerhájról átadódó  $f$  sugárirányú és állandó intenzitású belső erőt:  $N_R = -f$ ; továbbá a körhengerhájról átadódó  $M_o$  hajlítónyomatékot is.

A körhengerháj esetén a  $(\zeta, \varphi, \zeta)$  hengerkoordináta-rendszert használjuk majd. Ebben a koordinátarendszerben  $\zeta = z$  és  $\zeta = 0$  a körhengerháj középfelületén. A  $\varphi$  polárszög mindkét

koordináta-rendszerben azonos (de a tengelyszimmetria miatt nem lesz szerepe). A 3.b. ábra ismét az  $R_e$  körön szemlélteti a koordinátavonalakat.



3. ábra. Koordinátavonalak a két koordináta-rendszerben

A körhengerháj tengelyszimmetrikus alakváltozása esetén egyedül az  $u_\zeta$  elmozdulás-koordináta nem zérus. Nyilvánvaló, hogy  $u=u(R)$ ,  $w=w(R)$  és  $u_\zeta=u_\zeta(\zeta)$ . A 2.b. ábra, összhangban a 2.a. ábrával, feltünteti a körhengerhájra működő külső és belső erőket is.

### 3. A feladat egyenletei

#### 3.1. Egyenletek a körhengerhájra

Ismeretes, hogy tengelyszimmetrikus viszonyok mellett az  $u_\zeta$  sugárirányú elmozdulásmező

$$\frac{d^4 u_\zeta}{d\xi^4} + 4\beta^4 u_\zeta = \frac{1}{I_{1s} E_{1s}} \left( -p - \nu_s \frac{N_\xi}{R_e} \right) \lim_{x \rightarrow \infty} \quad (1)$$

differenciál-egyenletnek köteles eleget tenni [9], ahol  $p$  a háj középfelületén működő sugárirányú megoszló terhelés állandónak tekintett sűrűsége (a jelen esetben zérus),  $N_\xi$  a  $\zeta$  irányban működő élerő (a jelen esetben ez is zérus),  $\nu_s$  és  $E_s$  pedig a háj anyagának a Poisson száma és rugalmassági modulusa – egyelőre nem használjuk ki, hogy azonos a két szerkezeti elem anyaga –, továbbá

$$\nu_o = \sqrt{3(1-\nu_s^2)}, \quad \beta = \nu_o \sqrt{\frac{R_e}{b_s} \frac{1}{R_e}}, \quad I_{1s} = b_s^3 / 12, \quad E_{1s} = E_s / (1-\nu_s^2). \quad (2)$$

Az (1) egyenlet megoldását a következő alakban keressük a  $\xi \in [0, h]$  intervallumban:

$$u_\zeta(\xi) = \sum_{i=1}^4 a_i V_i(\beta\xi) + u_{\zeta p}; \quad u_{\zeta p} = -p / \beta^4 I_{1s} E_{1s} = 0, \quad (3)$$

ahol  $V_i(\beta\xi)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) az ún. Krülov-függvényeket jelöli – ezek definícióját és tulajdonságait illetően lásd a Függelék (33) és (34) képleteit.

A megoldás ismeretében

$$Q_\zeta = I_{1s} E_{1s} \frac{d^3 u_\zeta}{d\xi^3} \quad \text{és} \quad M_\xi = -I_{1s} E_{1s} \frac{d^2 u_\zeta}{d\xi^2} \quad (4)$$

képletekkel számítható a nyíróerő illetve az élnyomaték.

A héj középfelületének  $v$  elmozdulását két részfeladat szuperpozíciójából állítjuk elő. Az alábbiak feladatonként tekintik át a perem és illesztési feltételeket:

1. részfeladat: A héjat csak az  $f_o$  és  $f$  terheli. A vonatkozó peremfeltételek a

$$\begin{aligned} Q_\zeta \big|_{\xi=0} &= f - f_o, & M_\xi \big|_{\xi=0} &= 0, \\ Q_\zeta \big|_{\xi=h} &= 0, & M_\xi \big|_{\xi=h} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

alakban írhatók fel.

