

NORMÁLIRÁNYBAN TERHELT KOMPOZIT- ÉS ACÉLLEMEZ ÖSSZEHASONLÍTÁSA

Havellant András

hallgató, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, email: havandris@gmail.com

Kiss László

adjunktus Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, email: mechkiss@uni-miskolc.hu

Absztrakt

Ez a tanulmány a kompozitok általános tulajdonságairól ad egy rövid áttekintést. A lineáris rugalmasságtan keretein belül sor kerül az anyagegyenletek ismertetésére, külön kiemelve az általánosan ortotrop anyagi viselkedést. Ezek után egy lemez alkatrész vége-selemes vizsgálata demonstrálja egy epoxy mátrixú grafit erősítőszálakat tartalmazó kompozit adta tömegcsökkentési lehetőséget egy általános acélhoz képest.

Kulcsszavak: *kompozit, vége-selem, lemez, ortotrop anyag*

Abstract

This study gives a brief overview about the general properties of composite materials. Within linear elasticity, the constitutive equations are given with special emphasis on generally orthotropic material behaviour. Afterwards, the finite element simulation of a plate is carried out to demonstrate how the mass of a plate can be reduced using graphite-epoxy fiber reinforced composite material instead of a general purpose steel.

Keywords: *composite, finite element, plate, orthotropic material*

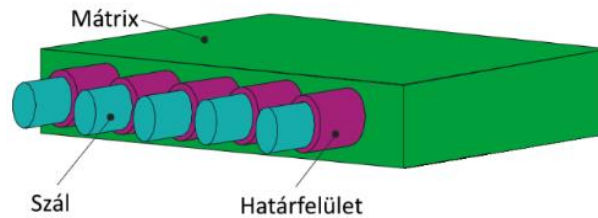
1. Bevezetés

Napjainkban a kompozitok már igen széles körben elterjedt anyagok. A műszaki gyakorlatban számos alkalmazási területük van, csak egy párat említve; a repülőgépipar, az építőipar, de sporteszközök gyártásánál is kitüntetett szerepük van.

A legtöbb gépben, alkatrészben, használati tárgyban a terhelés eloszlása, iránya nem azonos a tér minden irányában, de egy kitüntetett irány pontosan meghatározható. Ezeknek az erővonalaknak az irányában jelentősen jobb mechanikai tulajdonságok (szívósság, merevség) szükségesek, mint más irányokban. Ezt a szükségét elégítik ki a kompozitok, ahol a homogén szerkezeti anyagot a szükséges irányban nagyobb szilárdságú anyaggal erősítik meg.

A kompozitok jellemzően többfázisú anyagok, melyek a befoglaló anyagból (későbbiekben mátrix) és az erősítőanyagból állnak (1. ábra). Az erősítőanyag nagy rugalmassági modulusú és szilárdságú, míg a mátrix szilárdsága általában kisebb az erősítőanyagénál. A két fázis között adhéziós kapcsolat van, mely nagymértékű igénybevétel esetén is fennmarad. Az erősítőanyag feladata az, hogy biztosítsa a szerkezet szilárdságát és merevségét, míg a mátrix szerepe az, hogy összefogja és védje az

erősítőanyagot a külső behatásoktól, és biztosítsa a terhelés egyenletes eloszlását a keresztmetszet mentén [1].



1. ábra. A kompozitok elvi felépítése. [2]

Általánosságban elmondható, hogy a kompozitok az alábbi előnyökkel, illetve hátrányokkal rendelkezik(nek) a klasszikus egynemű anyagokkal szemben:

- + kedvezőbb mechanikai és hőtágulási tulajdonságok,
- + jóval kisebb saját tömeg,
- + előnyös korrózióval és kifáradással szembeni ellenállás,
- magasabb kezdeti költségek (amik idővel megtérülhetnek),
- drágán, illetve nehezen javíthatók és a cseréjük is költségesebb.

