

HETEROGÉN SÍKGÖRBE RUDAK LEHETSÉGES MECHANIKAI MODELLJE

Kiss László Péter

Doktorandusz, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: mechkiss@uni-miskolc.hu

Összefoglalás

A jelen cikk célja néhány homogén, izotróp, lineárisan rugalmas anyagú görbe rúdra vonatkozó képlet általánosítása inhomogén anyagú rudak esetére. Ennek tükrében feltevés, hogy az anyagjellemzők csak a keresztmetszeti koordináták függvényei. A vizsgálatok magukban foglalják a normálfeszültség (a Grashof-féle formula), a nyírófeszültség és a görbületváltozás képleteinek az általánosítását. Érdekesség, hogy az újonnan felállított összefüggések szerkezetüket tekintve megegyeznek a klasszikusokkal. A cikk végén számpéldákon keresztül kerül bemutatásra az eredmények alkalmazhatósága.

Kulcsszavak: síkgörbe rúd, heterogén anyag, Grashof-formula, görbületváltozás, alakváltozási energia

Abstract

The main objective of the present paper is a generalization of some classical results for curved beams made of heterogeneous materials. We consider a beam made of nonhomogeneous, isotropic, linearly elastic material. The elastic parameters depend on the cross-sectional coordinates only. Our investigations include the determination of the normal stress (i.e. the generalization of the Grashof formula), the shearing stress and the curvature change. Interestingly, our newly established formulae have the same structure as the classical ones. We conclude with numerical examples which illustrate the applicability of our results.

Keywords: curved beam, heterogenous material, Grashof formula, curvature change, strain energy

1. Bevezetés

A legtöbb szilárdságtani kérdésekkel foglalkozó egyetemi tankönyv külön fejezetet szentel a homogén izotróp anyagú síkgörbe rudak mechanikai kérdéseinek – a teljesség igénye nélkül emeljük ki ehelyütt az [1] könyv 4.15 szakaszát, avagy a [2] tankönyv 10.1. szakaszát. Az idézett könyvek a mindennapi mérnöki gyakorlatban jól alkalmazható formulákat közölnek a rúdban ébredő normál- és nyírófeszültség, a görbületváltozás és a rúdban tárolt alakváltozási energia számítására. A jelen tanulmány fő célja az idézett klasszikus eredmények általánosítása heterogén anyagú síkgörbe rudakra. Ami a heterogenitás jellegét illeti, azt fogjuk feltételezni, hogy a rugalmasságtani anyagállandók, azaz a Young modulus és a Poisson szám (később kiderül, hogy az utóbbi nem jelenik meg közvetlenül a feszültséget adó képletekben) csak a keresztmetszeti koordináták függvénye, azaz független az axiális koordináktól – ezt az inhomogenitást keresztmetszeti inhomogenitásnak nevezzük majd. Ami a tervezett vizsgálatok közvetlen előzményeit illeti, Ecsedi és Baksa [3], valamint Ecsedi és Dluhi [4] tanulmányai érdemelnek kiemelés –

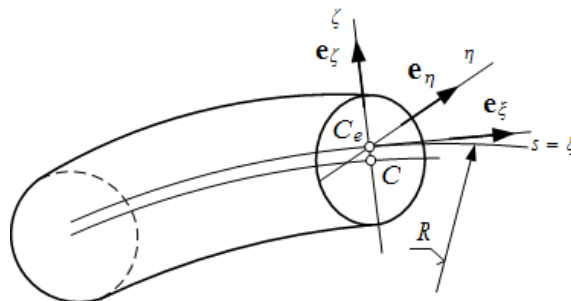
ezekben további, az előzményeket illető hivatkozások találhatók. A [4] tanulmány a keresztmetszeti inhomogenitású egyenes rudak szilárdságtanának oktatásban is jól felhasználható összegezése. A [3] tanulmány síkgörbe rudakkal foglalkozik. Az idézett cikk elmozdulásmezőre alkalmazott hipotézise ekvivalens a jelen tanulmány elmozdulásmezővel kapcsolatos hipotézisével. Az utóbbi a klasszikus Love-féle hipotézis. Ennek használata mellett nézetünk szerint az szól, hogy a fizikai mennyiségek (pl. feszültségek) számítására adódó képletek szerkezetüket illetően megegyeznek a homogén izotróp rudak estére érvényes képletekkel.

A gondolatmenet ismertetése során alkalmazott feltevéseket az alábbiak foglalják röviden össze:

1. az elmozdulások és alakváltozások kicsik;
2. a rúd állandó keresztmetszetű;
3. ugyancsak állandó az E -vel súlyozott középvonal – ennek értelmezését illetően előre utalunk az (1) képlethez kapcsolódó magyarázatra – görbületi sugara;
4. a keresztmetszet mind geometriáját, mind pedig anyagi felépítését tekintve szimmetrikus a ζ tengelyre – lásd az 1. ábrát a geometriai viszonyokat illetően;
5. az E rugalmassági modulus és a ν Poisson szám eleget tesz az

$$E(\eta, \zeta) = E(-\eta, \zeta); \nu(\eta, \zeta) = \nu(-\eta, \zeta)$$
 összefüggéseknek, vagyis csak az η, ζ keresztmetszeti koordináták függvényei;
6. a tengelyirányú σ_ξ normálfeszültség mellett elhanyagolható a többi főfeszültség;
7. a hőhatásokat figyelmen kívül hagyjuk.

2. Kinematikai egyenletek



1. ábra. Az alkalmazott koordináta rendszer

A vizsgálatok során alkalmazott egységbázisú ortogonális görbevonalú $\xi\eta\zeta$ koordinátarendszert az 1. ábra szemlélteti. A bázisvektorokat $\mathbf{e}_\xi(s), \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta(s)$ jelöli. Itt s az E -vel súlyozott középvonalon mért ívkoordináta – az E -vel súlyozott középvonal a rúd szimmetriasíkjában fekszik és a C_e pontban dőli az ábrán szemléltetett keresztmetszetet, a dőfpont helye pedig a

$$Q_{e\eta} = \int_A E(\eta, \zeta) \zeta dA = 0 \quad (1)$$

feltételi egyenletből számítható – $Q_{e\eta}$ az η tengelyre számított E -vel súlyozott statikai

nyomaték. Az E -vel súlyozott középvonalnak – a továbbiakban röviden középvonal – R a sugara. A C pont a keresztmetszet, mint síkidom geometriai középpontja.

