

HŐKOZTA FESZÜLTSEGEK ÉS ELMOZDULÁSOK MEGHATÁROZÁSA RÉTEGZETT KÖRHENGER ALAKÚ TESTEK BEN

Gönczi Dávid, PhD hallgató; **Ecsedi István**, egyetemi tanár;
Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék, 3515 Miskolc-Egyetemváros,
e-mail: mechgoda@uni-miskolc.hu, istvan.ecsedi@uni-miskolc.hu

Összefoglalás

E dolgozat tárgyát a rétegzett körhenger alakú testekben lévő hő és mechanikai terhelések hatására kialakult feszültségek és elmozdulások meghatározása képezi. A vizsgált feladat tengelyszimmetrikus, a feszültségek és a hőmérséklet független az axiális koordinátától, továbbá a hőmérsékletmező és a hozzá kapcsolódó hőfeszültségek állandósult állapotot feltételezve lettek meghatározva. Az általánosított síkalakváltozási állapotra vonatkozó rugalmasságtani és hőrugalmasságtani egyenletek adják az elmélet alapját a kidolgozásra kerülő analitikus módszereknek.

Kulcsszavak: rétegzett körhenger, hőfeszültségek, állandósult állapot.

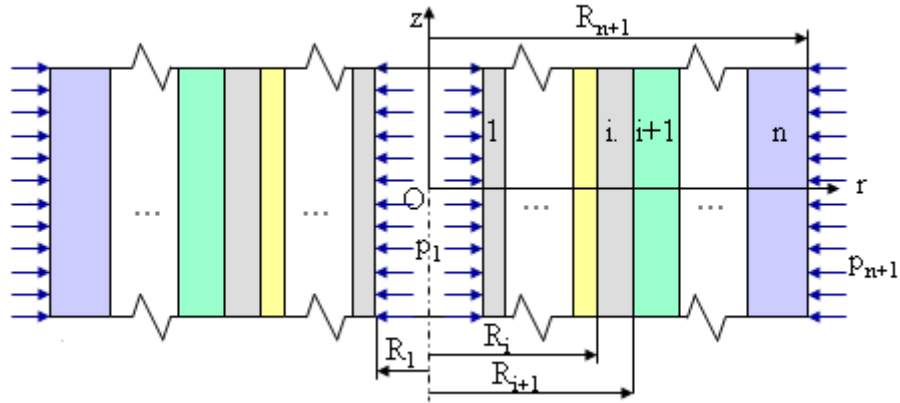
Abstract

The main objective of the present paper is the determination of the stresses and displacements in layered circular cylindrical bodies, which are caused by thermal and mechanical loadings. The problem considered is axisymmetric, therefore the stresses and the temperature field are independent of the axial coordinate. The temperature field and the corresponding thermal stresses are determined by utilizing the equations of the steady state heat conduction and thermo-elasticity. The analytical solution is obtained under the assumption that the body is in generalized plane strain state.

Keywords: layered circular cylinder, thermal stresses, steady state.

1. Bevezetés

Az 1. ábra szemlélteti a vizsgált rétegzett körhenger alakú test meridián metszetét. A hővezetési és mechanikai feladat megoldását az (r, φ, z) koordináta-rendszerben keressük. A test a z tengely irányába végtelen kiterjedésű, a külső és belső palástfelületének hőmérséklete előírt, időben állandó. Ennek következtében az állandósult állapothoz tartozó hőmérsékletmező nem függ a z koordinátától, pusztán az r radiális koordináta függvénye. Az állandósult állapothoz tartozó hőfeszültségek számítására az általánosított síkalakváltozási állapot egyenleteit használjuk tekintettel a forgásszimmetriára [2-5].



1. ábra. A rétegzett körhenger alakú test.

A kompozit körhenger teljes keresztmetszetét általánosított síkalakváltozási állapot esetén nem terheli axiális irányú erő [4, 5]. A feladat megoldásánál tekintettel a vonatkozó mezőegyenletek és peremfeltételek linearitására a szuperpozíció elvét használjuk. A hőokozta elmozdulásokhoz és feszültségekhez hozzáadva a mechanikai terhelésből származó feszültségeket és elmozdulásokat megkapjuk a kapcsolt hőrugalmasságtani feladat megoldását. A rétegzett hengeres test szerkezeti elemei, az egyes csövek, radiális irányban tökéletesen kapcsolódnak, de axiális irányban egymáshoz képest elcsúszhatnak. A radiális normál feszültség, a hőmérséklet és hőáram a teljes rétegzett csövet tekintve az r sugár-koordináta folytonos függvénye.