A kompozitokra vonatkozó szakirodalom szerteágazó, rengeteg ismerettel rendelkezünk. Igen jelentős mennyiségű és változatos probléma megoldására került már sor numerikusan és analitikusan is. Kiváló összefoglalót nyújt az alapvető ismeretekről például Kollár és Springer könyve [3], amely részletesen leírja a kompozitok mechanikáját. Az elmozdulások, nyúlások, feszültségek témakörének tisztázása mellett rengeteg analitikusan megoldott példa található benne rudakra és héjakra egyaránt.

Ami a kompozit lemezeket illeti, számos forrás elérhető. A [4] értekezés például saját síkjukban terhelt, nem szimmetrikusan laminált lemezek nyomással szembeni viselkedését (kihajlását) vizsgálja geometriailag lineáris és nemlineáris modellekkel egyaránt. Érdekes még megemlíteni az [5] cikket, ami rugalmasan ágyazott kompozit lemezek vizsgálatok a klasszikusnál pontosabb modellt használva, figyelembe veszi a nyírási deformációkat is. A [6] szerzői végeelemes számításokkal és kísérleti eredményekkel vizsgálják szálas polimer kompozitok mechanikai viselkedését és tönkremenetelét egytengelyű húzófeszültség esetén. A tapasztalatok jó egyezést mutatnak a két különböző technika között. A [7] cikk bemutat egy Kármán-Mindlin lemezelméleten alapuló nemlineáris végeelemes módszert, amivel vékony rétegekből álló lemezek transzverzális alakváltozásait lehet számítani. Fontos eredmény, hogy sor került a leggyengébb réteg tönkremeneteléhez tartozó terhelés meghatározására is. A [8] disszertáció textil kompozitok numerikus analízisét tárgyalja, melyet anyagvizsgálatokkal is kiegészít. A [9] dolgozat az ép és delaminált lemezek lengéstani viselkedését vizsgálja, és kitér olyan jelenségekre is, mint a kompozit lemezek sajátkörfrekvenciájának nemlineáris változása. A [10] forrás szálas kompozitokra fókuszálva tárgyalja az összetevők tulajdonságai mellett az egy- és többcellás szendvics cellalemezek számítási és optimalizálási módszereit, emellett profilos tartók és cellalemezek esetén vizsgálja a kompozitok alkalmazásával elérhető tömegcsökkentés lehetőségét.

Az irodalomban számos további, nem homogén anyagból készült alkatrész mechanikai viselkedésével foglalkozó forrás érhető el – lásd például a [11], [12], [13], [14], [15] és [16] munkákat.

A fenti rövid áttekintés alapján megállapítható, hogy a szálerősítésű lemezek klasszikus mechanikai modellezésénél leggyakrabban használt egyszerűsítő feltevések az alábbiak:

- Az alkatrész ideálisan összekapcsolt ortotrop rétegekből áll. A keresztirányú elmozdulások folytonosak a vastagság mentén.

- Az elmozdulások és alakváltozások jellemzően kismértékűek.
- Az anyag lineárisan rugalmas.
- A vastagság jóval kisebb, mint a másik két irányú kiterjedés.
- A mechanikai terhelés hatására bekövetkező hőhatások általában elhanyagolhatók.

A lineáris rugalmasságtan keretein belül a cikk a továbbiakban ismerteti az anyagegyenleteket, külön kiemelve az általánosan ortotrop anyagi viselkedés leírását. Ezután egy egyszerű, de szemléletes példán keresztül kerül bemutatásra a kompozitok használatával elérhető egyik legnagyobb előny a klasszikus anyagokkal szemben, ami a tömegcsökkentés. A numerikus szimulációkhoz az Abaqus kereskedelmi vége-seleemes szoftver nyújtott segítséget. A cikket összefoglalás és irodalomjegyzék zárja.

