

## FESZÜLTÉGMEZŐN ALAPULÓ $h$ - ÉS $p$ -VERZIÓS HÉJ-VÉGESELEMEK ÖSSZEHASONLÍTÓ VIZSGÁLATA

Kocsán Lajos György<sup>1</sup> és Tóth Balázs<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Adjunktus, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék  
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: [mechklgy@uni-miskolc.hu](mailto:mechklgy@uni-miskolc.hu)

<sup>2</sup> Adjunktus, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék  
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: [mechtb@uni-miskolc.hu](mailto:mechtb@uni-miskolc.hu)

### Összefoglalás

A hárommezős duál Hellinger-Reissner-féle és a kétmezős Fraeijs de Veubeke-féle variációs elven alapuló dimenzió szerint redukált körhengerhéj-modellek kerülnek bemutatásra. Az alkalmazott variációs elvek egyik fő jellemzője, hogy a feszültségmező szimmetriáját integrál értelemben elégítjük ki. A redukált héjmodell felépítése során a klasszikus héjmodeltekben használt kinematikai és feszültségi hipotéziseket nem alkalmazzuk. A kifejlesztett  $h$ - és  $p$ -verziós héj-végelemek numerikus teljesítőképességét egy alkalmasan választott teszt-feladaton keresztül szemléltetjük.

**Kulcsszavak:** többmezős duál elvek, nem a priori szimmetrikus feszültségmező, körhengerhéj-modell, dimenzió szerinti redukálás

### Abstract

Dimensionally reduced cylindrical shell models based on the three-field dual-mixed Hellinger-Reissner-type and the two-field dual-mixed Fraeijs de Veubeke variational principles are presented using a priori non-symmetric stresses. During the dimension reduction procedure the classical kinematical hypotheses are not employed. The  $h$ - and  $p$ -version shell finite elements developed are compared through a representative model problem.

**Keywords:** multi-field dual-mixed, a priori non-symmetric stresses, cylindrical shell model, dimensional reduction

### 1. Az alkalmazott variációs formalizmusok

A cikk célja, hogy bemutassuk a nem a priori szimmetrikus feszültségmezőt alkalmazó duál variációs elveken alapuló dimenzió szerint redukált körhengerhéj-modellek legfontosabb hasonlóságait és különbségeit. A továbbiakban az indexes jelölésmódot fogjuk alkalmazni. A [görög]{latin} betűvel szedett indexek az [1,2]{1,2,3} értékeket vehetik fel. A szóban forgó variációs elvek funkcionáljai levezethetőek a

$$\mathcal{K}(\sigma^{pq}) = -\int_V U(\sigma^{pq}) dV + \int_{S_u} \tilde{u}_p \sigma^{pq} n_q dS \quad (1)$$

klasszikus kiegészítő energia funkcionálból a Lagrange-féle multiplikátor technika segítségével. Az (1) funkcionál alapváltozója a  $\sigma^{pq}$  szimmetrikus feszültségi tenzor, továbbá  $V$  jelöli a kontinuum térfogati tartományát,  $S = S_p \cup S_u$  annak peremét ( $S_p \cap S_u = \emptyset$ ) és  $\tilde{u}_p$  az előírt elmozdulást az  $S_u$  peremrészén, melynek kifelé mutató felületi normálisa  $n_q$ , lásd [1]. Az  $U$  kiegészítő alakváltozási energiasűrűség a lineáris rugalmasságtan keretein belül a feszültségi tenzor kvadratikus függvényeként adható meg az alábbi módon:

$$U(\sigma^{rs}) = \frac{1}{2} \sigma^{pq} \varepsilon_{pq}(\sigma^{rs}), \quad (2)$$

ahol az  $\varepsilon_{pq}$  szimmetrikus alakváltozási tenzorra fennáll, hogy

$$\varepsilon_{pq} = C_{pqrs}^{-1} \sigma^{rs}, \quad (3)$$

melyben az anyagállandók  $C_{pqrs}^{-1}$  negyedrendű tenzora a  $C_{pqrs}^{-1} = C_{pqsr}^{-1} = C_{rspq}^{-1}$  szimmetria-tulajdonságokkal rendelkezik. Az (1) funkcionál mellékfeltételeit a

$$\sigma^{..q} + b^p = 0 \quad (4)$$

transzlációs egyensúlyi egyenlet, - ahol  $b^p$  a térfogati erőrendszer sűrűségvektora – a hozzá kapcsolódó

$$\epsilon_{pqr} \sigma^{pq} = 0 \quad (5)$$

rotációs egyensúlyi egyenlet ( $\epsilon_{pqr}$  a kovariáns permutációs tenzor) és a

$$\sigma^{pq} n_q = p^p \quad (6)$$

feszültségi peremfeltétel alkotja. Az utóbbi kifejezésben  $p^p$  jelöli a kontinuum  $S_p$  peremén előírt felületi terhelés sűrűségvektorát.