Az E -vel súlyozott A_e területet és az E -vel súlyozott η tengelyre számított $I_{e\eta}$ másodrendű nyomatékot az alábbi képletek értelmezik:

$$A_e = \int_A E(\eta, \zeta) dA, \quad I_{e\eta} = \int_A E(\eta, \zeta) \zeta^2 dA. \quad (2)$$

A rúd középvonalához kötött görbevonali koordinátarendszerben

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial s} \frac{R}{R+\zeta} \mathbf{e}_\zeta + \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{e}_\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{e}_\zeta, \quad \frac{d\mathbf{e}_\zeta}{ds} = -\frac{1}{R} \mathbf{e}_\zeta, \quad \frac{d\mathbf{e}_\eta}{ds} = \frac{1}{R} \mathbf{e}_\zeta \quad (3)$$

a ∇ differenciáloperátor. Összhangban a Love-féle hipotézissel, a rúd tetszőleges pontjának elmozdulásvektorát az

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_o + \psi_{o\eta} \zeta \mathbf{e}_\zeta = w_o \mathbf{e}_\zeta + (u_o + \psi_{o\eta} \zeta) \mathbf{e}_\zeta \quad (4)$$

képlettel számítjuk. A képletben $\mathbf{u}_o = u_o \mathbf{e}_\zeta + w_o \mathbf{e}_\eta$ a középvonal elmozdulásvektora, ψ pedig a keresztmetszet merevtestszerű szögelfordulása. Ennek tetszőleges pontban

$$\boldsymbol{\psi} = -\frac{1}{2} (\mathbf{u} \times \nabla)$$

az értéke, következésképp (elhagyva a formális átalakításokat)

$$\boldsymbol{\psi}_{\zeta=0} = \psi_{o\eta} \mathbf{e}_\eta = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u_o}{R} - \frac{dw_o}{ds} \right) \mathbf{e}_\eta + \psi_{o\eta} \mathbf{e}_\eta \right], \quad (5)$$

ahonnan

$$\psi_{o\eta} = \frac{u_o}{R} - \frac{dw_o}{ds} \quad \text{és} \quad \frac{d\psi_{o\eta}}{ds} = \kappa_o = -\frac{d}{ds} \left(\frac{dw_o}{ds} - \frac{u_o}{R} \right) \quad (6)$$

a középvonal szögelfordulása és a görbülete. A ζ tengely irányú fajlagos nyúlás az \mathbf{E} alakváltozási tenzorból számítható – \circ a diádikus szorzás műveleti jele:

$$\varepsilon_\zeta = \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_\zeta \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_\zeta. \quad (7)$$

Innen kapjuk, hogy

$$\varepsilon_\zeta = \frac{R}{R+\zeta} \left(\frac{du_o}{ds} + \frac{w_o}{R} + \frac{d\psi_{o\eta}}{ds} \zeta \right) = \frac{R}{R+\zeta} (\varepsilon_{o\xi} + \zeta \kappa_o), \quad (8)$$

ahol

$$\varepsilon_{o\xi} = \frac{du_o}{ds} + \frac{w_o}{R} \quad (9)$$

a középvonal ξ irányú fajlagos nyúlása.

3. A normálfeszültség számítása

3.1. A Grashof formula általánosítása

A klasszikus Grashof-formula általánosításához szükség lesz az

$$A_{eR} = \int_A \frac{R}{R+\zeta} E(\eta, \zeta) dA, \quad Q_{eR} = \int_A \frac{R}{R+\zeta} E(\eta, \zeta) \zeta dA, \quad I_{eR} = \int_A \frac{R}{R+\zeta} E(\eta, \zeta) \zeta^2 dA \quad (10)$$

integrálokra, melyek az E -vel súlyozott A_{eR} redukált területet, az E -vel súlyozott Q_{eR} redukált statikai nyomatékot és az E -vel súlyozott I_{eR} redukált másodrendű nyomatékot értelmezik. Tekintettel a normálfeszültségekkel kapcsolatos $|\sigma_{\xi}| \gg |\sigma_{\eta}|, |\sigma_{\zeta}|$ feltevésre

$$\sigma_{\xi} = E(\eta, \zeta) \varepsilon_{\xi} \quad (11)$$

az egyszerű Hooke törvény, következképp felhasználva a (8) és (9) összefüggéseket, adódik az N rúderő

$$N = \varepsilon_{o\xi} \int_A \frac{R}{R+\zeta} E(\eta, \zeta) dA + \kappa_o \int_A \frac{R}{R+\zeta} E(\eta, \zeta) \zeta dA = \varepsilon_{o\xi} A_{eR} + \kappa_o Q_{eR}, \quad (12a)$$

valamint az M hajlítónyomaték

$$M = \varepsilon_{o\xi} \int_A \frac{R}{R+\zeta} E(\eta, \zeta) \zeta dA + \kappa_o \int_A \frac{R}{R+\zeta} E(\eta, \zeta) \zeta^2 dA = \varepsilon_{o\xi} Q_{eR} + \kappa_o I_{eR} \quad (12b)$$

a kinematikai jellemzők függvényében. A (12) egyenletrendszer megoldása az $\varepsilon_{o\xi}$ fajlagos nyúlást és a κ_o görbületet a belső erők függvényében eredményezi:

$$\varepsilon_{o\xi} = \frac{MQ_{eR} - NI_{eR}}{Q_{eR}^2 - A_{eR}I_{eR}}, \quad \kappa_o = \frac{NQ_{eR} - MA_{eR}}{Q_{eR}^2 - A_{eR}I_{eR}}. \quad (13)$$

Visszaírva az utóbbi két képletet a (8) egyenletbe

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{R}{R+\zeta} \frac{1}{A_{eR}I_{eR} - Q_{eR}^2} [(I_{eR} - \zeta Q_{eR})N - M(Q_{eR} - \zeta A_{eR})] \quad (14)$$

a fajlagos nyúlás alakja. Ezt behelyettesítve az egyszerű Hooke törvénybe

$$\sigma_{\xi} = E(\eta, \zeta) \varepsilon_{\xi} = E(\eta, \zeta) \frac{R}{R+\zeta} \frac{1}{A_{eR}I_{eR} - Q_{eR}^2} [(I_{eR} - \zeta Q_{eR})N - M(Q_{eR} - \zeta A_{eR})] \quad (15)$$

a normálfeszültség. A továbbiakban célunk a normálfeszültség képletének egyszerűsítése, a Grashof-féle formula általánosítása érdekében. Ehhez írjuk fel az A_{eR} , Q_{eR} és I_{eR} mennyiségek és az A_e , $Q_{e\eta}$ és $I_{e\eta}$ jellemzők közötti kapcsolatot. Kihaszználva a továbbiakban az $R/(R+\zeta)$ tört sorfejtését valamint a $Q_{e\eta} = 0$ összefüggést, kapjuk rendre, hogy

$$\begin{aligned} A_{eR} &= \int_A \left(1 - \frac{\zeta}{R} + \dots\right) E(\eta, \zeta) dA \cong A_e - \frac{Q_{e\eta}}{R} = A_e, \\ Q_{eR} &= \int_A \left(1 - \frac{\zeta}{R} + \dots\right) \zeta E(\eta, \zeta) dA \cong Q_{e\eta} - \frac{I_{e\eta}}{R} = -\frac{I_{e\eta}}{R}, \end{aligned} \quad (16a)$$

illetve hogy

$$I_{eR} = \int_A \left(1 - \frac{\zeta}{R} + \dots\right) \zeta^2 E(\eta, \zeta) dA \cong I_{e\eta}. \quad (16b)$$