2. részfeladat: A héjat ez esetben csak az  $M_o$  nyomaték terheli. A vonatkozó peremfeltételek a

$$\begin{aligned} Q_\zeta \big|_{\xi=0} &= 0, & M_\xi \big|_{\xi=0} &= -M_o, \\ Q_\zeta \big|_{\xi=h} &= 0, & M_\xi \big|_{\xi=h} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

alakban írhatók fel.

A részfeladatok megoldásai ismeretlen paraméterként tartalmazzák az  $f$  megoszló terhelést és az  $M_o$  élnyomatékot. Ezek a mennyiségek elvben az illesztési feltételekből számíthatók. Az illesztés helye a körlemez és körhengerhéj középfelületeinek metszészvonala. Ezen  $R_e$  sugarú körön, vagy ami ugyanaz a körhengerhéj  $\zeta=0$  keresztmetszetében a kinematikai mennyiségek az

$$u \big|_{R=R_e} = u_o = u_{\zeta_o} = u_\zeta \big|_{\xi=0} \quad (7)$$

és

$$\mathcal{G}_o = -\frac{dw}{dR} \big|_{R=R_e} = \frac{du_\zeta}{d\xi} \big|_{\xi=0} \quad (8)$$

illesztési feltételeknek kötelesek eleget tenni.

A részfeladatok megoldása során a Krülov-függvények értelmezését is kihasználva, ugyanakkor elhagyva a formális számítások részleteit kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u_\zeta(\xi=0) &= \kappa_1 M_o + \alpha_1 (f_o - f), \\ \mathcal{G}_o &= \kappa_2 M_o + \alpha_2 (f_o - f), \end{aligned} \quad (9)$$

ahol

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\sin(2\beta h) - \sinh(2\beta h)}{\cosh(2\beta h) + \cos(2\beta h) - 2} \frac{1}{2\beta^3 I_{1s} E_{1s}}, \\ \kappa_1 &= \frac{\cosh(2\beta h) - \cos(2\beta h)}{\cosh(2\beta h) + \cos(2\beta h) - 2} \frac{1}{2\beta^2 I_{1s} E_{1s}}, \\ \alpha_2 &= \frac{\cosh(2\beta h) - \cos(2\beta h)}{\cosh(2\beta h) + \cos(2\beta h) - 2} \frac{1}{2\beta^2 I_{1s} E_{1s}}, \\ \kappa_2 &= \frac{-\sin(2\beta h) - \sinh(2\beta h)}{\cosh(2\beta h) + \cos(2\beta h) - 2} \frac{1}{2\beta I_{1s} E_{1s}}. \end{aligned} \quad (10)$$

### 3.2. A körlemez alakváltozása, egyenletek a körlemez saját síkjában működő terhelésre

Jelölje rendre  $E_p$  and  $\nu_p$  a körlemez rugalmassági modulusát és a Poisson számot. A peremén saját síkjában fekvő konstans sugárirányú erőrendszerekkel terhelt körgyűrű alakú

lemez esetén tengelyszimmetrikus viszonyok között az  $(R, \varphi, z)$  hengerkoordinátarendszerben

$$N_R = -A + \frac{B}{R^2}, \quad N_\varphi = -A - \frac{B}{R^2} \quad \text{és} \quad N_{R\varphi} = N_{\varphi R} = 0 \quad (11)$$

a három élerő ( $N_{R\varphi}$  eltűnése a tengelyszimmetria következménye), ahol az  $A$  és  $B$  állandók a peremfeltételek függvényei [7].

Legyen  $\rho = R/R_e$  dimenziómentes sugárirányú koordináta. Jól ismert a szilárdságtanból [7], hogy tömör körlemez esetén

$$A = f \quad \text{és} \quad B = 0. \quad (12)$$

A perem menti radiális elmozdulás pedig a

$$u_o = -(1-\nu) \frac{R_e}{b_p} \frac{f}{E}, \quad (13)$$

összefüggéssel számítható [7].