Abban az esetben, ha nem *a priori* szimmetrikus feszültségmezővel szeretnénk dolgozni, beszorozzuk az (5) rotációs egyensúlyi egyenletet egy Lagrange-féle multiplikátorral, - melyről belátható, hogy megegyezik a  $\varphi^r$  infinitézimális forgásvektorral – majd vesszük ezek térfogati integrálját, és hozzáadjuk a kiegészítő energia (1) funkcionáljához. Így nyerjük a kétmezős Fraeijs de Veubeke-féle variációs elv

$$\mathcal{F}(\sigma^{pq}, \varphi^r) = -\int_V U(\sigma^{pq}) dV + \int_V \epsilon_{pqr} \sigma^{pq} \varphi^r dV + \int_{S_u} \tilde{u}_p \sigma^{pq} n_q dS \quad (7)$$

funkcionálját [2]. Ennek a funkcionálnak az alkalmazása a (4) transzlációs egyensúlyi egyenlet és a (6) feszültségi peremfeltétel *a priori* kielégítését igényli. A homogén transzlációs egyensúlyi egyenletet az elsőrendű feszültségfüggvény-tenzor bevezetésével teljesítjük. A (4) inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását  $\hat{\sigma}^{pq}$  jelöli. Így az inhomogén egyenlet általános megoldása a következő formában írható:

$$\sigma^{pq} = \epsilon^{prs} \Psi_{r,s}^q + \hat{\sigma}^{pq}. \quad (8)$$

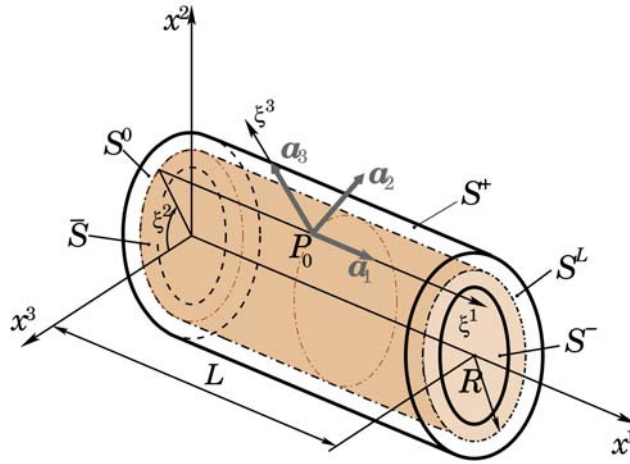
Amennyiben a (4) egyenletet gyengén teljesítjük, akkor a hárommezős duál Hellinger-Reissner-féle variációs formalizmust kapjuk, melynek funkcionálja [3]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\mathcal{R}_d(\sigma^{pq}, \varphi^r, u_p) = & -\int_V U(\sigma^{pq}) dV + \int_V \epsilon_{pqr} \sigma^{pq} \varphi^r dV \\ & -\int_V u_p (\sigma_{\dots q}^{pq} + b^p) dV + \int_{S_u} \tilde{u}_p \sigma^{pq} n_q dS, \end{aligned} \quad (9)$$

ahol az  $u_p$  elmozdulásmező a Lagrange-féle multiplikátor szerepét tölti be. A (9) funkcionál egyetlen mellékfeltétele a (6) feszültségi peremfeltétel.

## 2. Körhengerhéj geometriája

A vizsgálatokat a héj középfelületére illesztett görbevonalú koordináta-rendszerben végezzük. Tekintsünk egy  $L$  hosszúságú körhengerhéjat, melynek geometriai leírásához értelmezzük a  $0 < \xi^1 < L$  ívkoordinátával és a  $0 \leq \xi^2 < 2\pi$  szögkoordinátával parametrizált  $R$  sugarú  $\bar{S}$  hengerfelületet, a héj középfelületét. A héj  $V$  térfogati tartománya a  $\xi^k$  koordináták segítségével a  $V = \{\xi^k : \xi^\alpha \in \bar{S}, |\xi^3| < d/2\}$  formában definiálható, ahol  $d$  a héj vastagságát jelöli, amelyet a továbbiakban állandónak tekintünk.



1. ábra. Körhengerhéj.

Az 1. ábrának megfelelően a  $\xi^3$  koordinátavonalak egyenesek és minden pontban merőlegesek a  $\xi^\alpha$  felületi koordinátavonalakra. Az  $\bar{S}$  középfelület minden  $\mathbf{r}_0$  helyvektorú  $P_0$  pontjához köthetünk egy lokális bázist:

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^\alpha}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}. \quad (10)$$

A bázisvektorok meghatározásához szükségünk van egy globális koordináta-rendszerre, ami legyen az **I. ábrán** látható Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer, melynek koordinátavonalait jelölje  $x^k$ . Ekkor a globális és felületi koordináta-rendszer koordinátavonalai közötti kapcsolat az **I. ábra** alapján az

$$x^1 = \xi^1, \quad x^2 = R \sin \xi^2, \quad x^3 = R \cos \xi^2 \quad (11)$$

alakban írható. A (11) egyenletek alapján a  $P_0$  pont helyvektora:

$$\mathbf{r}_0 = x^k \mathbf{e}_k = \xi^1 \mathbf{e}_1 + R \sin \xi^2 \mathbf{e}_2 + R \cos \xi^2 \mathbf{e}_3, \quad (12)$$

ahol  $\mathbf{e}_k$  a derékszögű Descartes-i koordináta-rendszer egységbázisvektorai. Felhasználva a (10) összefüggéseket, a lokális bázisvektorok a középfelületen a következő alakot öltik:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_2 = R \cos \xi^2 \mathbf{e}_2 - R \sin \xi^2 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_3 = \sin \xi^2 \mathbf{e}_2 + \cos \xi^2 \mathbf{e}_3. \quad (13)$$