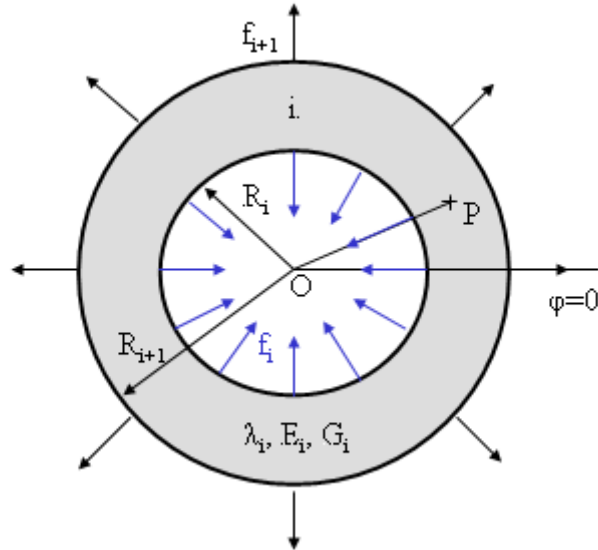
2. A hőmérsékletmező számítása

A 2. ábra a rétegzett körhenger egy tipikus szerkezeti elemének keresztmetszetét szemlélteti. Az i jelű elem hőmérsékletét $T_i = T_i(r)$ jelöli, továbbá

$$t_i = T_i(R_i), \quad t_{i+1} = T_i(R_{i+1}) = T_{i+1}(R_{i+1}), \quad i = 1 \dots n. \quad (1)$$

Az (1) egyenlet a hőmérsékletmező folytonosságát fogalmazza meg. Ismeretes, hogy [1, 3, 4]

$$T_i(r) = \frac{t_{i+1} - t_i}{\ln \frac{R_{i+1}}{R_i}} \ln \frac{r}{R_i} + t_i, \quad i = 1 \dots n. \quad (2)$$



2. ábra. Az i jelű cső keresztmetszete.

Az állandósult állapothoz tartozó radiális irányú hőáram

$$q_i(r) = \lambda_i \frac{t_{i+1} - t_i}{r \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}}, \quad i = 1 \dots n, \quad (3)$$

ahol λ_i az i jelű elem hővezetési tényezője. A hőáram folytonosságát kifejező egyenlet alapján írható, hogy

$$q_i(R_{i+1}) = q_{i+1}(R_{i+1}), \quad i = 1 \dots (n-1). \quad (4)$$

A külső és belső határoló körhenger felületek hőmérséklete előírt, vagyis t_1 és t_{n+1} adott. A (4) egyenlet részletes kifejtése az alábbi egyenletet adja:

$$-\frac{\lambda_i}{\ln \frac{R_{i+1}}{R_i}} t_i + \left(\frac{\lambda_i}{\ln \frac{R_{i+1}}{R_i}} + \frac{\lambda_{i+1}}{\ln \frac{R_{i+2}}{R_{i+1}}} \right) t_{i+1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\ln \frac{R_{i+2}}{R_{i+1}}} t_{i+2} = 0, \quad i = 1 \dots (n-1). \quad (5)$$

A fenti egyenletrendszer megoldása háromrétegű körhenger esetén az alábbi alakban írható fel, ahol t_1 és t_4 előírt felületi hőmérséklet értékek:

$$t_2 = \frac{\left(t_4 \lambda_2 \ln \frac{R_4}{R_3} + t_1 \lambda_2 \ln \frac{R_4}{R_3} + t_1 \lambda_3 \ln \frac{R_3}{R_4} \right) \ln \frac{R_2}{R_1}}{\lambda_1 \lambda_2 \ln \frac{R_4}{R_3} + \lambda_1 \lambda_3 \ln \frac{R_3}{R_2} + \lambda_3 \lambda_2 \ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad (6)$$

$$t_3 = \frac{\left(t_4 \lambda_1 \ln \frac{R_3}{R_2} + t_4 \lambda_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + t_1 \lambda_2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \ln \frac{R_4}{R_3}}{\lambda_1 \lambda_2 \ln \frac{R_4}{R_3} + \lambda_1 \lambda_3 \ln \frac{R_3}{R_2} + \lambda_3 \lambda_2 \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (7)$$

Ez utóbbi eredmények a dolgozat numerikus példájában nyernek alkalmazást.