### 3.3. A körlemez alakváltozása, egyenletek a stabilitásvesztés utáni elmozdulásmezőre

Vezessük be a

$$\mathcal{A} = \frac{A}{f}; \quad \text{és} \quad \mathcal{B} = \frac{B}{f}, \quad (14)$$

valamint a

$$I_{1p} = b_p^3 / 12, \quad E_{1p} = E_p / (1-\nu_p^2) \quad (15)$$

jelöléseket. Megmutatható az utóbbi jelölések felhasználásával, hogy

$$\Delta_H \Delta_H w = -\frac{f}{I_{1p} E_{1p}} \left[ \frac{d^2 w}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dw}{dR} \right] \quad (16)$$

a saját síkjában terhelt köralakú lemez  $w$  lehajlásának differenciálegyenlete. A  $w$ -re vonatkozó megoldás ismeretében

$$\mathcal{G} = -\frac{dw}{dR}, \quad M_R = -I_{1p} E_{1p} \left( \frac{d^2 w}{dR^2} + \nu \frac{1}{R} \frac{dw}{dR} \right) \quad (17)$$

$$Q_R = I_{1p} E_{1p} \frac{d}{dR} \left( \frac{d^2 w}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dw}{dR} \right) - N_R \frac{dw}{dR}$$

a szögelfordulás, az élnyomaték, és nyíróerő értéke.

## 4. Merevített tömör körlemez stabilitásvizsgálata

### 4.1. A kritikus terhelést adó nemlineáris egyenlet

Bevezetve a

$$\tilde{\mathcal{F}} = R_e^2 \frac{f}{I_{1p} E_{1p}} \quad \text{és} \quad \Delta_H = \frac{1}{R_e^2} \left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) = \frac{1}{R_e^2} \tilde{\Delta} \quad (18)$$

jelöléseket a (16) egyenlet a

$$\tilde{\Delta}\tilde{\Delta}w + \mathfrak{F}\tilde{\Delta}w = 0 \quad (19)$$

alakra hozható, illetve a

$$\hat{\alpha}_1 = \alpha_1 \frac{I_{1p} E_{1p}}{R_e^2}, \quad \hat{\alpha}_2 = \alpha_2 \frac{I_{1p} E_{1p}}{R_e^2} \quad \text{és} \quad \lambda = - \left( \frac{b_p}{R_e} \right)^2 \frac{R_e}{12(1+\nu)} \quad (20)$$

jelölésekkel a (9) egyenletek a

$$\begin{aligned} \lambda \mathfrak{F} &= \kappa_1 M_o + \hat{\alpha}_1 (\mathfrak{F}_o - \mathfrak{F}) \\ \mathfrak{G}_o &= \kappa_2 M_o + \hat{\alpha}_2 (\mathfrak{F}_o - \mathfrak{F}) \end{aligned} \quad (21)$$

formába írhatók át. A (19) egyenlet általános megoldása az

$$w(\rho) = c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + c_3 Z_3 + c_4 Z_4, \quad (22)$$

$$Z_1 = 1, \quad Z_2 = \ln \rho, \quad Z_3 = J_o(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho), \quad Z_4 = Y_o(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho)$$

alakban írható fel, ahol  $c_1, c_2, c_3$  és  $c_4$  az integrációs állandókat,  $Z_1, Z_2, Z_3$  és  $Z_4$  pedig a partikuláris megoldásokat jelöli. A fenti és későbbi képletekben álló  $J_n(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho)$  és  $Y_n(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  egész indexű Bessel-függvények. A  $Z_i$ , ( $i=1, \dots, 4$ ) partikuláris megoldások továbbiakban felhasznált deriváltjait a B. Függelék tartalmazza – lásd a (35) és (36) képleteket.

Mivel  $\rho$ -ra fennáll, hogy (a)  $Y_o(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho) = \frac{2}{\pi} \ln(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho)$  és, hogy (b)  $J_o(0) = 1$  a megoldás korlátosságához a  $\rho=0$  helyen teljesülnie kell a

$$c_2 = -2c_4 / \pi \quad (23)$$

egyenletnek. Ez azt jelenti, hogy

$$w(\rho) = c_1 + c_4 \left[ Y_o(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho) - \frac{2}{\pi} \ln(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho) \right] + c_3 J_o(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho). \quad (24)$$

