

## ANALITIKUS MÓDSZER RÉSZLEGESEN KAPCSOLT, RÉTEGEZETT KOMPOZIT RUDAK SZILÁRDSÁGTANI FELADATAINAK MEGOLDÁSÁRA

Lengyel Ákos József<sup>1</sup>, Ecsedi István<sup>2</sup>

<sup>1</sup>doktorandusz, <sup>2</sup>egyetemi tanár

Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék,

Cím: 3515 Miskolc-Egyetemváros

e-mail: [mechlen@uni-miskolc.hu](mailto:mechlen@uni-miskolc.hu), [mechecs@uni-miskolc.hu](mailto:mechecs@uni-miskolc.hu)

### Összefoglalás

A tanulmány kétrétegű rugalmas anyagú kompozit rudak statikai feladatainak megoldására egy analitikus módszert ismertet. A rúdkomponensek kapcsolata normál irányban tökéletes, de axiális irányú elmozdulásában lehetséges szakadás. A nem tökéletesen kapcsolódó réteg által átvitt axiális irányú erő arányos a rétegek relatív elcsúszásával. A feladat megoldásánál döntő szerepe van az úgynevezett alapmegoldásoknak. Az alapmegoldások szuperpozíciójával nyerjük az adott terhelési és kerületi feltételeknek megfelelő megoldást. A kidolgozott eljárás alkalmazását három numerikus példa szemlélteti.

**Kulcsszavak:** rugalmas, rétegezett kompozit rúd, részlegesen kapcsolt

### Abstract

This paper presents an analytical method to solve the static boundary value problem of two-layer composite beams. The connection between the beam components in normal direction is perfect, but the axial displacements may have jump. The axial force takes over with the imperfect connection is proportional to the relative slip bringing up between the layers. The determination of the solution of static problem is based on the fundamental solutions. A linear combination of the fundamental solutions, which are fitted to the given loading and boundary conditions, gives the solution of the considered problem. Three examples illustrate the applications of the presented analytical method.

**Keywords:** elastic, two-layer beam, interlayer slip, analytical solution

### 1. Bevezetés

Kompozit rudakból felépített szerkezeteket az ipar számos területén használnak, emiatt azok mechanikai (statikai és dinamikai) vizsgálata igen fontos mérnöki feladat. A rúdelemek egymáshoz történő kapcsolására különböző kapcsoló elemeket használnak, mint például csapokat, csavarokat, szegecseket. Sok esetben a kapcsoló elemek az összekapcsolt egységek relatív elcsúszását megengedik. Rugalmas kapcsolatot feltételezve a kapcsolat által átvitt nyíróerő arányos a rétegek relatív elcsúszásával. Ilyen lineárisan rugalmas részleges kapcsolatú kompozit rudak vizsgálatával számos tanulmány foglalkozik [1-8]. Legelső tanulmány e témában Newmark és munkatársai tanulmánya [5], amely egy, az Euler-Bernoulli rúdelméletre épített megoldást ismertet. Murakami e problémát a Timoshenko rúdelmélet felhasználásával vizsgálta [4]. Girhammar és Gupu [3,7]

megfogalmazta a lehajlás függvényre vonatkozó peremérték feladatot és megadta a levezetett hatodrendű differenciálegyenlet általános megoldását. Az egyes teher tagokhoz tartozó partikuláris megoldások számítása, zárt alakban történő megadása azonban igen körülményes. Ecsedi és Baksa [8] egy olyan analitikus megoldást ismertet, amely a szlip és lehajlás függvényeket tekinti alapváltozónak. Ayoub [1], Dall' Astra és Zona [2], valamint Thompson és munkatársai [6] a nem tökéletes kapcsolatú rétegezett kompozit rudak statikai peremérték feladatainak megoldására a végeelem módszert használták. E tanulmány egy új analitikus megoldást alkalmaz, amely a különböző kezdeti feltételekhez és terhelési előírásokhoz rendelt alapmegoldások lineáris kombinációjaként állítja elő a vizsgált statikai feladat megoldását, vagyis megadja a

- $v = v(z)$  lehajlás függvényt,
- $\psi = \psi(z)$  szögelfordulás függvényt,
- $s = s(z)$  szlip függvényt,
- $M = M(z)$  hajlítónyomaték függvényt,
- $V = V(z)$  keresztmetszetet terhelő nyíróerő függvényt,
- $N_1 = N_1(z)$  axiális erőt, mely az 1 jelű rúdkomponens  $A_1$  keresztmetszetét terheli.