3. Az állandósult állapothoz tartozó hőrugalmasági feladat megoldása

Az i jelű csőre vonatkozó hőrugalmasági feladat megoldása adott, időben nem változó hőmérsékletmező esetén a

$$\sigma_{ir}^T(R_i) = \sigma_{ir}^T(R_{i+1}) = 0, \quad (8)$$

$$N_i^T = 2\pi \int_{R_i}^{R_{i+1}} r \sigma_{iz}^T(r) dr = 0, \quad (9)$$

egyenletek fennállása mellett az alábbi alakban adható meg [5]:

$$u_i^T(r) = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \alpha_i \left\{ \frac{1}{r} \int_{R_i}^r [\mathcal{G}(\rho) \rho] d\rho + \left[\frac{1-3\nu}{1+\nu} r + \frac{R_i^2}{r} \right] \frac{1}{R_{i+1}^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_{i+1}} [\mathcal{G}(\rho) \rho] d\rho \right\}, \quad (10)$$

$$\sigma_{ir}^T(r) = \frac{2\alpha_i G_i (1+\nu_i)}{1-\nu_i} \left[-\frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \rho \mathcal{G}(\rho) d\rho + \frac{r^2 - R_i^2}{r^2 (R_{i+1}^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_{i+1}} \rho \mathcal{G}(\rho) d\rho \right], \quad (11)$$

$$\sigma_{i\varphi}^T(r) = \frac{2\alpha_i G_i (1+\nu_i)}{1-\nu_i} \left[\frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \rho \mathcal{G}(\rho) d\rho + \frac{r^2 + R_i^2}{r^2 (R_{i+1}^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_{i+1}} \rho \mathcal{G}(\rho) d\rho - \mathcal{G}(r) \right], \quad (12)$$

$$\sigma_{iz}^T(r) = \frac{2\alpha_i G_i (1+\nu_i)}{1-\nu_i} \left[\frac{2}{R_{i+1}^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_{i+1}} \rho \mathcal{G}(\rho) d\rho - \mathcal{G}(r) \right], \quad i = 1 \dots n, \quad (13)$$

$$\mathcal{G}(r) = T(r) - T_0 \quad (T_0 = \text{szoba hőmérséklet}).$$

A fenti képletekben u_i^T a radiális irányú elmozdulást, σ_{ir}^T , $\sigma_{i\varphi}^T$, σ_{iz}^T a normál feszültségeket, ν_i a Poisson számot, G_i a csúsztató rugalmassági moduluszt és α_i a lineáris hőtágulási együtthatót jelöli.

4. Az elmozdulások és feszültségek meghatározása mechanikai terhelés esetén

A 2. ábrán szemléltetett i jelű csövet a külső és belső palástján előírt radiális irányú, állandó intenzitású felületi terhelés terheli, vagyis

$$\sigma_{ir}^M(R_i) = f_i, \quad \sigma_{ir}^M(R_{i+1}) = f_{i+1}, \quad i = 1 \dots n. \quad (14)$$

Feltéve, hogy a forgásszimmetrikus, terhelésnek alávetett, üreges körhenger általánosított síkfeszültségi állapotban van, vagyis

$$N_i^M = 2\pi \int_{R_i}^{R_{i+1}} r \sigma_{iz}^M(r) dr = 0, \quad i = 1 \dots n, \quad (15)$$

a feszültségek és elmozdulások számítására az alábbi képleteket tudjuk használni [2,5]:

$$u_i^M(r) = \frac{1}{2G_i} \left(\frac{1-\nu_i}{1+\nu_i} C_{i1} r + \frac{C_{i2}}{r} \right), \quad (16)$$

$$\sigma_{ir}^M = C_{i1} - \frac{C_{i2}}{r^2}, \quad (17)$$

$$\sigma_{i\varphi}^M = C_{i1} + \frac{C_{i2}}{r^2}, \quad (18)$$

$$\sigma_{iz}^M = 0, \quad (19)$$

$$C_{i1} = \frac{f_{i+1} R_{i+1}^2 - f_i R_i^2}{R_{i+1}^2 - R_i^2}, \quad (20)$$

$$C_{2i} = \frac{R_{i+1}^2 R_i^2}{R_{i+1}^2 - R_i^2} (f_{i+1} - f_i), \quad i = 1 \dots n. \quad (21)$$