Tekintettel a fenti képletekre és az $1 \gg I_{e\eta}/(R^2 A_{eR})$ egyenlőtlenségre, átalakítható a (15) képlet nevezője:

$$A_{eR} I_{eR} \left(1 - \frac{Q_{eR}^2}{I_{eR} A_{eR}} \right) \simeq A_{eR} I_{eR} \left(1 - \frac{I_{e\eta}^2}{R^2 A_{eR} I_{eR}} \right) \simeq A_{eR} I_{eR} \left(1 - \frac{I_{e\eta}}{R^2 A_{eR}} \right) \simeq A_{eR} I_{eR}. \quad (17)$$

Mindezeket felhasználva a (14) összefüggésből

$$\varepsilon_\xi \approx \left(1 - \zeta \frac{Q_{eR}}{I_{eR}} \right) \frac{R}{R + \zeta} \frac{N}{A_{eR}} + \left(-\frac{Q_{eR}}{A_{eR} I_{eR}} + \frac{\zeta}{I_{eR}} \right) \frac{R}{R + \zeta} M \quad (18)$$

a fajlagos nyúlás értéke. Ha emellett azt is figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{Q_{eR}}{I_{eR}} \simeq -\frac{1}{R} \frac{I_{e\eta}}{I_{eR}} \simeq -\frac{1}{R}, \quad \frac{1}{R} \frac{R}{R + \zeta} \frac{M}{A_{eR}} \simeq \frac{M}{R A_{eR}}, \quad (19)$$

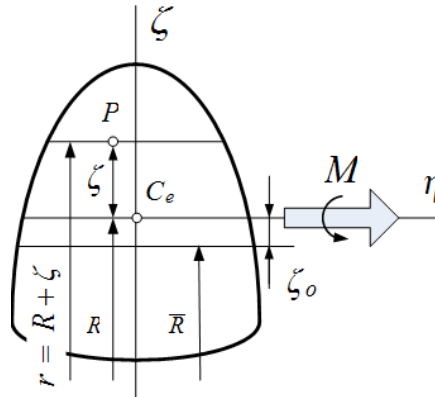
akkor a Hooke törvénybe helyettesítve a fajlagos nyúlás értékét a

$$\sigma_\xi = E(\eta, \zeta) \left(\frac{N}{A_{eR}} + \frac{M}{R A_{eR}} + \frac{M}{I_{eR}} \frac{R}{R + \zeta} \zeta \right) \quad (20)$$

formulát kapjuk a normálfeszültségre. Ez a képlet a Grashof formula általánosítása keresztmetszeti inhomogenitású síkgörbe rúd esetére.

3.2. A normálfeszültség számítása a zérusvonal ismeretében

Az angol nyelvű szakirodalom homogén anyagú síkgörbe rudak tiszta hajlítására a Grashof-formulától eltérő (de azzal ekvivalens) összefüggést közöl a normálfeszültségre – lásd például a (4.71) képletet az [1] könyvben. A jelen szakaszban ezt a képletet általánosítjuk keresztmetszeti inhomogenitás feltételezése mellett. A 2. ábra a rúd egy kiragadott keresztmetszetén szemléltet néhány új jelölést: ζ_o a zérusvonal koordinátája, \bar{R} pedig zérusvonal sugara. A keresztmetszet tetszőleges P pontjához tartozó sugár $R + \zeta$. Ez utóbbit az egyszerűbb írásmód miatt r -rel jelöljük majd.



2. ábra. Néhány új jelölés

Mivel tiszta hajlítás esetén zérus az N rúderő, egyszerűsödik a normálfeszültség (15) képlete:

$$\sigma_{\xi} = E(\eta, \zeta) \frac{R}{R + \zeta} \frac{1}{A_{eR} I_{eR} - Q_{eR}^2} (\zeta A_{eR} - Q_{eR}) M. \quad (21)$$

A zérusvonalon eltűnik a normálfeszültség, következésképp

$$Q_{eR} = \zeta_o A_{eR} = (R + \zeta_o - R) A_{eR} = (\bar{R} - R) \rightarrow \bar{R} = \frac{Q_{eR}}{A_{eR}} + R. \quad (22)$$

Ide helyettesítve (10) alapján az A_{eR} -t és Q_{eR} -t adó integrálokat

$$\begin{aligned} \bar{R} &= R + \frac{\int_A E(\eta, \zeta) \zeta \frac{R}{r} dA}{\int_A \frac{R}{r} E(\eta, \zeta) dA} = \frac{R^2 \int_A \frac{E(\eta, \zeta)}{r} dA + R \int_A \zeta \frac{E(\eta, \zeta)}{r} dA}{R \int_A \frac{E(\eta, \zeta)}{r} dA} = \\ &= \frac{R \int_A \frac{E(\eta, \zeta)}{r} dA + \int_A \zeta \frac{E(\eta, \zeta)}{r} dA}{\int_A \frac{E(\eta, \zeta)}{r} dA} = \frac{\int_A E(\eta, \zeta) \frac{R + \zeta}{r} dA}{\int_A \frac{E(\eta, \zeta)}{r} dA} = \frac{\int_A E(\eta, \zeta) dA}{\int_A \frac{E(\eta, \zeta)}{r} dA} \end{aligned} \quad (23)$$

a zérusvonal sugara. Ennek birtokában írható, hogy

$$\zeta A_{eR} - Q_{eR} = (r - R) A_{eR} + R A_{eR} - \bar{R} A_{eR} = (r - \bar{R}) A_{eR}. \quad (24)$$

Ha ezen felül élünk az $A_{eR} I_{eR} \gg Q_{eR}^2$ egyenlőtlenség adta elhanyagolási lehetőséggel (21) esetén kapjuk, hogy

$$\sigma_{\xi} = E(\eta, \zeta) \frac{M}{r} \frac{R}{I_{eR}} (r - \bar{R}). \quad (25)$$

Egyetlen további teendőnk az R / I_{eR} hányados egyszerűbb alakra hozása. Ennek nevezőjét a (10)₃ és a (16a) értelmezéseket, a (23) levezetés végeredményét, valamint a 2. ábra jelöléseit is felhasználva az

$$\begin{aligned} I_{eR} &= \int_A E(\eta, \zeta) \frac{R}{r} \zeta^2 dA = \int_A E(\eta, \zeta) R \frac{R + \zeta - R}{r} \zeta dA = \int_A E(\eta, \zeta) R \frac{r - R}{r} \zeta dA = \\ &= R \int_A E(\eta, \zeta) \zeta dA - \int_A E(\eta, \zeta) R^2 \frac{r - R}{r} dA = \underbrace{R Q_{eR}}_0 - R^2 \int_A E(\eta, \zeta) dA + \\ &+ R^3 \int_A \frac{E(\eta, \zeta)}{r} dA = -R^2 A_e + R^3 \frac{A_e}{R} = A_e R^2 \left(-1 + \frac{R}{R} \right) = A_e R^2 \left(\frac{R - \bar{R}}{R} \right) = -A_e \frac{R^2}{R} \zeta_o \end{aligned} \quad (26)$$

lépésekben lehet kedvezőbb alakra hozni. Ha a $-\zeta_o$ helyett e -t írunk, akkor ez utóbbi eredményt (25)-be helyettesítve kapjuk a normálfeszültségre a

$$\sigma_{\xi} = E(\eta, \zeta) \frac{M}{r} \frac{r - \bar{R}}{A_e e} \quad (27)$$

formulát. A (23) és a fenti (27) képlet az [1] könyv (4.67) és (4.71) képleteinek általánosítása keresztmetszeti inhomogenitású síkgörbe rúd esetére. (Ha állandó a rugalmassági modulus, akkor visszakapjuk a (23) és (27) képletekből az idézett könyv (4.67) és (4.71) képleteit.)