## 2. Alapvető összefüggések

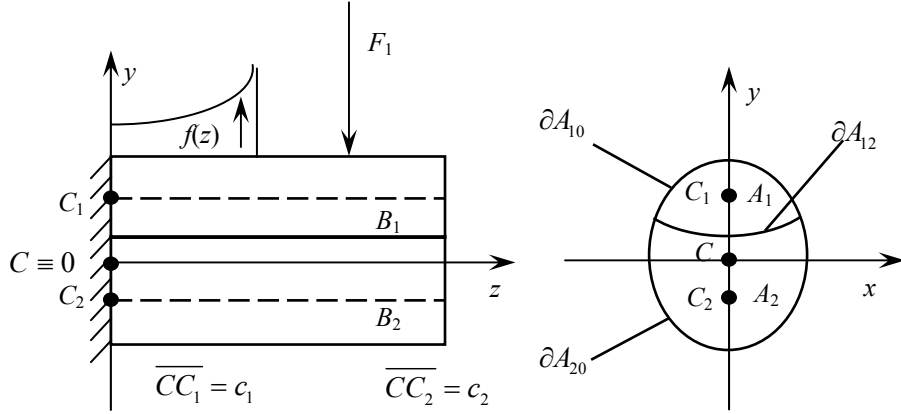
A kétrétegű rugalmas anyagú kompozit rúd terhelését és keresztmetszetét az 1. ábra szemlélteti. Az  $yz$  sík a rúd szimmetriasíkja, és egyben a terhelések valamint az alkalmazott megtámasztási kényszerek közös síkja is. A rúd keresztmetszet  $A = A_1 \cup A_2$   $A_i$  ( $i=1,2$ ) résztartományát  $E_i$  ( $i=1,2$ ) rugalmassági modulusú izotróp, homogén, lineárisan rugalmas anyag tölti ki. Az  $A_1$  és  $A_2$  keresztmetszeti tartományok közös határgörbéjét  $\partial A_{12}$  jelöli, továbbá az  $A_1$  és  $A_2$  keresztmetszetekkel rendelkező  $B_1$  és  $B_2$  rúdkomponensek közös határa a  $\partial B_{12} = \partial A_{12} \times (0, L)$  hengerfelület (1. ábra). Feltevés szerint normál irányban a kapcsolat  $B_1$  és  $B_2$  között tökéletes, szakadás csak az axiális irányú elmozdulásban lehetséges a  $\partial B_{12}$  felületen történő áthaladáskor a  $B_1$  rúdkomponensről a  $B_2$  rúdkomponensre. Az  $Oxyz$  koordináta-rendszer  $O$  origója a  $z=0$  koordinátával kijelölt keresztmetszet „ $E$ -vel súlyozott súlypontjával” esik egybe [8], továbbá az  $A_1$  és  $A_2$  keresztmetszeti tartományok súlypontjait  $C_1$  és  $C_2$  jelöli (1. ábra). Ismeretes [8], hogy

$$c_1 = \left| \overline{CC_1} \right| = \frac{A_2 E_2}{\langle AE \rangle} c, \quad c_2 = \left| \overline{CC_2} \right| = \frac{A_1 E_1}{\langle AE \rangle} c, \quad (1)$$

$$\langle AE \rangle = A_1 E_1 + A_2 E_2, \quad c = c_1 + c_2. \quad (2)$$

Összhangban az Euler-Bernoulli rúdelmélettel és a mechanikai feladat szimmetria tulajdonságaival az elmozdulás mező feltett alakja

$$\mathbf{u}(x, y, z) = u(x, y, z)\mathbf{e}_x + v(x, y, z)\mathbf{e}_y + w(x, y, z)\mathbf{e}_z, \quad (3)$$



1. ábra. Kétrétegű, részlegesen kapcsolt kompozit rúd keresztirányú terheléssel

$$u = 0, \quad v = v(z), \quad w(x, y, z) = w_i(z) - y \frac{dv}{dz}, \quad (x, y, z) \in B_i \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

A rugalmasságtan geometriai egyenleteinek és a Hooke-törvénynek az alkalmazásával feltéve, hogy a Poisson-szám  $\nu = 0$  azt kapjuk, hogy

$$\sigma_z = E_i \left( \frac{dw_i}{dz} - y \frac{d^2v}{dz^2} \right), \quad (x, y, z) \in B_i, \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