5. A hőterhelés és a mechanikai terhelés szuperpozíciója

Egyetlen cső esetében a radiális irányú elmozdulás és a normál feszültségek számítására a következő képletek írhatók fel:

$$u_i(r) = u_i^T(r) + u_i^M(r), \quad (22)$$

$$\sigma_{ir}(r) = \sigma_{ir}^T(r) + \sigma_{ir}^M(r), \quad (23)$$

$$\sigma_{i\varphi}(r) = \sigma_{i\varphi}^T(r) + \sigma_{i\varphi}^M(r), \quad (24)$$

$$\sigma_{iz}(r) = \sigma_{iz}^T(r) + \sigma_{iz}^M(r) = \sigma_{iz}^T(r), \quad i = 1 \dots n. \quad (25)$$

Az $u_i^M(r)$, $\sigma_{ir}^M(r)$, $\sigma_{i\varphi}^M(r)$ képletében szereplő ismeretlen f_i ($i=2 \dots n$) állandókat az elmozdulásmező folytonosságát biztosító

$$u_i(R_{i+1}) = u_{i+1}(R_{i+1}), \quad i = 2 \dots (n-1). \quad (26)$$

egyenlet alapján nyert meghatározást, feltéve, hogy f_0 és f_{n+1} adott, vagyis

$$\sigma_{lr}(R_1) = f_1 = -p_1, \quad \sigma_{nr}(R_{n+1}) = f_{n+1} = -p_{n+1}. \quad (27)$$

A következőkben a (26) egyenletrendszer részletes kifejtésével foglalkozunk. Az $u_i^M(R_{i+1})$ és $u_{i+1}^M(R_{i+1})$ képleteinek felhasználásával az alábbi eredményre jutunk:

$$a_i f_i + b_i f_{i+1} + c_i f_{i+2} = u_{i+1}^T(R_{i+1}) - u_i^T(R_{i+1}), \quad i = 2 \dots (n-1). \quad (28)$$

Itt bevettük az alábbi jelöléseket:

$$a_i = -\frac{1}{G_i(1+\nu_i)} \frac{R_i^2 R_{i+1}}{R_{i+1}^2 - R_i^2}, \quad (29)$$

$$b_i = \frac{R_{i+1}}{2G_i(R_{i+1}^2 - R_i^2)} \left[\frac{(1-\nu_i)}{(1+\nu_i)} R_{i+1}^2 + R_i^2 \right] + \frac{R_{i+1}}{2G_{i+1}} \left[\frac{(1-\nu_{i+1})}{(1+\nu_{i+1})} R_{i+1}^2 + R_{i+2}^2 \right], \quad (30)$$