4. A nyírófeszültség számítása

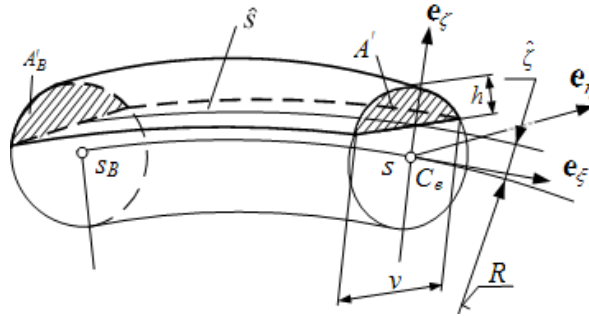
4.1. Képlet a nyírófeszültségre

A jelen szakaszban a rúd egy infinitezimális hosszúságú részének egyensúlyát véve alapul, zárt alakban kíséreljük meg kifejezni a nyírófeszültséget. A 3. ábra vastag körvonalakkal emeli ki a tekintett rúdrészt. Ezt a rúdrészt (tartományt) az A'_B , A' véglapok, az $R + \hat{\zeta}$ sugarú hengerfelület és rúd terheletlen palástja határolja. A tartomány magasságát $h(\hat{\zeta})$ jelöli, $v(\hat{\zeta})$ a tartomány szélessége. A bal oldali s_B ívkoordináta rögzített, az s pedig paraméter. A továbbiakban az alábbi feltevésekkel élünk:

- a rúd bármely keresztmetszetében a $\zeta = \hat{\zeta}$ egyenesen a $\boldsymbol{\tau}_\xi = \tau_{\eta\xi}\mathbf{e}_\eta + \tau_{\zeta\xi}\mathbf{e}_\zeta$ nyírófeszültségek hatásvonalai egy ponton metszik egymást. Ezt a keresztmetszet kontúrja és a $\zeta = \hat{\zeta} = \text{állandó}$ egyenesek metszéspontjaiban a kontúrhoz rajzolt érintők metszése adja. Ennek következménye, hogy a $\tau_{\eta\xi}$ nyírófeszültség η páratlan függvénye;
- ugyancsak állandó az E -vel súlyozott középvonal – ennek értelmezését illetően visszautalunk az (1) képlethez kapcsolódó magyarázatra – görbületi sugara;
- az M hajlítónyomaték és T_ζ nyíróerő között fennáll, hogy

$$\frac{dM}{ds} = -T_\zeta; \quad (28)$$

- állandó a $\tau_{\zeta\xi}$ feszültség, ha állandó a ζ ;
- nincs hatással a nyírófeszültség-eloszlás a normálfeszültség-eloszlásra.



3.ábra. Infinitezimális hosszúságúnak tekintett rúdszakasz

Az ábrán kiemelt rúdszakasz egyensúlyát az

$$\int_{A'} (\sigma_\xi \mathbf{e}_\xi + \boldsymbol{\tau}_\xi) dA - \int_{A'_B} (\sigma_\xi \mathbf{e}_\xi + \boldsymbol{\tau}_\xi) dA - \int_{s_B}^s \tau_{\zeta\xi}(\hat{\zeta}) \mathbf{e}_\zeta(\xi) \underbrace{\frac{R + \hat{\zeta}}{R} v(\hat{\zeta})}_{dA} d\xi = \mathbf{0} \quad (29)$$

egyenlet fejezi ki. Ha deriváljuk ezt az s ívkoordináta szerint, és beszorozzuk az eredményt skalárisan \mathbf{e}_ζ -vel, akkor kapjuk, hogy

$$\int_{A'} \frac{d\sigma_{\xi}}{ds} dA + \int_{A'} \frac{\tau_{\xi\xi}}{R} dA - \frac{R + \hat{\zeta}}{R} \nu(\hat{\zeta}) \tau_{\xi\xi}(\hat{\zeta}) = 0. \quad (30)$$

Jelölje e_{\max} a keresztmetszet szélső szálának maximális távolságát a C_e ponttól. Ez mindig kisebb, mint R . Az A' terület mindig megadható a $\nu(\hat{\zeta})h(\hat{\zeta})$ alakban, ahol $h(\hat{\zeta})$ kisebb, mint e_{\max} . Ezek szerint

$$\int_{A'} \frac{\tau_{\xi\xi}(\eta, \zeta)}{R} dA \simeq \frac{1}{R} h(\hat{\zeta}) \nu(\hat{\zeta}) \tau_{\xi\xi}(\hat{\zeta}), \quad \frac{h(\hat{\zeta})}{R} \ll 1 \quad (31)$$

a (30) egyenlet második tagjának felső korlátja, mivel a nyírófeszültséget nem az A' tartomány belső pontjaiban, hanem a $\hat{\zeta}$ vonalon felvett értékével helyettesítettük. Utóbbi egyenlet alapján elhanyagoljuk a (30) összefüggésben álló második integrált. Ekkor a

$$\tau_{\xi\xi}(\hat{\zeta}) = \frac{R}{R + \hat{\zeta}} \frac{1}{\nu(\hat{\zeta})} \int_{A'} \frac{d\sigma_{\xi}}{ds} dA \quad (32)$$

összefüggés adja a keresett nyírófeszültséget. Ide helyettesítve a (20) alatti normálfeszültséget, a deriválás elvégzése és az

$$\alpha_e = \frac{I_{eR}}{R^2 A_{eR}}; \quad Q'_{e\eta} = \int_{A'} E(\eta, \zeta) \frac{R}{R + \zeta} \zeta dA; \quad \int_{A'} E(\eta, \zeta) dA = A'_e \quad (33)$$

jelölések bevezetése után

$$\tau_{\xi\xi}(\hat{\zeta}) = -\frac{R}{R + \hat{\zeta}} \frac{T_{\zeta}}{I_{eR} \nu(\hat{\zeta})} (R \alpha_e A'_e + Q'_{e\eta}) \quad (34)$$

a nyírófeszültség átlagértéke. Ezen eredmény a [2] könyv 358-359. oldalán közölt képlet általánosítása keresztmetszeti inhomogenitás esetére.