2. Anyagi viselkedés

2.1. Az általános anyagi modellezés

Térbeli feszültségi állapotban, lineárisan rugalmas, általános anizotróp, anyagi viselkedés mellett 9 koordinátája van mind a $\underline{\sigma}$ feszültségi-, mind az $\underline{\varepsilon}$ alakváltozási tenzornak. A kapcsolat a feszültségek és alakváltozások között a legáltalánosabb alakban a

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ijkl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{kl} \end{bmatrix}, \quad i, j, k, l = \{1, 2, 3\} \quad (1)$$

(3x3) (9x9) (3x3)

formában adható meg. Itt \underline{C} az anyagállandók negyedrendű mátrixa három a negyedik koordinátával, vagyis összesen 81 elemet (anyagállandót) tartalmaz. Az első két index a feszültségekre vonatkozik, a második pár pedig az alakváltozásokra. A $\underline{\sigma}$ feszültségi- és az $\underline{\varepsilon}$ alakváltozási tenzorok esetében fennálló szimmetria miatt nem 9-9, hanem egyenként csak 6 független elemük van. Következésképpen, az anyagállandók esetén is fenn kell állnia szimmetriának az első és az utolsó két index vonatkozásában. Azaz például teljesülnie kell, hogy

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (2)$$

Ennélfogva belátható, hogy a független anyagállandók száma már csak 36, így pedig célszerű áttérni a

$$\begin{bmatrix} \underline{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (3)$$

(6x1)(6x6)(6x1)

mátrixos alakra, ahol az egyes feszültségi- és alakváltozási koordinátákat a következőképpen értelmezzük:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33}, \quad \sigma_4 = \sigma_{23} = \sigma_{32}, \\ \sigma_5 &= \sigma_{13} = \sigma_{31}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{aligned} \quad (4)$$

valamint

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_4 = \gamma_{23} = \gamma_{32} = 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32}, \\ \varepsilon_5 &= \gamma_{13} = \gamma_{31} = 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_6 = \gamma_{12} = \gamma_{21} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} \end{aligned} \quad (5)$$

ahol ε_{ii} a fajlagos nyúlást, γ_{ij} a fajlagos szögtorzulást jelöli. Megjegyzendő, hogy a (3) összefüggés helyett gyakran az

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (6)$$

inverz alakot használják, ahol $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$.

A független anyagállandók száma még tovább csökken. Ez egyfajta következménye a W fajlagos alakváltozási energia létezésének. A (kezdeti) térfogategységre jutó alakváltozási energia

$$W = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_j \varepsilon_i \quad (7)$$

aminek második deriváltja

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ij} \quad (8)$$

értelemszerűen független a deriválás sorrendjétől, azaz

$$C_{ij} = C_{ji}. \quad (9)$$

Emiatt pedig a ténylegesen független anyagállandók száma 21.

Fontos megemlíteni, hogy a legtöbb esetben léteznek további anyagi szimmetriák bizonyos síkokra vonatkozóan. Így például monoklin anyagoknál (egy anyagi szimmetria síkkal rendelkeznek) 13 a független anyagállandók száma, 3D ortotrop (vagy speciálisan ortotrop) anyagoknál pedig 9.

2.2. Anyagállandók egy általánosan ortotrop rétegre

Az említett 3D ortotrop anyag esetében az anyagállandók mátrixa az alábbi szerkezetű:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

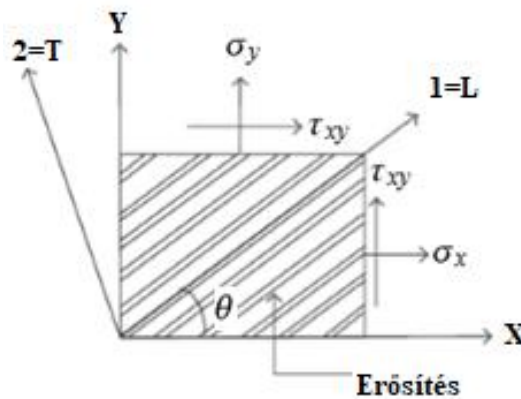
A gyakorlatban az anyagi viselkedést könnyen mérhető mérnöki anyagállandók formájában lehet egyszerűen megadni, ezért mi is ezt a megközelítést fogjuk preferálni a továbbiakban. Egy speciálisan ortotrop anyag esetén – felhasználva a 2. ábra jelöléseit – ezek az $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}$ és ν_{23} , ahol E_i a rugalmassági modulusz, G_{ij} a csúsztató rugalmassági modulusz és ν_{ij} a Poisson tényező ($i, j=1, 2, 3$). Ezek ismeretében közvetlenül megadhatók a (10) mátrix elemei:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \frac{1}{E_1}, & D_{12} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2}, & D_{13} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3}, \\
 D_{21} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & D_{22} &= \frac{1}{E_2}, & D_{23} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \\
 D_{31} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}, & D_{32} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2}, & D_{33} &= \frac{1}{E_3}, \\
 D_{44} &= \frac{1}{G_{12}}, & D_{55} &= \frac{1}{G_{13}}, & D_{66} &= \frac{1}{G_{23}}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Lineáris algebrából ismeretes, hogy egy szimmetrikus mátrix inverze is szimmetrikus, következésképp fennállnak az alábbi azonosságok:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}
 \tag{12}$$