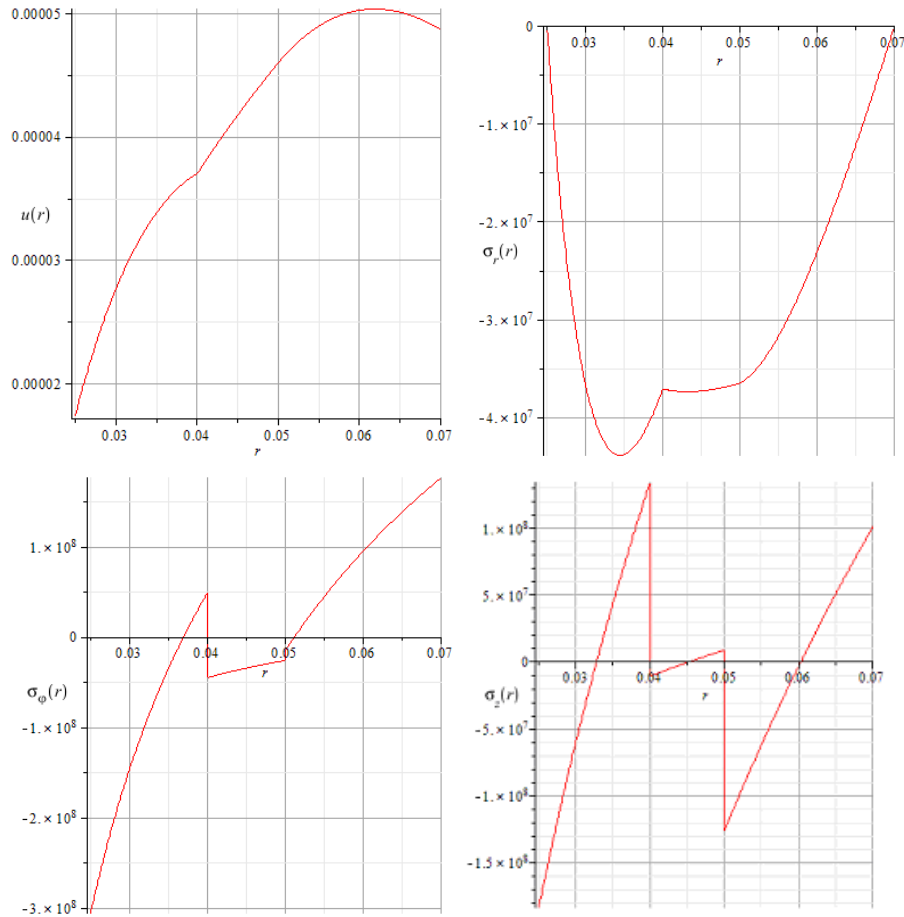
$$c_i = -\frac{1}{G_{i+1}(1+\nu_{i+1})} \frac{R_{i+2}^2 R_{i+1}}{R_{i+2}^2 - R_{i+1}^2}, \quad i = 2 \dots (n-1). \quad (31)$$

Az f_i ($i=1 \dots n+1$) állandók ismeretében lehetőségünk van a (22-25) képletek alkalmazásával a kapcsolt mechanikai és hőterhelésnek alávetett rétegzett körhenger alakú test elmozdulásainak és feszültségeinek a meghatározására.

6. Numerikus példa

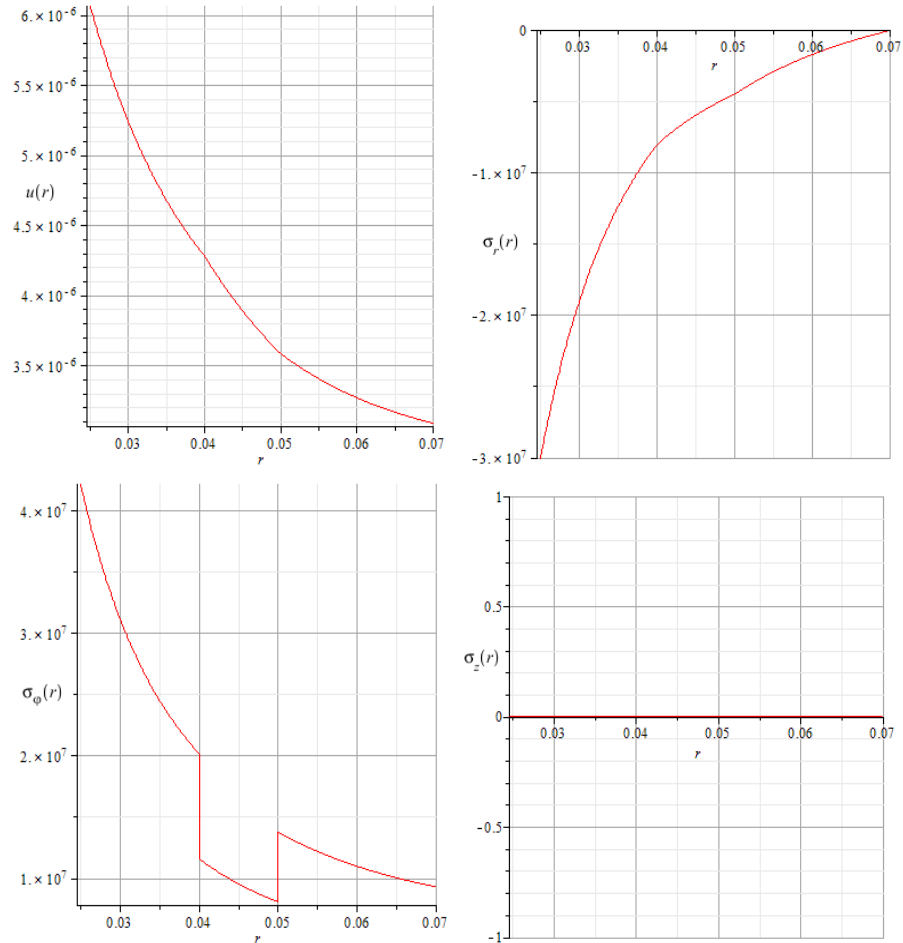
A numerikus példában egy háromrétegű körhenger alakú testet vizsgálunk. A feladatot az alábbi adatokkal oldottuk meg:

$$\begin{aligned} R_1 &= 0.025m, \quad R_2 = 0.04m, \quad R_3 = 0.05m, \quad R_4 = 0.07m, \quad t_1 = 450K, \quad t_2 = 297K, \\ \lambda_1 &= 58 \frac{W}{mK}, \quad \lambda_2 = 401 \frac{W}{mK}, \quad \lambda_3 = 58 \frac{W}{mK}, \quad \alpha_1 = 1.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}, \quad \alpha_2 = 1.65 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}, \\ \alpha_3 &= 1.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}, \quad E_1 = 2.11 \cdot 10^{11} Pa (G_1 = 81.15GPa), \quad \nu_1 = 0.3, \quad \nu_2 = 0.3, \quad \nu_3 = 0.3, \\ E_2 &= 1.3 \cdot 10^{11} Pa (G_2 = 50GPa), \quad E_3 = 2.11 \cdot 10^{11} Pa (G_3 = 81.15GPa), \quad f_1 = -p_1 = -30MPa, \\ f_4 &= -p_4 = 0MPa. \end{aligned}$$



3. ábra. A mechanikai terhelés nélküli eset elmozdulás (m) – radiális koordináta (m), $\sigma_r(\text{Pa}) - r(\text{m})$, $\sigma_\phi(\text{Pa}) - r(\text{m})$ és $\sigma_z(\text{Pa}) - r(\text{m})$ görbéi.

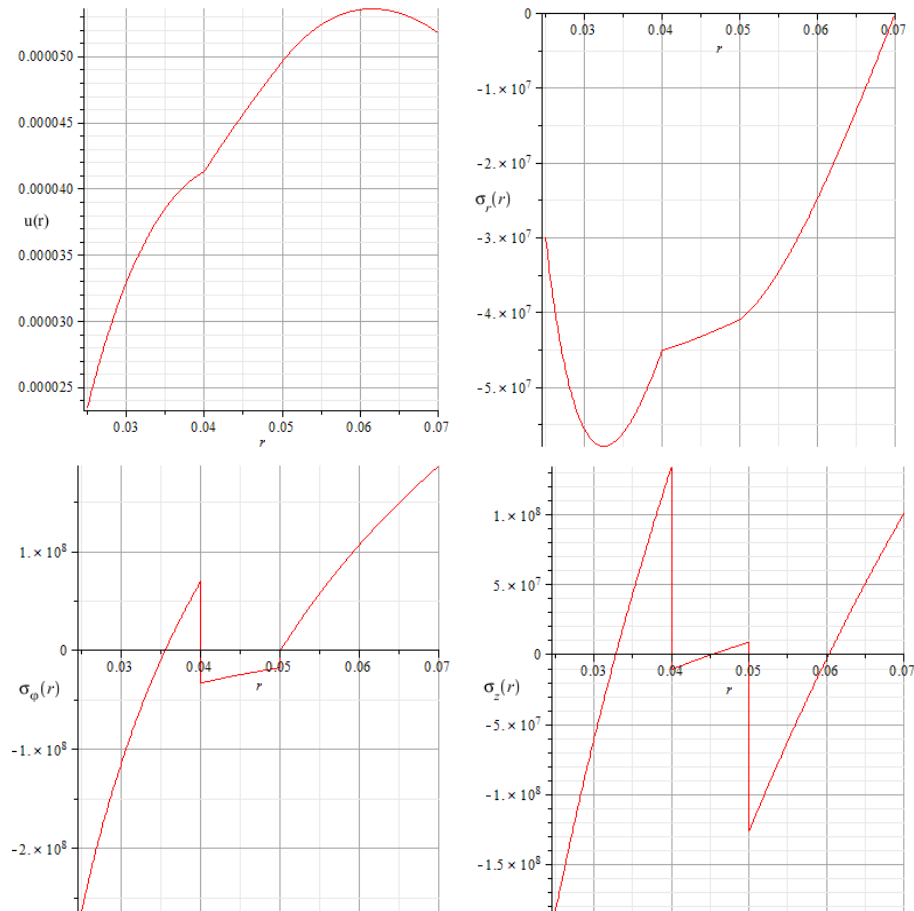
A radiális irányú elmozdulásokat és a σ_r , σ_ϕ , σ_z normál feszültségeket három különböző esetre ábráztuk. Az első feladatban nincs hőterhelés, csak mechanikai terhelés, azaz $t_1=t_4=293\text{K}$ és $f_1=-30\text{MPa}$, $f_4=0\text{Pa}$. E feladat megoldásgörbéit a 3. ábra mutatja. A második esetben nincs mechanikai terhelés, csak hőterhelés, azaz $t_1=450\text{K}$, $t_4=297\text{K}$ és $f_1=f_4=0\text{MPa}$. Ezen feladat megoldásgörbéit a 4. ábrán láthatók.