Az ortogonális bázist alkotó (13) vektorok segítségével meghatározhatjuk az  $a_{k\ell} = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_\ell$  metrikus és  $b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}^3$  görbületi tenzor nem zérus elemeit:

$$a_{11} = a_{33} = 1, \quad a_{22} = (R)^2, \quad b_{22} = -R. \quad (14)$$

A középfelületi  $\Gamma_{k\ell}^m$  másodfajú Christoffel-féle szimbólumok a

$$\Gamma_{\kappa\lambda}^\mu = \mathbf{a}_{\kappa,\lambda} \cdot \mathbf{a}^\mu, \quad \Gamma_{\kappa\lambda}^3 = b_{\kappa\lambda}, \quad \Gamma_{3\lambda}^\mu = -b_{\lambda}^\mu, \quad \Gamma_{\kappa 3}^m = \Gamma_{33}^m = \Gamma_{3\lambda}^3 = 0 \quad (15)$$

alakban állíthatók elő [4], ahonnan

$$\Gamma_{22}^3 = -R, \quad \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{R} \quad (16)$$

a nem zérus Christoffel-féle szimbólumok. A  $V$  térfogati tartomány  $\mathbf{n}^\pm = \pm \mathbf{a}^3$  normálisú  $S$  peremfelületét az  $S^\pm = \{\xi^k : \xi^\alpha \in \bar{S}, \xi^3 = \pm d/2\}$  palástperemek, az  $\mathbf{n}^0 = -\mathbf{a}^1$  normálisú  $S^0 = \{\xi^k | \xi^1 = 0, \xi^2 = [0, 2\pi), |\xi^3| < d/2\}$  és az  $\mathbf{n}^L = \mathbf{a}^1$  normálisú  $S^L = \{\xi^k | \xi^1 = L, \xi^2 = [0, 2\pi), |\xi^3| < d/2\}$  oldalperemek alkotják. Vékony héjak esetén a  $dV$  térfogatelem, a  $dS^0$  és a  $dS^L$  skaláris oldalfelületelem a következő formában adható meg:

$$dV = R d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \quad dS^0 = dS^L = R d\xi^2 d\xi^3. \quad (17)$$

### 3. Dimenzió szerinti redukálás

Kifejtve a (4) kifejezésben megjelenő kovariáns deriváltat, majd felhasználva a (15) és (16) eredményeket a háromdimenzós skaláris transzlációs egyensúlyi egyenletek *vékony körhengerhéjakra* az alábbi alakot öltik:

$$\sigma_{\dots,1}^{11} + \sigma_{\dots,2}^{12} + \sigma_{\dots,3}^{13} + \frac{1}{R} \sigma^{13} + b^1 = 0, \quad (18)$$

$$\sigma_{\dots,1}^{21} + \sigma_{\dots,2}^{22} + \sigma_{\dots,3}^{23} + \frac{1}{R} (\sigma^{23} + \sigma^{32}) + b^2 = 0, \quad (19)$$

$$\sigma_{\dots,1}^{31} + \sigma_{\dots,2}^{32} + \sigma_{\dots,3}^{33} + \frac{1}{R} \sigma^{33} - R \sigma^{22} + b^3 = 0. \quad (20)$$

Tekintsük a vizsgálandó körhengerhéj-feladatot *forgásszimmetrikusnak*, vagyis feltételezzük, hogy a peremfeltételek, illetve a héj mechanikai állapotát leíró mennyiségek nem függenek a  $\xi^2$  szögkoordinátától. Ezt követően a dimenzió szerinti redukálás első lépéseként az alapváltozókat és az ismert térfogati terhelést hatványsorba fejtjük a vastagság mentén a  $\xi^3 = 0$  pont környezetében:

$$\begin{aligned} \sigma^{k\ell}(\xi^1, \xi^3) &= \sum_{i=0}^{\infty} {}_i\sigma^{k\ell}(\xi^1)(\xi^3)^i, & \Psi_{,q}^k(\xi^1, \xi^3) &= \sum_{i=0}^{\infty} {}_i\Psi_{,q}^k(\xi^1)(\xi^3)^i, \\ \varphi^r(\xi^1, \xi^3) &= \sum_{i=0}^{\infty} {}_i\varphi^r(\xi^1)(\xi^3)^i, & u_p(\xi^1, \xi^3) &= \sum_{i=0}^{\infty} {}_iu_p(\xi^1)(\xi^3)^i, \\ b^k(\xi^1, \xi^3) &= \sum_{i=0}^{\infty} {}_ib^k(\xi^1)(\xi^3)^i. \end{aligned} \quad (21)$$