4.2. Korrekciós tényező

A továbbiakban feltételezzük, hogy az anyagjellemzők csak a ζ függvényei. Feltételezzük továbbá, hogy a nyírásból adódó teljes alakváltozási energia az

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau_{\xi\xi}(\zeta)^2}{G(\zeta)} dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \int_{A'} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \frac{\tau_{\xi\xi}(\zeta)^2}{G(\zeta)} dA ds \quad (35)$$

képlettel számítható, ahol \mathcal{L} a rúd E -vel súlyozott középvonalának hossza, a $G(\zeta)$ nyírási rugalmassági modulus, ami az $E(\zeta) = 2G(\zeta)[1 + \nu(\zeta)]$ összefüggésből számítható – ν a Poisson szám. Az egységnyi rúdhosszra eső alakváltozási energia az előző képlet alapján az

$$U_{\tau} = \frac{1}{2} \int_{A'} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \frac{\tau_{\xi\xi}(\zeta)^2}{G(\zeta)} dA = \frac{1}{2} \left(\frac{T_{\zeta}}{I_{eR}}\right)^2 \int_{A'} \frac{R}{R + \zeta} \frac{1}{G(\zeta)} \frac{(R \alpha_e A'_e + Q'_{e\eta})^2}{\nu(\zeta)^2} dA \quad (36)$$

alakban írható fel, ha helyettesítjük $\tau_{\xi\xi}$ (34) alatti képletét. Másrésztől, kihasználva, hogy

$$\gamma_{\xi\xi} = \gamma_{\zeta\xi} = \frac{1}{2} \left[\frac{R}{R + \zeta} \left(\frac{\partial w_o}{\partial \xi} - \frac{u_o}{R} \right) + \left(1 - \frac{\zeta}{R}\right) \psi_{o\eta} \right]$$

a szögtorzulás – a képlet azzal a feltevéssel adódott, hogy egymástól függetlenek

tekintettük az u_o, w_o elmozdulásokat és a $\psi_{o\eta}$ forgást – átírható a (36) képlet:

$$U_\tau = \frac{1}{2} \int_A \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \tau_{\xi\zeta}(\zeta) \gamma_{\xi\zeta}(\zeta) dA =$$

$$= \frac{1}{2} \int_A \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w_o}{\partial \xi} - \frac{u_o}{R} \right) + \left(1 - \left(\frac{\zeta}{R} \right)^2 \right) \psi_{o\eta} \right] \tau_{\xi\zeta}(\zeta) dA \approx -\frac{1}{2} T_\zeta \gamma_{\xi\zeta o}, \quad (37)$$

$\approx \gamma_{\xi\zeta}(0) = \gamma_{\xi\zeta o} = \text{állandó}$

ha elhanyagoljuk a $(\zeta/R)^2$ értékét az egység mellett. A (36) és (37) képletek egybevetéséből következik, hogy

$$\frac{1}{2} T_\zeta \gamma_{\xi\zeta o} = -\frac{1}{2} \left(\frac{T_\zeta}{I_{eR}} \right)^2 \int_A \frac{R}{R+\zeta} \frac{1}{G(\zeta)} \frac{(R\alpha_e A'_e + Q'_{e\eta})^2}{v(\zeta)^2} dA$$

azaz, hogy

$$T_\zeta = -\gamma_{\xi\zeta o} \frac{I_{eR}^2}{\int_A \frac{R}{R+\zeta} \frac{1}{G(\zeta)} \frac{(R\alpha_e A'_e + Q'_{e\eta})^2}{v(\zeta)^2} dA} = -\gamma_{\xi\zeta o} k_\gamma, \quad (38)$$

ahol

$$k_\gamma = \frac{I_{eR}^2}{\int_A \frac{R}{R+\zeta} \frac{1}{G(\zeta)} \frac{(R\alpha_e A'_e + Q'_{e\eta})^2}{v(\zeta)^2} dA} \quad \text{és} \quad \chi_\gamma = \frac{k_\gamma}{\int_A G(\zeta) dA}. \quad (39)$$

Itt az utóbbit tekintjük nyírási korrekciós tényezőnek. Ha homogén izotróp anyagú a rúd, akkor a (38)₂ képletből elemi átalakításokkal – állandó az E és a G , $R \rightarrow \infty$, zérus értékű az α_e – adódik az egyenes rudakra érvényes

$$\chi_\gamma = \frac{I_\eta^2}{A \int_A \frac{(Q'_\eta)^2}{v(\zeta)^2} dA} \quad (40)$$

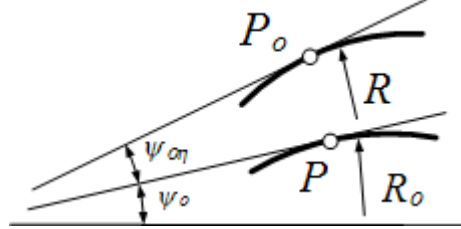
összefüggés. Ez csak a keresztmetszeti jellemzők függvénye. Vegyük észre, hogy a

$$T_\zeta = -\gamma_{\xi\zeta o} \underbrace{\int_A G(\zeta) dA}_{=GA \text{ homogén rúdra}} \chi_\gamma \quad (41)$$

összefüggés mind homogén és egyenes, mind pedig heterogén és görbe rúdra érvényes.

5. Az alakváltozási energia

A 4. ábra a rúd középvonalát, a középvonal egy pontját – elmozdulás előtt (P_o) és után (P), továbbá a középvonal tekintett pontbeli érintőjét, valamint az alakváltozás előtti és az alakváltozás utáni R és \bar{R} görbületi sugarakat szemlélteti. A ψ_o szög megváltozása a merevtestszerű $\psi_{o\eta}$ forgásból adódik.



4. ábra. A görbületi viszonyok megváltozása

A középvonal menti fajlagos nyúlást értelmező

$$\varepsilon_{o\xi} = \frac{ds - ds_o}{ds_o} \quad (42)$$

képletben ds_o a kezdeti állapothoz tartozó ívkoordináta, ds pedig az alakváltozást szenvedett ívelem. Nyilvánvaló, hogy a görbület megváltozását az

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_o} = \frac{d(\psi_o + \psi_{o1})}{ds} - \frac{d\psi_o}{ds_o} = \frac{d(\psi_o + \psi_{o1})}{ds} - \frac{d\psi_o}{ds} (1 + \varepsilon_{o\xi}) = \frac{d\psi_{o1}}{ds} - \varepsilon_{o\xi} \frac{d\psi_o}{ds} \quad (43)$$

átalakítás eredménye adja, ahol

$$\varepsilon_{o\xi} \frac{d\psi_o}{ds} = \varepsilon_{o\xi} \frac{d\psi_o}{ds_o} (1 + \varepsilon_{o\xi}) \cong \varepsilon_{o\xi} \frac{d\psi_o}{ds_o} = \varepsilon_{o\xi} \frac{1}{R_o}. \quad (44)$$

A (9), (43) és (44) egyenletek egybevetéséből

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_o} = \kappa_o - \varepsilon_{o\xi} \frac{1}{R} \quad (45)$$

a görbületváltozás a kinematikai jellemzők függvényében. Ha ide helyettesítjük a κ_o -t adó (13) képletet, majd kihasználjuk, hogy tiszta hajlítás esetén zérus a rüderő és újfent élünk a $Q_{eR}^2 \ll A_{eR} I_{eR}$ elhanyagolással, akkor végül az