A 2. ábrán $1=L$ a szálirány, $2=T$ a rá merőleges irány, valamint X, Y jelölik a vonatkoztatási rendszer tengelyeit. Az általános szabály szerint [17] a θ szög pozitív, amennyiben az óramutató járásával ellentétesen forgatunk a referencia tengelyhez képest az anyagi irány megadásához.



2. ábra. Ortotrop réteg szálirányának orientációja a referencia tengelyhez képest. [18]

3. Numerikus modellezés

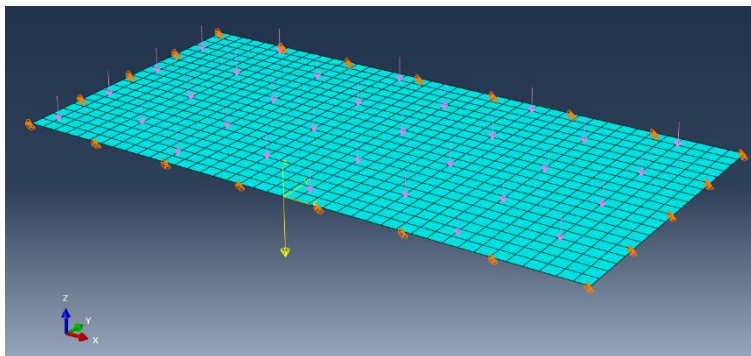
A továbbiakban a kompozitok tömegcsökkentés formájában elérhető előnyét kívánjuk szemléletesen bizonyítani a „hagyományos” anyagokhoz képest. A vizsgálatok az Abaqus CAE 6.13 [19] szoftver segítségével lettek elvégezve.

A bizonyítás egy lemez végeselemes (VE) vizsgálatán keresztül kerül bemutatásra. A lemezt először egy „hagyományos” anyagnak tekinthető lineárisan rugalmas, izotróp, általános acélból modellezzük. A vizsgálat célja az elmozdulás-mező meghatározása, amit egy felületen megoszló külső terhelés (nyomás) és a test önsúlya idéz elő. Ezután egy ezzel megegyező felületű T300/5208 grafit/epoxy kompozitból készült egyrétegű lemez vizsgálata kerül bemutatásra.

3.1. Az acéllemez vizsgálata

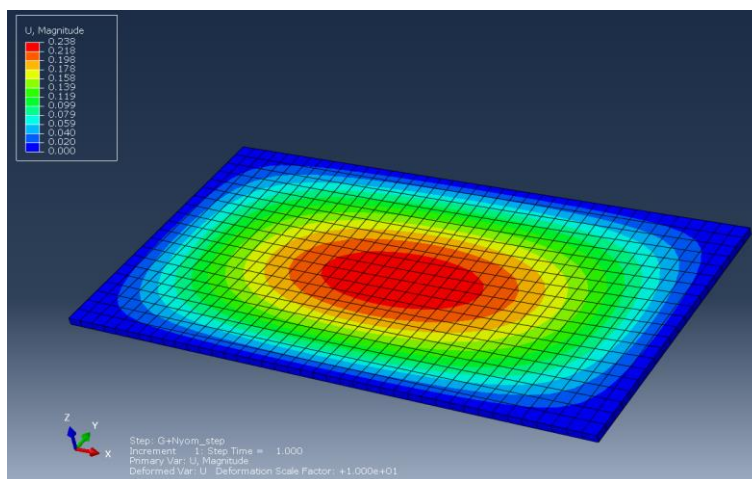
Az acéllemez méretei 100/200/0,5 mm (szélesség/hosszúság/magasság), anyagi jellemzői a [20] forrásból származnak.