Behelyettesítve a (21) sorbafejtéseket (18)-(20)-ba a következő egyenletekhez jutunk:

$${}_i\sigma_{\dots,1}^{11} + \frac{1}{R} {}_i\sigma^{13} + (i+1) {}_{i+1}\sigma^{13} + {}_ib^1 = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \infty, \quad (22)$$

$${}_i\sigma_{\dots,1}^{21} + \frac{1}{R} ({}_i\sigma^{23} + {}_i\sigma^{32}) + (i+1) {}_{i+1}\sigma^{23} + {}_ib^2 = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \infty, \quad (23)$$

$${}_i\sigma_{\dots,1}^{31} - R {}_i\sigma^{22} + \frac{1}{R} {}_i\sigma^{33} + (i+1) {}_{i+1}\sigma^{33} + {}_ib^3 = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \infty. \quad (24)$$

Látható, hogy ebben az esetben az egyensúlyi egyenletek a bennük megjelenő feszültségi koordináták alapján két független csoportra oszthatók: a körhengerhéj húzás-nyomás, hajlítás-nyírási feladatához az  ${}_i\sigma^{11}$ ,  ${}_i\sigma^{22}$ ,  ${}_i\sigma^{31}$ ,  ${}_i\sigma^{13}$  és  ${}_i\sigma^{33}$  feszültségi együtthatókra vonatkozó (22) és (24) egyenletek kapcsolódnak, a csavarási feladathoz pedig az  ${}_i\sigma^{12}$ ,  ${}_i\sigma^{21}$ ,  ${}_i\sigma^{23}$  és  ${}_i\sigma^{32}$  együtthatókra vonatkozó (23) egyenlet tartozik.

Numerikus megoldások előállítására alkalmas, dimenzió szerint redukált héjmodellek a fenti egyensúlyi egyenletek egy véges szeletének kiválasztásával és kielégítésével származtathatók. A kiválasztott egyenletek számától függően a körhengerhéj-feladatra vonatkozó héjmodellek sokasága építhető fel. A jelen tanulmányban ismertetésre kerülő héjmodell felépítéséhez a (22)-(24) szerinti egyensúlyi egyenletek közül kiválasztjuk az  $i = 0$ -hoz és

az  $i = 1$ -hez tartozó egyenleteket, a többi -  $\xi^3$  magasabb hatványaihoz tartozó - egyenletet pedig azzal a feltételezéssel hanyagoljuk el, hogy azok identikusan kielégülnek. Ebben az esetben a feszültségmezőt a következőképpen kell közelíteni a vastagság mentén:

$$\sigma^{k\lambda}(\xi^1, \xi^3) = {}_0\sigma^{k\lambda}(\xi^1) + {}_1\sigma^{k\lambda}(\xi^1) \xi^3, \quad (25)$$

$$\sigma^{k3}(\xi^1, \xi^3) = {}_0\sigma^{k3}(\xi^1) + {}_1\sigma^{k3}(\xi^1) \xi^3 + {}_2\sigma^{k3}(\xi^1) (\xi^3)^2. \quad (26)$$

A (7) és (9) funkcionálok szerkezeti felépítéséből következnek a forgásmezőre és az elmozdulásmezőre vonatkozó vastagság menti lineáris közelítések [5]:

$$\varphi^r(\xi^1, \xi^3) = {}_0\varphi^r(\xi^1) + {}_1\varphi^r(\xi^1) \xi^3, \quad u_k(\xi^1, \xi^3) = {}_0u_k(\xi^1) + {}_1u_k(\xi^1) \xi^3. \quad (27)$$

Mivel az elsőrendű feszültségfüggvény-tenzornak [6] alapján csak hat független koordinátája van, (8), (15) és (16) figyelembevételével az egyensúlyi egyenleteket kielégítő feszültségi együtthatók a sorbafejtett feszültségfüggvény-tenzor koordinátákkal a következő módon fejezhetők ki [7]:

$${}_i\sigma^{k1} = -{}_i\Psi_3^2 - \frac{1}{R^2} {}_i\Psi_2^k - (i+1) \frac{1}{R} {}_{i+1}\Psi_2^k + {}_i\hat{\sigma}^{k1}, \quad i = 0, 1, \quad (28)$$

$${}_i\sigma^{k2} = -\frac{1}{R} {}_i\Psi_{3,1}^k, \quad i = 0, 1, \quad (29)$$

$${}_i\sigma^{k3} = \frac{1}{R} {}_i\Psi_{2,1}^k, \quad i = 0, 1, 2. \quad (30)$$

A (25) és (26) feszültség-közelítések összevetése a (28)-(30) egyenletekkel eredményezi az alábbi vastagság menti kvadratikus és lineáris polinom-approximációkat:

$$\Psi_2^k(\xi^1, \xi^3) = {}_0\Psi_2^k(\xi^1) + {}_1\Psi_2^k(\xi^1, \xi^3) \xi^3 + {}_2\Psi_2^k(\xi^1, \xi^3) (\xi^3)^2, \quad (31)$$

$$\Psi_3^k(\xi^1, \xi^3) = {}_0\Psi_3^k(\xi^1) + {}_1\Psi_3^k(\xi^1) \xi^3. \quad (32)$$

Továbbá legyen a partikuláris megoldás  ${}_i\hat{\sigma}^{k1} = -\int_{s=0}^{\xi^1} {}_i b^k ds$ .