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_o} \cong \frac{M}{I_{eR}}$$

képlet adódik a hajlítás hatására bekövetkező görbületváltozásra. Az M hajlítónyomatékhoz tartozó

$$d\psi = \frac{ds}{R} - \frac{ds_o}{R_o} \simeq \frac{ds}{R} - \frac{ds}{R_o} = \frac{M}{I_{eR}} ds \quad (46)$$

elemi szögváltozás ismeretében

$$dU = \frac{1}{2} M d\psi = \frac{1}{2} \frac{M^2}{I_{eR}} ds \quad (47)$$

az elemi rúd hosszban felhalmozódó alakváltozási energia. Legyen \mathcal{L} a rúd középvonalának hossza. Ezzel

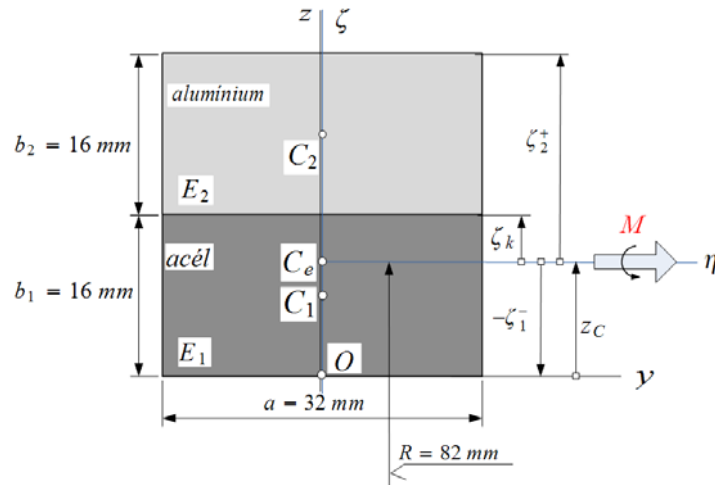
$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \frac{M^2}{I_{eR}} ds \quad (48)$$

a tiszta hajlításhoz tartozó teljes alakváltozási energia.

6. Számpéldák

6.1. Példa

Az 5. ábra a vizsgált rúd keresztmetszetét és a geometriai méreteket szemlélteti. Az igénybevétel tiszta hajlítás: $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_\eta = 100\mathbf{e}_\eta Nm$. A rúd alsó szelvénye acélból, a felső pedig alumíniumból készült, a rugalmassági modulusok rendre $E_1 = 2,1 \times 10^5$ MPa és $E_2 = 7 \times 10^4$ MPa. A keresett normálfeszültséget háromféleképpen, azaz a (15), (20), valamint (27) képlettel egyaránt kiszámítjuk. Ily módon lehetőség nyílik az elhanyagolások hatásának becslésére.



5. ábra. A rúd keresztmetszete

Az yz koordináta-rendszerben felvett z_c az E -vel súlyozott középvonala koordinátája. Ennek számításához vissza kell idéznünk, hogy zérus az E -vel súlyozott statikai nyomaték az η tengelyre. Következésképp

$$Q_{e\eta} = Q_{ey} - z_c A_e = 0, \quad (49)$$

ahonnan

$$z_c = \frac{Q_{ey}}{A_e} = \frac{E_1 \frac{b_1}{2} A_1 + E_2 \left(b_1 + \frac{b_1}{2} \right) A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} = 12 \text{ mm}. \quad (50)$$

A z_c birtokában leolvasható az ábráról, hogy

$$\zeta_1^- = -z_c = -12 \text{ mm}, \quad \zeta_k = 4 \text{ mm}, \quad \zeta_2^+ = 20 \text{ mm}. \quad (51)$$

Ezen adatok birtokában számítani tudjuk a (10) képletekkel az E -vel súlyozott redukált területet és statikai nyomatékot:

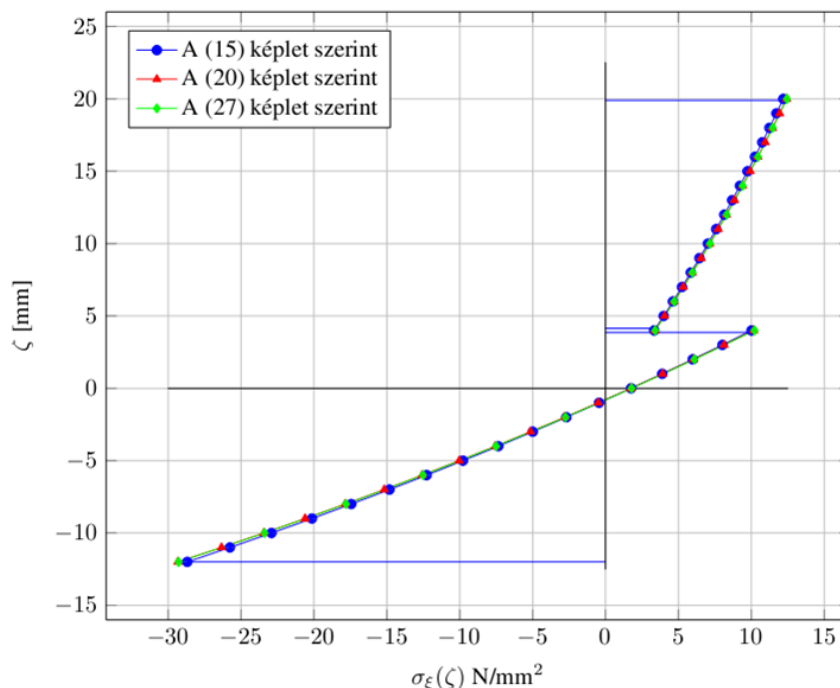
$$A_{eR} = \int_c \frac{R + \zeta - \zeta}{R + \zeta} E(\eta, \zeta) a d\zeta = A_1 E_1 + A_2 E_2 + a \left[(E_2 - E_1) \zeta_k + E_1 \zeta_1^- - E_2 \zeta_2^+ \right] +$$

$$+a \left[(E_2 - E_1) R \ln \left(1 + \frac{\zeta_k}{R} \right) - E_1 R \ln \left(1 + \frac{\zeta_1^-}{R} \right) + E_2 R \ln \left(1 + \frac{\zeta_2^+}{R} \right) \right], \quad (52)$$

$$\begin{aligned} Q_{eR} &= \int \frac{R + \zeta - \zeta}{R + \zeta} E(\eta, \zeta) \zeta \, d\zeta = S_{e\eta} - \int \frac{\zeta^2 E(\eta, \zeta)}{R + \zeta} \, d\zeta = - \int \frac{\zeta^2 E(\eta, \zeta)}{R + \zeta} \, d\zeta = \\ &= -E_1 a \left[\frac{1}{2} (\zeta_k^-)^2 - \zeta_k^- R + R^2 \ln(R + \zeta_k^-) - \frac{1}{2} (\zeta_1^-)^2 + \zeta_1^- R - R^2 \ln(R + \zeta_1^-) \right] - \\ &- E_2 a \left[\frac{1}{2} (\zeta_2^+)^2 - \zeta_2^+ R + R^2 \ln(R + \zeta_2^+) - \frac{1}{2} (\zeta_k^+)^2 + \zeta_k^+ R - R^2 \ln(R + \zeta_k^+) \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