Az időben állandósult terhelés egy összesen 10 N eredő erőnek megfelelő konstans megoszló felületi nyomás (0,0005 MPa) és a lemez önsúlya, ami $g=9,81 \text{ m/s}^2$ feltételezése mellett 0,004905 N (tehát a saját tömeg 0,078 kg). A peremfeltételeket tekintve a lemez peremei nem tudnak elmozdulni, de az elfordulások megengedettek, tehát lényegében csuklókkal van körben megtámasztva. Az alkalmazott háló 5 mm-es, rendezett négyzet formájú S4 típusú (Standard/Linear/Shell) elemekből épül fel, mint azt a 3. ábra is mutatja.



3. ábra. Az acéllemez VE modellje.

A szimuláció konvergálnak tekinthető eredményeként a 4. ábra alapján látható, hogy a legnagyobb elmozdulás a lemez középső részén megy végbe (a megtámasztásoktól legtávolabb).



4. ábra. Az acéllemez elmozdulás-mezője mm-ben megadva.

3.2. A kompozit lemez analízise

A következő lépés a kompozit lemez vizsgálata az Abaqus Composite Layup moduljának segítségével. A használt anyagmodell a [6] forrás alapján készült. Az egyes anyagjellemzők értékeit az 1. táblázat tartalmazza, ahol ρ az átlagos sűrűség.

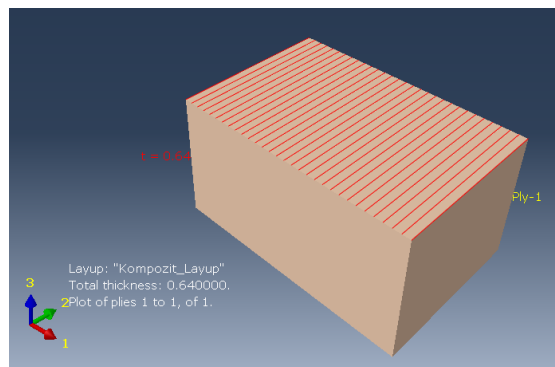
1. táblázat. A T300/5208 anyag anyagjellemzői.

Anyagjellemző	Értéke
E_1	132.4 GPa
$E_2=E_3$	10.76 GPa
$G_{12}=G_{13}$	5.65 GPa
G_{23}	3.38 GPa
$\nu_{12}=\nu_{13}$	0.24
ν_{23}	0.49
ρ	1800 kg/m ³

Kezdetben az acéllemez felületével, vastagságával, terhelésével, megfogásával és hálózásával is megegyező kompozit lemez lett szimulálva. A próbaszámításoknál az ideálisan összekapcsolt rétegek számának- és a bennük lévő szálak orientációjának szisztematikus változtatásával az alábbi következtetések vonhatók le:

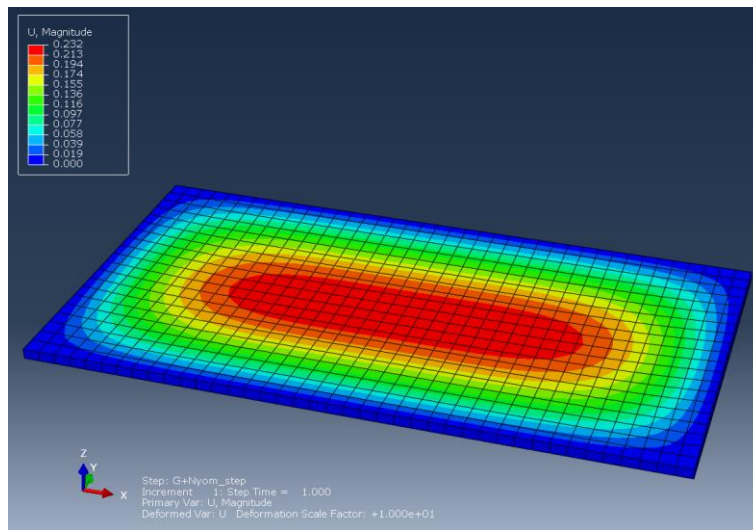
- Azonos orientáció mellett nincs értelme rétegeket megkülönböztetni.
- A szálak minél inkább párhuzamosak az Y tengellyel (ami a terhelés szempontjából a kitüntetett irány, de nem a terhelés iránya), annál merevebbé válik a kompozit lemez is.
- Az itt használt kompozit az acél vastagságában nem képes olyan merevséget nyújtani, mint az acél. Ennek magyarázata lehet, hogy a kompozit esetén a modulusz értékek általában nagyságrendekkel kisebbek, mint az acénál.