#### 4. Feszültségi és kinematikai peremfeltételek

A felépítendő héjmodellek a feszültségmezőre előírt peremfeltételek *a priori* kielégítését kívánják meg. A feszültségi peremfeltételek a héj  $S^\pm \subset S_p$  ( $S_p = S^\pm \cup S^L$ ) palástperemlein, tekintettel (6)-ra, a

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^\pm = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\pm \mathbf{a}_3) = \pm \sigma^{k3} \mathbf{a}_k = \mathbf{p}^\pm, \quad \pm \sigma^{k3} = (p^\pm)^k \quad (33)$$

alakban írhatók, ahol  $(p^\pm)^k$  az  $S^\pm$  peremfelületeken előírt terhelések sűrűségvektorai. Behelyettesítve a (26) kvadratikus feszültség-közelítést a (33) alatti peremfeltételekbe és

figyelembe véve, hogy a héj  $S^\pm$  palástperemlein  $\xi^3 = \pm d/2$ , a palástperemeken érvényes feszültségi peremfeltételek a

$$\begin{aligned} {}_0\sigma^{k3} + {}_1\sigma^{k3} \frac{d}{2} + {}_2\sigma^{k3} \frac{d^2}{4} &= (p^+)^k, \\ -{}_0\sigma^{k3} + {}_1\sigma^{k3} \frac{d}{2} - {}_2\sigma^{k3} \frac{d^2}{4} &= (p^-)^k \end{aligned} \quad (34)$$

alakot öltik. Összeadva, majd kivonva egymásból a (34) egyenleteket, bevezetve továbbá a terhelési koordinátákra vonatkozó

$${}_0p^k(\xi^1) = \frac{1}{2}[(p^+)^k + (p^-)^k], \quad {}_1p^k(\xi^1) = \frac{1}{d}[(p^+)^k - (p^-)^k] \quad (35)$$

definíciókat, a feszültségi koordináták együtthatóira az alábbi peremfeltételi egyenletek adódnak:

$${}_1\sigma^{k3} = \frac{2}{d}{}_0p^k, \quad {}_2\sigma^{k3} = -\frac{4}{d^2}{}_0\sigma^{k3} + \frac{2}{d}{}_1p^k. \quad (36)$$

Ekkor a  $p^k(\xi^1, \xi^3) = {}_0p^k + {}_1p^k \xi^3$  terhelési vektorkoordináták a körhengerhéj alsó és felső palástperemlein előírt terhelések értékeit veszik fel, vagyis

$$p^k(\xi^1, \xi^3 = \pm d/2) = (p^\pm)^k = {}_0p^k \pm \frac{d}{2}{}_1p^k. \quad (37)$$

A palástperemeken előírt feszültségi peremfeltételek (36) alakját olyan módon célszerű figyelembe venni, illetve *a priori* kielégíteni, hogy azokat beépítjük az alkalmazott variációs elvekbe redukálva ezzel a változók számát. Tovább csökkenthető a változók száma a rotációs egyensúlyi egyenlet integrál értelemben történő részleges illetve teljes kielégítésével, azaz a forgási együtthatók részleges vagy teljes eliminálásával [5,7].

A héj  $S^L$  oldalperemén előírt feszültségi peremfeltételek, tekintettel (6)-ra, a

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^\times = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}^1 = \sigma^{k1} \mathbf{a}_k = \mathbf{p}^\times, \quad \sigma^{k1} = (p^\times)^k \quad (38)$$

alakban érvényesek, ahol  $(p^\times)^k$  az  $S^L$  peremfelületen előírt megoszló terhelés sűrűségvektora. Behelyettesítve a (25) képlet szerint sorbafejtett feszültségeket (38)-ba, a

$${}_0\sigma^{k1} + {}_1\sigma^{k1} \xi^3 = (p^\times)^k = {}_0(p^\times)^k + {}_1(p^\times)^k \xi^3 \quad (39)$$

összefüggést kapjuk, ahol  ${}_0(p^\times)^k$  és  ${}_1(p^\times)^k$  az  $S^L$  oldalperemen megadott terhelések  $\xi^3$  ívkoordináta szerinti sorbafejtésében megjelenő - ismert terhelési - együtthatói (a feszültségeknek megfelelő lineáris közelítést alkalmazva a vastagság mentén). Ezzel a  $\xi^3$  ívkoordináta megfelelő hatványai szerint a feszültségi koordinátákra vonatkozó feszültségi peremfeltételek a

$${}_0\sigma^{k1} \Big|_{x^1=L} = {}_0(p^\times)^k, \quad {}_1\sigma^{k1} \Big|_{x^1=L} = {}_1(p^\times)^k \quad (40)$$

alakban írhatók. A (40) feszültségi peremfeltételek kielégítésére a numerikus megoldás során kerül sor. Az elmozdulási peremfeltétel csak az  $\mathbf{n}^0 = -\mathbf{a}^1$  normálisú  $S^0(\xi^1 = 0) \equiv S_u$  oldalperemen van előírva, vagyis:

$$u_p = \tilde{u}_p(\xi^3). \quad (41)$$

Figyelembe véve az elmozdulásmezőre tett (27) lineáris közelítést, a (41) elmozdulási peremfeltétel az

$$u_p = {}_0u_p + {}_1u_p \xi^3 = \tilde{u}_p(\xi^3) = {}_0\tilde{u}_p + {}_1\tilde{u}_p \xi^3 \quad (42)$$

alakban írható. A  $\xi^3$  ívkoordináta megfelelő hatványai szerint az elmozdulási együtthatókra vonatkozó elmozdulási peremfeltételi egyenletek a következőképpen alakulnak:

$${}_0u_p \Big|_{\xi^3=0} = {}_0\tilde{u}_p, \quad {}_1u_p \Big|_{\xi^3=0} = {}_1\tilde{u}_p. \quad (43)$$

A továbbiakban vizsgálatainkat a körhengerhéj húzás-nyomás és hajlítási-nyírási feladataira korlátozzuk.

## 5. Numerikus példa

A kifejlesztett  $h$ - és  $p$ -verziós elemcsaládokat egy alkalmasan választott elasztostatikai peremértékfeladat megoldásán keresztül teszteljük. A  $h$ -verziós végeelem-modell alkalmazása esetén a körhengerhéj-feladat megfelelő pontosságú megoldását az elemek számának növelésével, elemsűrítéssel - az elemek méretének csökkentésével - érjük el. Viszont a  $p$ -verziós végeelem-módszer a numerikus megoldás pontosságát az elemeken működő polinom-approximációk fokszámának növelésével éri el [8]. A végeelemes közelítést egydimenziós héjelemekkel végezzük el. A két héjmodell ismeretlen függvényeit közelítő polinomok egymáshoz viszonyított fokszámait az **1.** és **2. táblázat** tartalmazza [5,7].

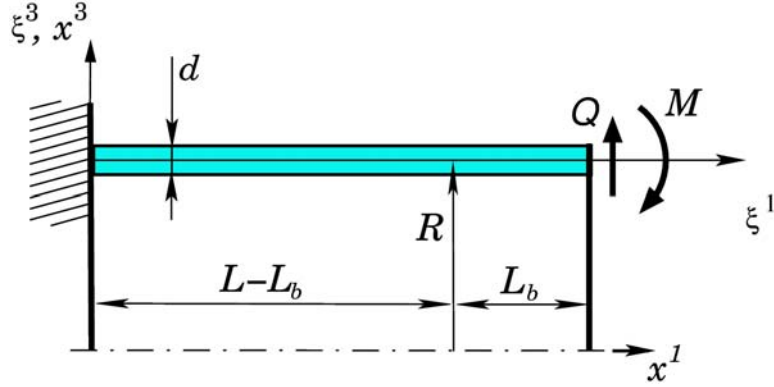
**1. táblázat.** A  $\mathcal{HR}_d$  variációs formulizmuson alapuló héjelem alkalmazott polinomterez

${}_0\sigma^{11}$	${}_0\sigma^{22}$	${}_0\sigma^{33}$	${}_1\sigma^{11}$	${}_1\sigma^{22}$	${}_0\sigma^{31}$	${}_0u_1$	${}_0u_3$	${}_1u_1$	${}_1u_3$
$p+2$	$p$	$p$	$p+2$	$p$	$p+1$	$p+1$	$p$	$p+1$	$p$

**2. táblázat.** A  $\mathcal{F}$  variációs formalizmuson alapuló héjelem esetén alkalmazott polinomtér

${}_0\Psi_3^1$	${}_0\Psi_3^3$	${}_0\Psi_3^2$	${}_0\varphi^2$
$p+2$	$p+1$	$p+1$	$p+1$





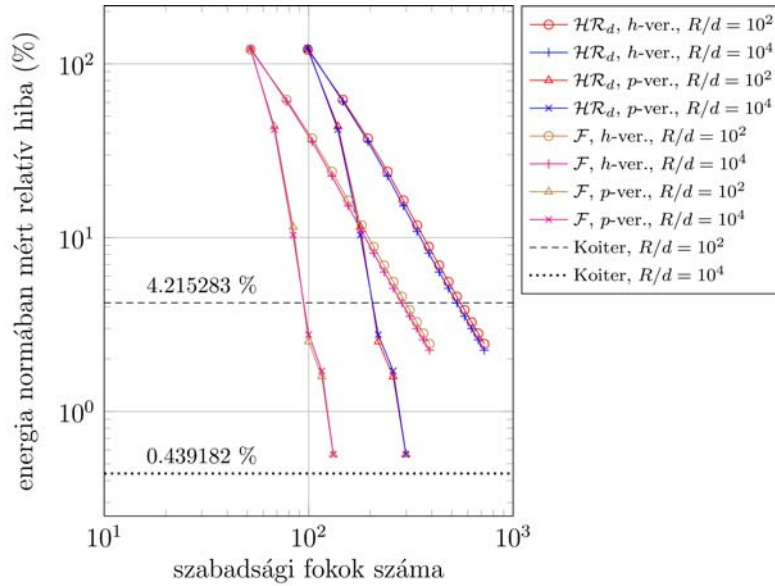
**2. ábra.** Körhengerhéj peremzavarási feladata.