A Steiner-tétellel pedig számítható az E -vel súlyozott másodrendű nyomaték az η tengelyre:

$$\begin{aligned} I_{e\eta} &= \int_A E(\eta, \zeta) \zeta^2 \, dA = E_1 \int_{A_1} \zeta^2 \, dA + E_2 \int_{A_2} \zeta^2 \, dA = \\ &= E_1 \left[\frac{ab_1^3}{12} + \left(z_c - \frac{b_1}{2} \right)^2 ab_1 \right] + E_2 \left[\frac{ab_2^3}{12} + \left(b_1 - z_c + \frac{b_2}{2} \right)^2 ab_2 \right]. \end{aligned} \quad (54)$$



6. ábra. A normálfeszültség eloszlás

Az $I_{e\eta}$ birtokában, visszaidézve (10)₃-at és felhasználva (54)-et, írhatjuk, hogy

$$I_{eR} = \int_{A_1 \cup A_2} \frac{R}{R + \zeta} \zeta^2 E(\eta, \zeta) \, dA = I_{e\eta} + a(E_2 - E_1) \times \left(\zeta_k R^2 - \frac{1}{2} (\zeta_k^-)^2 R - R^3 \ln(R + \zeta_k) + \right.$$

$$\begin{aligned} & +\frac{1}{3}(\zeta_k)^3) - E_1 a \left(-\frac{1}{3}(\zeta_1^-)^3 + \frac{1}{2}(\zeta_1^-)^2 R - \zeta_1^- R^2 + R^3 \ln(R + \zeta_1^-) \right) - \\ & - a E_2 \left(+\frac{1}{3}(\zeta_2^+)^3 - \frac{1}{2}(\zeta_2^+)^2 R + \zeta_2^+ R^2 - R^3 \ln(R + \zeta_2^+) \right), \end{aligned} \quad (55)$$

ami az E -vel súlyozott redukált másodrendű nyomaték képlete. Behelyettesítve az (52)-(55) alatti formulákba az ismert numerikus értékeket, kapjuk hogy

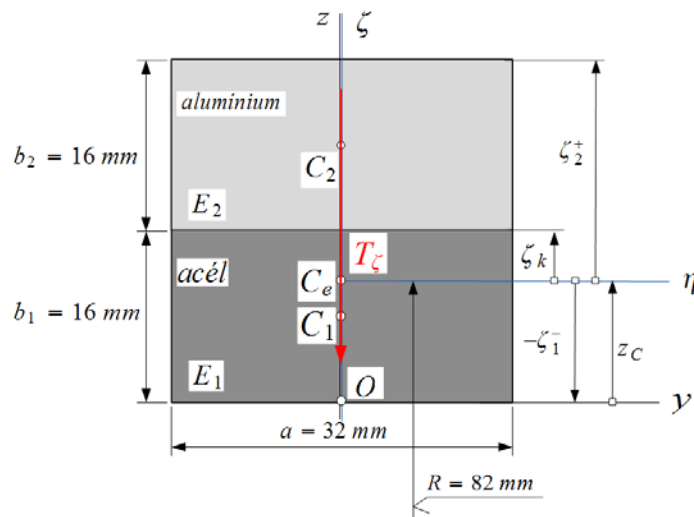
$$\begin{aligned} A_e &= 1,4336 \times 10^8 \text{ N}, \quad A_{eR} = 1,4477 \times 10^8 \text{ N}, \quad Q_{eR} = -1,1588 \times 10^8 \text{ Nmm}, \\ I_{e\eta} &= 9,9396 \times 10^9 \text{ Nmm}^2, \quad I_{eR} = 9,5024 \times 10^9 \text{ Nmm}^2. \end{aligned} \quad (56)$$

A kiszámított adatok birtokában ábrázoltuk a normálfeszültség-eloszlást a pontos (15) képlet, a Grashof-féle képlet általánosításának tekinthető (20) képlet, valamint a (27) képlet felhasználásával. A feszültség eloszlást ζ függvényében szemlélteti a 6. ábra. A számított értékek gyakorlatilag megegyeznek, a legnagyobb eltérés alig éri el a 2% -ot.

Érdeemes még a (15), (20) és (23) képleteket abban a tekintetben is összehasonlítani, hogy mit eredményeznek a zérusvonal koordinátájára vonatkozóan. Figyelembe véve a $\sigma_\zeta(\zeta_o) = 0$ összefüggést, rendre a $-0,8004 \text{ mm}$, $-0,7771 \text{ mm}$, illetve $-0,7845 \text{ mm}$ értékeket kapjuk ζ_o koordinátára. Ez azt jelenti, hogy itt sincs lényeges eltérés.

6.2. Példa

A 7. ábra keresztmetszete a geometriai és anyagjellemzők tekintetében ugyanaz, mint az előző feladatban. A terhelés azonban eltér, hiszen ez most a $T_\zeta = -10 \text{ kN}$ nagyságú nyíróerő. Keressük a $\tau_{\zeta\zeta}$ nyírófeszültség-eloszlást a (34) képlet alapján és a nyírás korrekciós tényezőt. Ez utóbbihoz szükség lesz a $\nu_1 = 0,3$ és $\nu_2 = 0,35$ Poisson számokra is, melyek indexelése összhangban van a rugalmassági modulusok indexelésével.



7. ábra. Nyírásnak kitett keresztmetszet

Az (56) alatti értékek (33)₁-be való helyettesítésével

$$\alpha_e = \frac{I_{eR}}{R^2 A_{eR}} = \frac{9,5024 \times 10^9}{82^2 \times 1,4477 \times 10^8} = 9,7615 \times 10^{-3}.$$

A $\hat{\zeta} \in (4, 20]$ (alumínium anyagú) szakaszon a (33)_{2,3} képletek alapján

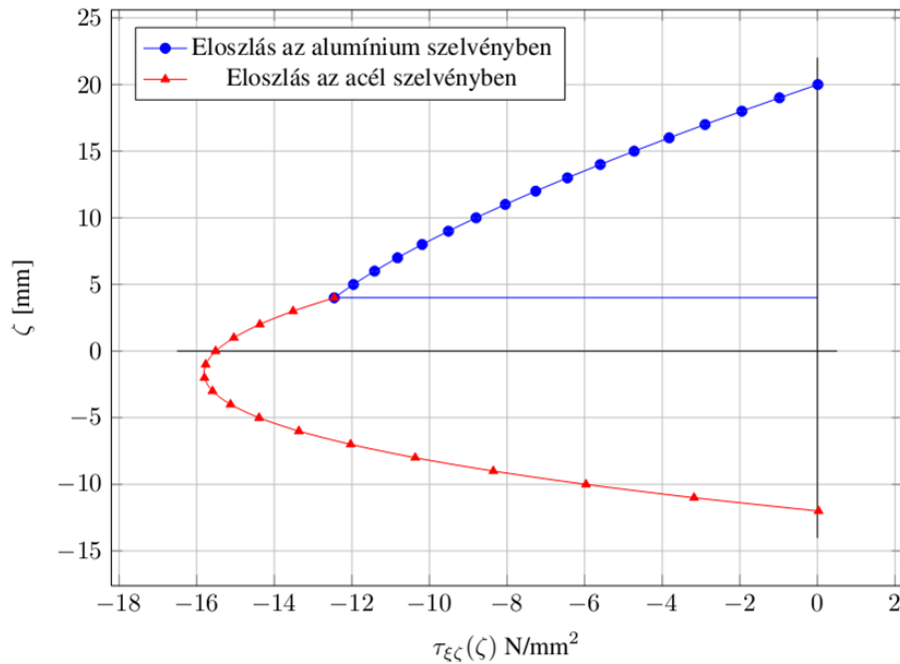
$$A'_e = \int_A E_2 dA = 70000 \times 32 \times \int_{\hat{\zeta}}^{20} d\zeta = 4,48 \times 10^7 - 2,24 \times 10^6 \hat{\zeta} \text{ N}$$