Ezen megfigyelések felhasználásával készült el a végleges modell, ami egyetlen réteget tartalmaz, melyben a szálak az Y tengellyel párhuzamosak. Ennek illusztrációját mutatja az 5. ábra. Mivel ezen cikk célja a legelőnyösebb eset megkeresése és részletesebb analízise volt. Más szálorientációk használata a feszültségek és deformációk szempontjából kedvezőtlenebb eredményre vezetne, így ezekkel bővebben nem foglalkoztunk.



5. ábra. A végleges szálirány modellje.

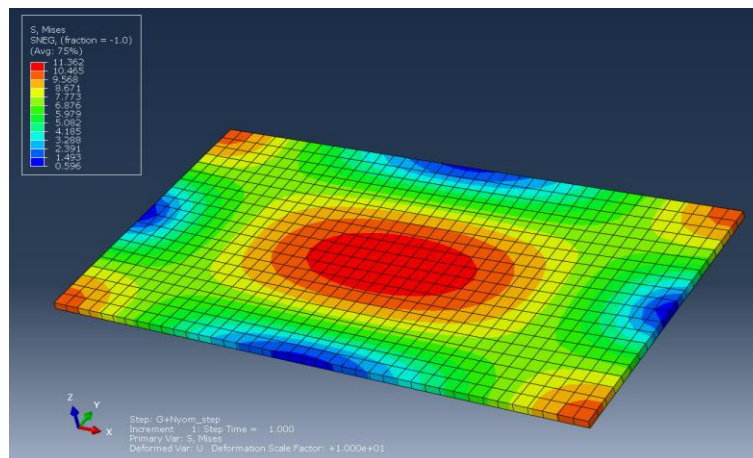
Ahhoz, hogy a kellő geometriai merevség előálljon, a kompozit lemezt meg kell vastagítani 0,64 mm-re. Ez 28%-os térfogat növekedést eredményez, ugyanakkor a kisebb sűrűség okán így is jóval kisebb tömegű a kompozit lemez az acénál (0,023 kg, szemben az acél 0,078 kg-os tömegével). A 6. ábrán látható a kompozit lemez elmozdulás-mezője, mely a csúcserték tekintetében lényegében megegyezik az acéléval, ugyanakkor látható, hogy az eloszlása más, nagyobb terület szenved el a maximálisához közeli alakváltozást, mint az acél esetén.



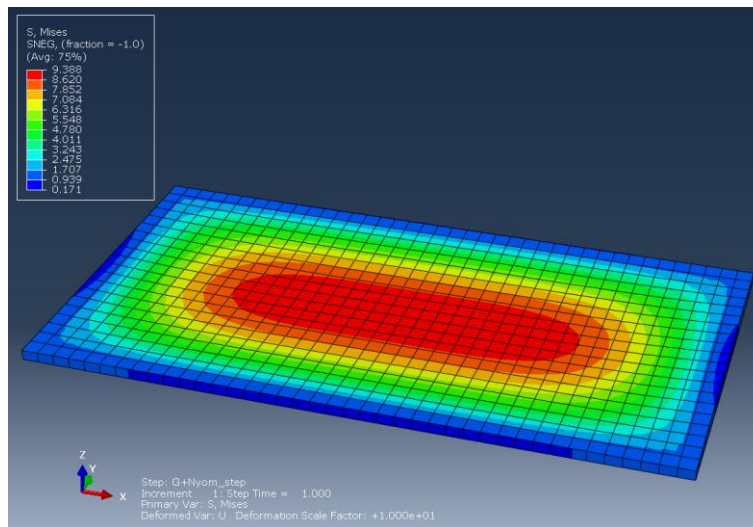
6. ábra. A kompozit lemez elmozdulás-mezője mm-ben megadva.