Tekintsünk egy  $L = 1000$  mm hosszúságú és  $R = 1000$  mm sugarú körhengerhéjat. Legyen a  $\xi^1 = 0$  helyen befalazva míg a  $\xi^1 = L$  helyen az előírt terhelés  ${}_0(p^L)^3 = 1$  N/mm<sup>2</sup> és  ${}_1(p^L)^1 = 5$  N/mm<sup>3</sup>, azaz a hajlítónyomaték  $M = {}_0(p^L)^1 d^3 / 12$  és a nyíróerő  $Q = {}_0(p^L)^3 d$ . Homogén izotrop anyagot feltételezve  $E = 250$  GPa és  $\nu = 0,3$ . Két különböző héjvastagságot fogunk vizsgálni:  $d = 10$  mm és  $d = 0,1$  mm.

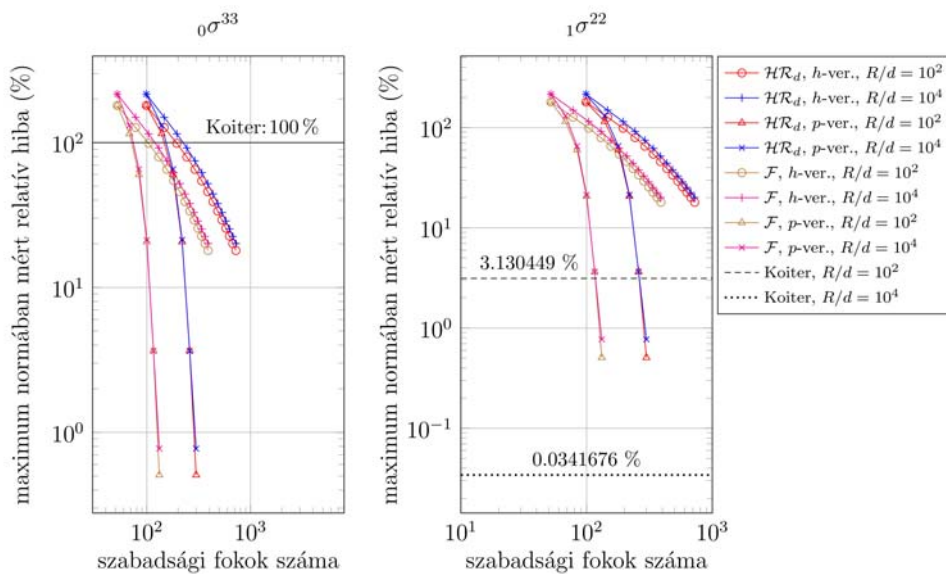
Figyelembe véve a *boundary layer*-hatást az  $L$  hosszúságú tartományt egy  $L_b$  és egy  $L - L_b$  hosszúságú altartományra osztjuk, ahol  $L_b = 3,5\pi\sqrt{Rd} / \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}$ . Az altartományokat két-két további elemre osztjuk. A  $p$ -típusú approximáció során az így kapott négyelemű hálót rögzítjük, míg a polinomok fokszámát  $p = 1$ -től  $p = 6$ -ig egyesével növeljük. A  $h$ -típusú végeselemes közelítés során az  $L_b$  és az  $L - L_b$  altartományokat ekvidisztánsan, egyidejűleg sűrítjük 14 lépésben  $n = 4$  elemszámról  $n = 30$  elemszámra, miközben a polinomok fokszámát minden egyes elemen rögzítjük ( $p = 1$ ).

A bemutatott duál héjmodellek teljesítőképességét az energia normában és a alapváltozók maximum normájában mért relatív hibákra vonatkozó konvergencia görbék szemléltetik. A végeselemes számítás eredményeit a bemutatott héjmodellek analitikus megoldásához hasonlítjuk, valamint minden egyes ábrán feltüntetjük a Koiter-féle héjmodell által számított analitikus megoldás [9] modellezési hibáját is.