és

$$\begin{aligned} Q'_{e\eta} &= \int_A E_2 \frac{R}{R+\zeta} \zeta dA = 70000 \times 32 \times \int_{\hat{\zeta}}^{20} \frac{82\zeta}{82+\zeta} d\zeta = \\ &= 2,24 \times 10^6 \times \left(-29458,3172 - 82\hat{\zeta} + 6724 \ln(82 + \hat{\zeta}) \right) \text{ Nmm}. \end{aligned}$$

A fenti adatokkal azonnal adódik a nyírófeszültség ezen a tartományon:

$$\tau_{\xi\zeta}(\hat{\zeta}) = \frac{269,6687}{82 + \hat{\zeta}} \times \left(-659,5077 - 1,8547\hat{\zeta} + 150,62 \ln(82 + \hat{\zeta}) \right) \text{ N/mm}^2. \quad (57)$$



8. ábra. Nyírófeszültség eloszlás

Ha az acélból készült $\hat{\zeta} \in [-12, 4]$ rúdrészt tekintjük, akkor kapjuk, hogy

$$A'_e = \int_A E_1 dA = 210000 \times 32 \times \int_{-12}^{\hat{\zeta}} d\zeta = 6,72 \times 10^6 \hat{\zeta} + 8,064 \times 10^7 \text{ N},$$

és, hogy

$$Q'_{e\eta} = \int_A E_1 \frac{R}{R+\zeta} \zeta dA = 5,5104 \times 10^8 \hat{\zeta} - 4,5185 \times 10^{10} \ln(82 + \hat{\zeta}) + 1,9858 \times 10^{11} \text{ Nmm}.$$

Következésképp

$$\tau_{\zeta\zeta}(\hat{\zeta}) = \frac{269,6687}{82 + \hat{\zeta}} \times \left[-5,5641\hat{\zeta} - 1986,464 + 451,8528 \ln(82 + \hat{\zeta}) \right] \text{ N/mm}^2. \quad (58)$$

A nyírófeszültség eloszlást a ζ függvényében a 8. ábra jeleníti meg. Itt érdemes megjegyezni, hogy a (34) összefüggés nyírófeszültségi átlagértéket eredményez. Ez azt jelenti, hogy a kapott eredmény pontosabb, ha a rugalmassági modulus nem függ az η koordinátától, hanem csak a ζ függvénye: $E = E(\zeta)$.

Ami a nyírási korrekciós tényező értékét illeti, első lépésként a (39)₁ összefüggésbe való behelyettesítéseket célszerű elvégezni. Ezek során használjuk ki az alábbi megfontolásokat: (a) a hivatkozott képletben álló $v(\zeta)$ most egy konstans, értéke megegyezik a keresztmetszet a -val jelölt szélességével; (b) a $G(\zeta)$ csúsztató rugalmassági modulus állandó a $\hat{\zeta} \in [-12; 4]$, valamint a $\hat{\zeta} \in [4; 20]$ szakaszokon belül; továbbá (c) az A_e' , $Q'_{e\eta}$ jellemzők a két intervallumon belül folytonosak. Az előbbiekből következik, hogy a (39)₁ formula nevezője szétesik egy összegre. Ez pedig – némileg rendezett formában – végül az

$$\frac{1}{8,08 \times 10^4 \times 32} \int_{-12}^4 \left[\frac{82}{82 + \zeta} \left(5,56 \times 10^8 \zeta + 1,98 \times 10^{11} - 4,5 \times 10^{10} \ln(82 + \zeta) \right) \right]^2 d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2,6 \times 10^4 \times 32} \int_4^{20} \left[\frac{82}{82 + \zeta} \left(-6,6 \times 10^{10} - 1,85 \times 10^8 \zeta - 1,5 \times 10^{10} \ln(82 + \zeta) \right) \right]^2 d\zeta \approx 2,12 \times 10^{12}$$

eredményre vezet. Visszahelyettesítve ezt (39)₁-be adódik, hogy

$$k_\gamma = 4,23 \times 10^7 \text{ N}. \quad (59)$$

A χ_γ -val jelölt (jelen cikk keretein belül az anyagjellemzőktől is függő) dimenziótlan nyírási korrekciós tényező számszerű értékéhez pedig a (39)₂ definíció alapján a

$$\chi_\gamma = \frac{k_\gamma}{\int_A G(\zeta) dA} = \frac{k_\gamma}{a \left(G_1 \int_{-12}^4 d\zeta + G_2 \int_4^{20} d\zeta \right)} = \frac{4,23 \times 10^7}{(4,135 + 1,327) \times 10^7} \approx 0,774 \quad (60)$$

lépésekben juthatunk el. Ez az eredmény nem áll messze a homogén, izotróp anyagú téglalap keresztmetszetű, egyenes rúdra levezethető $5/6 \approx 0,833$ -as számértéktől.

7. Összefoglalás

Jelen cikk keretein belül bemutatásra került néhány klasszikus, homogén anyagú síkgörbe rúdra érvényes képlet általánosítása keresztmetszeti inhomogenitás feltételezése mellett, azaz feltéve, hogy a rugalmassági modulus csak a keresztmetszeti koordináták függvénye. Levezettünk három formulát a normálfeszültségre, megadtuk a nyírófeszültség számítására alkalmas összefüggést, és képleteket állítottunk fel a görbületváltozás, valamint az alakváltozási energiát számítására. A két számpélda az eredmények alkalmazhatóságát illusztrálja.

8. Köszönetnyilvánítás

A kutató munka a TÁMOP-4.2.2.B-10/1-2010-0008 jelű projektek részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával, illetve a TÁMOP-4.2.1B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

9. Irodalom

- [1] F. P. Beer and E. R. Johnston. *Mechanics of Materials*. Mc Graw Hill, Metric edition, 1987.
- [2] Csizmadia B. és Nándori E. Műszaki *Mechanika: Szilárdságtan*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.
- [3] A. Baksa and I. Ecsedi. A note on the pure bending of nonhomogenous prismatic bars. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 37(2):118–129, 2009.
- [4] I. Ecsedi and K. Dluhi. A linear model for the static and dynamic analysis of non-homogeneous curved beams. *Applied Mathematical Modelling*, 29(12):1211-1231, 2005.