Kihhasználva a jól ismert

$$\frac{2}{x} J_1(x) = J_2(x) + J_o(x) \quad \text{és} \quad \frac{2}{x} Y_1(x) = Y_2(x) + Y_o(x) \quad (25)$$

összefüggéseket, a  $Z_i$  partikuláris megoldások deriváltjait adó (35) és (36) képleteket, továbbá helyettesítve a Bessel-függvények határértékét, ha az argumentum zérushoz tart, a  $Q_R$ -t adó (17)<sub>3</sub> képletből itt nem részletezett átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} Q_R \frac{R^3}{I_1 E_1} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{d}{d\rho} [\tilde{\Delta} + \mathfrak{F}] w = - \frac{2}{\pi} \mathfrak{F} \frac{1}{\rho}. \quad (26)$$

Mivel zérus a  $Q_R$  elérő eredője az  $R=\rho R_e$  sugarú körön, ha  $R \rightarrow 0$  a vonatkozó

$$2\pi R Q_R = -4c_4 f = 0 \quad (27)$$

egyenletből  $c_4=0$ , és így

$$w(\rho) = c_1 + c_3 J_o(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho) \quad (28)$$

alakú a megoldás. Nem sérti az általánosságot, ha a  $c_1$  konstans értéket zérusnak választjuk – ezzel valójában a lemez elvben határozatlan merevtestszerű mozgását írjuk elő. A fennmaradó integrációs konstansokat a  $\rho=1$  helyen előírt illesztési feltételekből számíthatjuk.

A (21) egyenletrendszerből  $\mathfrak{F}_o$  eliminálása után kapjuk, hogy

$$\mathcal{G}_o = \left( \kappa_2 - \kappa_1 \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1} \right) M_o + \lambda \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1} \mathfrak{F}. \quad (29)$$

Itt egyrésről, tekintettel a (17)<sub>1</sub> képletre, valamint a (36)<sub>2</sub> összefüggésre

$$\mathcal{G}_o = - \frac{dw}{dR} \Big|_{R=R_e} = c_3 \frac{1}{R_e} \sqrt{\mathfrak{F}} J_1(\sqrt{\mathfrak{F}}), \quad (30)$$

továbbá másrésről, kihasználva a (17)<sub>2</sub> képletet, a megoldás tekintetében pedig az eddigieket és a partikuláris megoldások a Bessel-függvények deriváltjaival kapcsolatos (36) összefüggéseket

$$M_o = -c_3 \frac{I_{1p} E_{1p}}{R_e^2} \left[ (1-\nu) \sqrt{\mathfrak{F}} J_1(\sqrt{\mathfrak{F}}) - \mathfrak{F} J_o(\sqrt{\mathfrak{F}}) \right]. \quad (31)$$

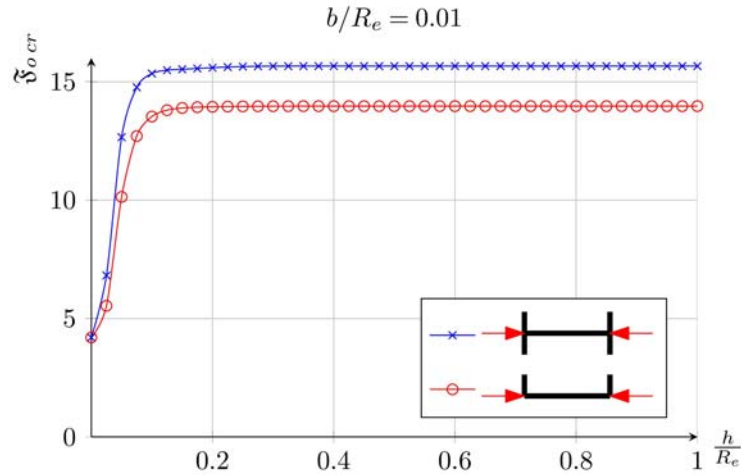
A (29), (30) és (31) képletek egybevetéséből a

$$c_3 = \frac{\lambda \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1} \mathfrak{F}}{\frac{1}{R_e} \sqrt{\mathfrak{F}} J_1(\sqrt{\mathfrak{F}}) + \left( \kappa_2 - \kappa_1 \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1} \right) \frac{I_{1p} E_{1p}}{R_e^2} \left[ (1-\nu) \sqrt{\mathfrak{F}} J_1(\sqrt{\mathfrak{F}}) - \mathfrak{F} J_o(\sqrt{\mathfrak{F}}) \right]} \quad (32)$$