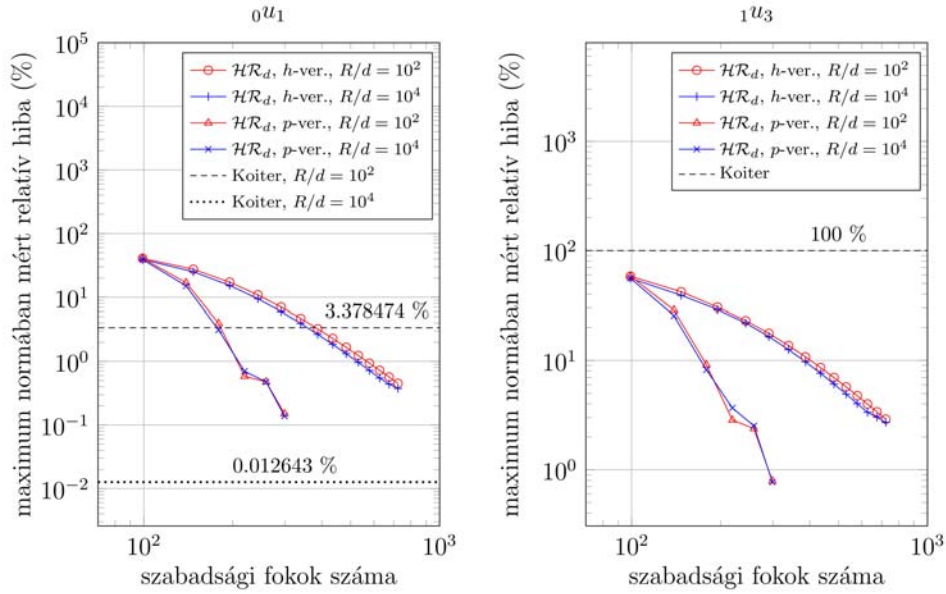
A **3. ábrán** az energia normában mért relatív hibák konvergencia görbéit ábrázoljuk logaritmusos skálán a szabadsági fokok függvényében vékony ( $R/d = 10^2$ ) és nagyon vékony ( $R/d = 10^4$ ) héjak esetén. A **4.** és az **5. ábra** rendre a  ${}_0\sigma^{33}$ ,  ${}_1\sigma^{22}$  feszültségek és a  ${}_0u_1$ ,  ${}_1u_3$  elmozdulások maximum normában mért relatív hibáinak konvergenciáját szemlélteti szintén a szabadsági fokok függvényében. Az utóbbi három ábrán szereplő  $\mathcal{HR}_d$  és  $\mathcal{F}$  jelölések rendre a hárommezős duál Hellinger-Reissner-féle és a kétmezős Fraeijs de Veubeke-féle variációs elvek alapján kidolgozott új héjelemekre utalnak. Továbbá az ábrákon egyértelműen láthatóak a  $h$ - és  $p$ -verziós közelítések közötti különbségek.



3. ábra. Energia normában mért relatív hiba konvergenciája.



4. ábra. A  ${}_0\sigma^{33}$  és az  ${}_1\sigma^{22}$  feszültségek maximum normában mért relatív hibái.



5. ábra. A  ${}_0u_1$  és az  ${}_1u_3$  elmozdulások maximum normában mért relatív hibái.

## 6. Következtetések

A 3-5. ábrákon látható eredményekből következik, hogy a vastagság csökkentésének nincs negatív hatása a konvergencia sebességekre, azaz a kifejlesztett héjelemek az angol szakirodalomban *shear locking* néven ismert numerikus konvergencia problémától mentesek. A  $p$ -verziós konvergenciák sokkal gyorsabbak, mint amelyek a  $h$ -sűrítés során elérhetőek. Érdekes, hogy a konvergencia sebességek a két különböző duál végeselem-modell esetén közel megegyeznek. A konvergencia görbék között az egyetlen számottevő eltérést a szabadsági fokok száma jelenti. A hárommezős duál Hellinger-Reissner-féle variációs formalizmuson alapuló  $h$ - és  $p$ -verziós héj-végeselemek nemcsak a feszültségi, hanem az elmozdulási együtthatókra is kiváló eredményeket szolgáltatnak. Viszont az elsőrendű feszültségfüggvényeken alapuló  $h$ - és  $p$ -típusú végeselemes eljárás kisebb méretű indefinit lineáris algebrai egyenletrendszerhez vezet, melynek megoldása kevesebb számítási időt igényel.

## 7. Köszönetnyilvánítás

A kutató munka a TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0008 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

## 8. Irodalom

- [1] Berdichevsky, V. L.: *Variational Principles of Continuum Mechanics: I. Fundamentals*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009.
- [2] Fraeijs de Veubeke, B. M. Stress function approach, *Proceedings of the World Congress on Finite Element Methods in Structural Mechanics*, pp. J.1–J.51, Bournemouth, U.K., 1975.
- [3] Stein, E. and Rolfes, R.: Mechanical conditions for stability and optimal convergence of mixed finite elements for linear plane elasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **84**, pp. 77-95, 1990.
- [4] Naghdi, P. M.: Foundations of elastic shell theory, in Sneddon, I. N. and Hill, R.: *Progress in Solid Mechanics*, volume IV, pp. 1-90, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963.
- [5] Tóth, B.: Dual-mixed *hp* finite element model for elastic cylindrical shells. *ZAMM, Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **92**, pp. 236-252, 2012.
- [6] Bertóti, E.: Indeterminacy of first-order stress functions and stress- and rotation-based formulation of linear elasticity, *Computational Mechanics*, **14**, pp. 249-265, 1994.
- [7] Kocsán, L. G.: Derivation of a dual-mixed *hp*-finite element model for axisymmetrically loaded cylindrical shells, *Archive of Applied Mechanics*, **81**, pp. 1953-1971, 2011.
- [8] Szabó, B. and Babuska I.: *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [9] Timoschenko, S. and Woinowsky-Kriger, S.: *Theory of Plates and Shells*, 2nd edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.