3.3. Az eredmények összehasonlítása

Az elmozdulás-mezők eloszlásának jellegbeli különbsége további vizsgálatra ad okot. A 7. ábrán és 8. ábrán láthatók a két lemez feszültség-mezői, melyeken megfigyelhetők a nagyság- és eloszlásbeli különbségek is.

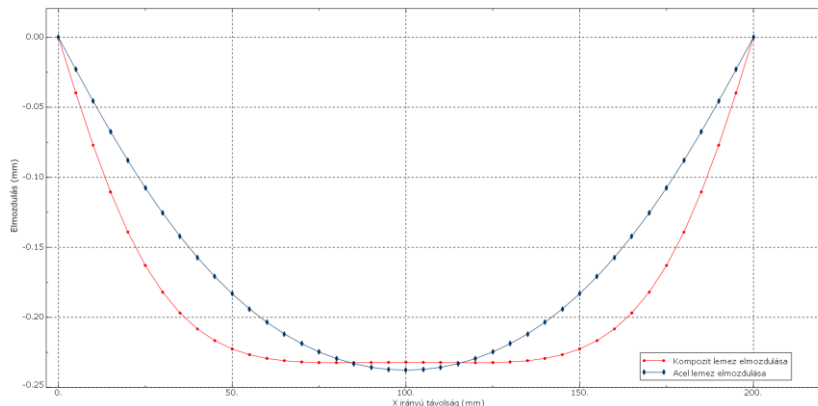


7. ábra. Az acéllemez feszültség-mezője MPa-ban megadva.



8. ábra. A kompozit lemez feszültség-mezője MPa-ban megadva.

A fenti ábrából jól látszik, hogy a kompozit lemez esetén a terhelés kedvezőbben, vagyis nagyobb területen, egyenletesebben oszlik el, és a maximális feszültség értéke is mintegy 2 MPa-lal (17,5%-kal) kisebb, mint a fémlemez esetén. A 9. ábra megmutatja a két lemez normális irányú elmozdulását a távolság függvényében. Az X koordinátát a lemez szélétől indulva a szimmetriatengely mentén mértük. Az elmozdulások előjele itt negatív, mivel a Z tengely irányításával ellentétesen következnek be.



9. ábra. Lemezek normális irányú elmozdulásának összehasonlítása az X szimmetriatengely mentén.

4. Összefoglalás

Az előzőekben ismertettük a kompozitok általános jellemzőit, és anyagi viselkedését. Ezt követően egy egyszerű példában bemutatásra kerültek előnyeik a „hagyományos” anyagokkal szemben. A számpéldában az első lemez egy általános acél tulajdonságaival rendelkezik, ez a referencia, míg a második lemez grafit/epoxy kompozitként volt definiálva. A síklemezeket az önsúlyuk és egy felületi nyomás terhelte. Az eredményekből látható, hogy a kompozitok használata alapanyagként jelentősen egyenletesebbé tette a testben kialakuló elmozdulás és feszültség-mezők eloszlását, mindeközben 70%-os tömegcsökkentést is eredményezett. Azonban ez a kísérlet is egyszerűsített, eltekintettünk számos

tényezőktől, mint például a szál és mátrix térfogatarányának hatásától, vagy az üregek jelenlététől az anyagban. Célszerű lehet többrétegű, különböző irányú szálakból álló modelleket is tesztelni, akár a rétegek közti kapcsolat nem ideálisnak vételével, beleértve a köztük lévő ragasztóanyag modellezését is.