egyenlet adódik a fennmaradó  $c_3$  konstans számítására. A szerkezet kritikus terhelését akkor kapjuk, ha a  $w(0)$  elmozdulás adott terhelésre végtelenhez tart [10]. Mivel a (28) elmozdulásmezőben szereplő  $J_o$  korlátos, a  $c_3$  konstans értékét vizsgáljuk. Ezen tag végtelenhez tart, ha a képletben szereplő kifejezés nevezője zérus.

#### 4.2. Numerikus eredmények

Fortran 90 forráskódú program készült a kritikus terhelés ( $\mathfrak{F}_{cr}$ ) meghatározására. A szerkezetre ható tényleges terhelésének kritikus értékének ( $\mathfrak{F}_{o,cr}$ ) megállapítására a (21) egyenletrendszer szolgál.



4. ábra. Merevítő héj hatása egy- illetve kétoldali merevítés esetén



A kapott számítási eredményeket a 4. ábra szemlélteti. A számításokat  $b_p/R_e=b_s/R_e=0.01$ ,  $E_p=E_s=200$  GPa,  $\nu=0.3$  és  $R_e=50$  mm adatok mellett végeztük. Leolvasható az ábráról hogy a  $h$  magasság növelésének egy bizonyos érték felett már nincs hatása a kritikus terhelés értékére.

A 4. ábrán két görbe szerepel. Egyik a jelen cikkben vizsgált szerkezet, míg a másik egy szintén körhengerhéjjal merevített körlemez kritikus terhelését ábrázolja, viszont a merevítő héj elrendezése szimmetrikus a lemez középsíkjára. Az utóbbi eredmények is a szerző eredményei [11].

## 5. Összefoglalás

Összhangban a tanulmány bevezetésében megfogalmazott célkitűzésekkel tengelyszimmetrikus viszonyok feltételezése mellett áttekintettük a tömör és lyukas körlemezek stabilitás-vizsgálatával kapcsolatos differenciál-egyenleteket, valamint a körlemez és az azt merevítő körhengerhéj közötti illesztési feltételeket. Levezettük a kritikus terhelést adó nemlineáris egyenleteket, és számításokat végeztünk a kritikus terhelés meghatározására.

Tömör körlemez esetén végeztünk számításokat. A kapott eredmények szerint a merevítő körhengerhéj jelentősen növeli a kritikus teher értékét, ha a  $h/R_e$  hányados nem halad meg egy  $b/R_e$ -től függő korlátot.

Végezetül megjegyezzük visszautalva itt a Bevezetésre, hogy izgalmas kérdés (i) vajon mi történik, ha tengelyszimmetrikus a terhelés, de nem tengelyszimmetrikus a vele társuló alakváltozás (ii) és végül további kérdésként vehető fel, hogy mi történik, ha a terhelés sem tengelyszimmetrikus.

## 6. Köszönetnyilvánítás

A bemutatott kutató munka a a TÁMOP-4.2.2.B-10/1/KONV-2010-0008 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

## 7. Függelék

### 7.1. Krülov-függvények

Az alábbiakban megadjuk a Krülov-függvényeket, valamint a  $\zeta$  helykoordináta szerinti deriváltjaikat:

$$\begin{aligned} V_1 &= \cosh \beta \zeta \cos \beta \xi, & V_2 &= \frac{1}{2} (\cosh \beta \zeta \sin \beta \xi + \sinh \beta z \cos \beta \xi), \\ V_3 &= \frac{1}{2} \sinh \beta \zeta \sin \beta \xi, & V_4 &= \frac{1}{4} (\cosh \beta \zeta \sin \beta \xi - \sinh \beta z \cos \beta \xi). \end{aligned} \quad (33)$$