4. ábra. A hőterhelés nélküli eset elmozdulás $u(r)$ – radiális koordináta r (m), σ_r (Pa) – r (m), σ_ϕ (Pa) – r (m) és σ_z (Pa) – r (m) megoldásgörbéi.

A harmadik feladat az egyidejűleg alkalmazott mechanikai és hőterhelésre vonatkozik, vagyis a fejezet elején található adatokat használtuk. Ezen eset megoldásának görbéit az 5. ábra tartalmazza.

A három feladat görbéit összevetve megállapítható, hogy a terhelések közül a hőterhelés hatása jelentősebb, mint a 30 MPa belső nyomás jelentette mechanikai igénybevétel.



5. ábra. A teljes feladatra vonatkozó elmozdulás $u(r)$ – radiális koordináta r (m), σ_r (Pa) – r (m), σ_ϕ (Pa) – r (m) és σ_z (Pa) – r (m) megoldásgörbék.

7. Összefoglalás

A tanulmány egy analitikus (egzakt) eljárást ismertet a rétegzett körhenger alakú testekben a mechanikai és hőterhelés hatására fellépő hőmérsékletmező, elmozdulások és hőfeszültségek meghatározására. A feladat megoldásának elméleti alapjait a hővezetés Fourier elmélete és az állandósult hőfeszültségek számítására használt mezőegyenletek adják. A kidolgozott analitikus módszer alkalmazásával nyert numerikus eredmények a különböző numerikus eljárásokkal, mint például a végelemek módszerével kapott megoldások számára „Benchmark” feladatként is használhatók a szóban forgó közelítő módszerek pontosságának az ellenőrzésére. A bemutatott analitikus módszer alkalmazásával nyert numerikus eredményeket egybevetve az egyes numerikus eljárásokkal

(pl. végeselem módszer, differencia módszer etc.) kapott megoldásokkal mód nyílik a szóban forgó közelítő módszerek pontosságának ellenőrzésére. A képletszerű megoldások pedig a réteges szerkezetű csövekkel kapcsolatos mérnöki feladatok megoldása során alkalmazhatók.

8. Köszönetnyilvánítás

A cikkben leírt kutatómunka a TÁMOP-4.2.1B-10/2/KON-2010-0001 és a TÁMOP-4.2.2.B-10/1-2010-0008 jelű projektek részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

9. Irodalom

- [1] Boley, B. A., Weiner, J. H.: *Theory of Thermal Stresses*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1960.
- [2] Kovalenko, A. D.: *Thermoelasticity* (Basic theory and applications), Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.
- [3] Nowacki, W.: *Thermoelasticity*, Second edition, Pergamon Press, Oxford and P.N.W.-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1986.
- [4] Nowinski, I. L.: *Theory of Thermoelasticity with Applications*. Sythoff and Noordhoff, Alpen aan den Rijn, 1978.
- [5] Noda, N. , Hetnarski, R. B. and Tanigawa Y.: *Thermal Stresses*. Lastran Corporation, Rochester, New York, 2000.