Irodalom

- [1] Görbe, Á.: *Polimerek anyagszerkezetana és technológiája*, Előadásvázlat, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2018.
- [2] Hargitai, H.: *Polimer kompozitok alapanyagai, tulajdonságai, kompozitmechanikai alapok*, Előadásvázlat, Széchenyi István Egyetem, 2011.
- [3] Kollár, L. P., Springer, G. S.: *Mechanics of Composite Structures*, Cambridge University Press, 2003. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511547140>
- [4] Majeed, M. A.: *Deformations of in-plane loaded unsymmetrically laminated composite plates*, PhD dissertation, Faculty of the Virginia Polytechnic, Institute and State University, 2005. <https://doi.org/10.2514/6.2005-2099>
- [5] Akavci, S. S., Yerli, H. R., Dogan, A.: *The first order shear deformation theory for symmetrically laminated composite plates on elastic foundation*, Arabian Journal for Science & Engineering, Vol. 32. Issue 2B, 2007. <https://doi.org/10.1515/SECM.2006.13.2.79>
- [6] Mahmud, J., Hussain, A. K., Rahimi, N., Rahim, M. A.: *Failure analysis of composite laminate based on experiment-simulation integration*, Current Research in Malaysia, Vol. 2. No. 2. pp.7-22, 2013.
- [7] Kam, T. Y., Sher, H. F., Chao, T. N., Chang, R. R.: *Predictions of deflection and first-ply failure load of thin laminated composite plates via the finite element approach*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 33. No.3. pp.375-398, 1996. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00042-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00042-9)
- [8] Bojtár, G.: *Textil kompozitok anyagtulajdonságainak numerikus modellezése*, Szent István Egyetem, Gödöllő, 2019.
- [9] Tóth, T. B.: *Ortotrop rétegelt kompozit lemez lengéstanai analízise*, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2015.
- [10] Kovács, Gy.: *Ortotrop rétegelt kompozit lemez lengéstanai analízise*, Miskolci Egyetem, 2004.
- [11] Ramu, I., Mohanty, S. C.: *Modal Analysis of Functionally Graded Material Plates Using Finite Element Method*, Procedia Materials Science, Vol. 6. pp.460-467, 2014. <https://doi.org/10.1155/2014/247932>
- [12] Filippi, M., Carrera, E., Zenkour, A. M.: *Static analyses of FGM beams by various theories and finite elements*, Composites Part B: Engineering, Vol. 72. pp.1-9., 2015. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.12.004>
- [13] Gönczi, D.: *Thermoelastic analysis of thick-walled functionally graded spherical pressure vessels with temperature-dependent material properties*, Journal of Computational and Applied Mechanics, Vol. 12. No. 2. pp.109-125, 2017. <https://doi.org/10.32973/jcam.2017.008>
- [14] Kiss, L. P.: *Nonlinear stability analysis of FGM shallow arches under an arbitrary concentrated radial force*, International Journal of Mechanics and Materials in Design, Vol. 16. pp.91-108., 2020. <https://doi.org/10.1007/s10999-019-09460-2>
- [15] Gönczi, D.: *Analysis of rotating functionally graded disks with arbitrary material properties*, Acta Technica Corviniensis - Bulletin of Engineering, Vol. 4. pp.1-6, 2018.

- [16] Ecsedi, I., Gönczi, D.: *Thermoelastic stresses in nonhomogeneous prismatic bars*, Annals of Faculty of Engineering Hunedoara - International Journal of Engineering, Vol. 13. No. 2. pp.49-52, 2015.
- [17] Iyengar, N. G. R.: *Composite Materials and Structural Analysis*, MV Learning, 2016.
- [18] Heiza, Kh. M., Meleka, N. N., Elwkad, N. Y.: *Behavior and analysis of self-consolidated reinforced concrete deep beams strenghtened in shear*, International Scholarly Research Network, Vol. 2012. Article ID 202171, pp.14., 2012. <https://doi.org/10.5402/2012/202171>
- [19] Abaqus Standard User's Manual Version 6.13, 2017.
- [20] <http://www.matweb.com/search/datasheet.aspx?bassnum=MS0001> [Letöltés dátuma: 2020.03.29.]