A függvény deriváltjai pedig az alábbi módon számíthatók:

$$\begin{aligned} V_1' &= -4\beta V_4, & V_2' &= \beta V_1, & V_3' &= \beta V_2, & V_4' &= \beta V_3 \\ V_1'' &= -4\beta^2 V_3, & V_2'' &= -4\beta^2 V_4, & V_3'' &= \beta^2 V_1, & V_4'' &= \beta^2 V_2 \\ V_1''' &= -4\beta^3 V_2, & V_2''' &= -4\beta^3 V_3, & V_3''' &= -4\beta^3 V_4, & V_4''' &= \beta^3 V_1. \end{aligned} \quad (34)$$

## 7.2. A (22) megoldás deriváltjai

Az alábbiak összefoglalóan megadják a (19) differenciálegyenlet (22) megoldásában álló  $Z_1, \dots, Z_4$  partikuláris megoldások  $\rho$  szerinti deriváltjait:

$$\begin{aligned} Z_1^{(0)} &= Z_1 = 1, & Z_1' &= 0, & Z_1'' &= 0, & Z_1''' &= 0; \\ Z_2^{(0)} &= Z_2 = \ln(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho), & Z_2' &= \frac{\sqrt{\mathfrak{F}}}{\sqrt{\mathfrak{F}}\rho}, & Z_2'' &= -\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}\rho^2}, & Z_2''' &= \frac{2\mathfrak{F}^{3/2}}{\mathfrak{F}^{3/2}\rho^3}; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} Z_3^{(0)} &= Z_3 = J_0(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho), & Z_3' &= -\sqrt{\mathfrak{F}}J_1(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho), \\ Z_3'' &= \frac{\mathfrak{F}}{2} [J_2(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho) - J_0(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho)], & Z_3''' &= -\frac{\mathfrak{F}^{3/2}}{4} [J_3(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho) - 3J_1(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho)]; \\ Z_4^{(0)} &= Z_4 = Y_0(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho), & Z_4' &= -\sqrt{\mathfrak{F}}Y_1(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho), \\ Z_4'' &= \frac{\mathfrak{F}}{2} [Y_2(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho) - Y_0(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho)], & Z_4''' &= -\frac{\mathfrak{F}^{3/2}}{4} [Y_3(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho) - 3Y_1(\sqrt{\mathfrak{F}}\rho)]. \end{aligned} \quad (36)$$

## 8. Irodalom

- [1] Bryan, G. H.: *On the stability of a plate under thrust in its own plane with applications to the "buckling" of the sides of a ship*, Proceedings of the London Mathematical Society, page 54–67, 1890.
- [2] Nádai, A.: *Über das Ausbeulen von kreisförmigen Platten*, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 59(11):221–224, 1915.
- [3] Thevendran, V., Wang, M. C.: *Buckling of annular plates elastically restrained against rotation along edges*, Thin-Walled Structures, 25(3):231–246, 1996.
- [4] Turvey, G. J., Der Avanessian, N. G. V.: *Axisymmetric elasto-plastic large deflection response of ring stiffened circular plates*. International Journal of Mechanical Sciences, 31(11-12):905–924, 1989.
- [5] Turvey, G. J., Salehi, M.: *Elasto-plastic large deflection response of pressure loaded circular plates stiffened by a single diameter stiffener*, Thin-Walled Structures, 46:996–1002, 2008.
- [6] Frostig, Y., Simitses, G. J.: *Buckling of ring-stiffened multi-annular plates*, Computers & Structures, 29(3):519–526, 1988.
- [7] Szilassy. I.: *Külső peremén terhelt körgyűrűalakú tárcsa stabilitása*, Doktori értekezés, Miskolci Egyetem, 1971.
- [8] Szilassy. I.: *Stability of an annular disc loaded on its external flange by an arbitrary force system*, Publ. Techn. Univ. Heavy Industry. Ser. D. Natural Sciences, 33:31–55, 1976.
- [9] Timoshenko, S., Woinowski-Krieger, S.: *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 2nd edition, 1987.
- [10] Beer, F. P., Johnston, E. R.: *Mechanics of Materials*. McGraw-Hill, 1987.
- [11] Burmeister, D.: *Stability of shell-stiffened and axisymmetrically loaded annular plates*, Technische Mechanik, Közlésre elfogadott cikk, megjelenés alatt.