A vizsgálat olyan esetre korlátozódik [3,4,5,7,8], amikor is a teljes rúdkeresztmetszetet terhelő normál erő  $N = 0$ , vagyis

$$N = N_1 + N_2 = \int_{A_1} \sigma_z dA + \int_{A_2} \sigma_z dA = 0. \quad (6)$$

A rétegek relatív elcsúszása  $s$  (interlayer slip), a tengelyirányú elmozdulások különbsége a  $\partial B_{12}$  felület mentén számolva [8]:

$$s(x, y, z) = w_1(z) - w_2(z), \quad (x, y, z) \in \partial B_{12}. \quad (7)$$

A nem tökéletesen kapcsolódó rétegek által átvitt tengelyirányú  $T$  nyíróerő

$$T = ks, \quad [T] = \frac{\text{erő}}{\text{hossz}}, \quad [k] = \frac{\text{erő}}{(\text{hossz})^2}, \quad (8)$$

ahol  $k$  a kapcsolat nyírási merevsége [3-8]. Tökéletes (merev) kapcsolat esetén  $k = \infty$  ( $s = 0$ ), „szabad” kapcsolat esetén  $k = 0$  ( $T = 0$ ). A statikai peremérték feladathoz tartozó egyenletek az alábbi alakba írhatók [3,7,8]:

$$\frac{dV}{dz} + f = 0, \quad \frac{dM}{dz} - V = 0, \quad \frac{dN_1}{dz} - T = 0, \quad (9)$$

$$\psi = -\frac{dv}{dz}, \quad M = -\{IE\} \frac{d^2v}{dz^2} + c \langle AE \rangle_{-1} \frac{ds}{dz}, \quad (10)$$

$$N_1 = \langle AE \rangle_{-1} \left( \frac{ds}{dz} - c_1 \frac{d^2v}{dz^2} \right), \quad (11)$$

$$\frac{d^2s}{dz^2} - \Omega^2 s + \frac{c}{\langle IE \rangle} V = 0. \quad (12)$$

A fenti egyenletekben az alábbi jelöléseket alkalmaztuk

$$\frac{1}{\langle AE \rangle_{-1}} = \frac{1}{A_1 E_1} + \frac{1}{A_2 E_2}, \quad (13)$$

$$\{IE\} = \int_{A_1} E_1 y^2 dA + \int_{A_2} E_2 y^2 dA, \quad \langle IE \rangle = \{IE\} - c^2 \langle AE \rangle_{-1}, \quad (14)$$

$$\Omega^2 = \frac{k \{IE\}}{\langle AE \rangle_{-1} \langle IE \rangle}, \quad (15)$$

továbbá a megoszló terhelés intenzitását  $f = f(z)$ -vel jelöltük.

### 3. Alapmegoldások

Az alapmegoldások első osztálya a (9-12) egyenletek különleges kezdeti feltételeket kielégítő megoldásai, azaz a  $v = v(z)$ ,  $\psi = \psi(z)$ ,  $s = s(z)$ ,  $M = M(z)$ ,  $V = V(z)$  és  $N_1 = N_1(z)$  függvényekhez egy kivételével zérus kezdeti feltételeket rendelünk. Ilyen típusú alapmegoldás hat van, amelyek az alábbi alakban adhatók meg:

$$1. \quad v_1 = v_1(z) = 1 = \text{állandó}, \quad \psi_1(z) = s_1(z) = M_1(z) = V_1(z) = N_{11}(z) = 0 \\ (0 \leq z < \infty). \quad (16)$$

$$2. \quad v_2(z) = -z, \quad \psi_2(z) = 1 = \text{állandó}, \quad s_2(z) = M_2(z) = V_2(z) = N_{12}(z) = 0 \\ (0 \leq z < \infty). \quad (17)$$

$$3. \quad v_3(z) = c \frac{\langle AE \rangle_{-1}}{\{IE\}} \left( \frac{\sinh \Omega z}{\Omega} - z \right), \quad (18)$$

$$\psi_3(z) = -c \frac{\langle AE \rangle_{-1}}{\{IE\}} (\cosh \Omega z - 1), \quad (19)$$

$$s_3(z) = \cosh \Omega z, \quad (20)$$

$$M_3(z) = V_3(z) = 0, \quad (21)$$

$$N_{13}(z) = \frac{k}{\Omega} \sinh \Omega z, \quad (0 \leq z < \infty). \quad (22)$$

$$4. \quad v_4(z) = - \left[ \frac{c^2 \langle AE \rangle_{-1}}{\langle IE \rangle \{IE\} \Omega^2} (\cosh \Omega z - 1) + \frac{z^2}{2 \{IE\}} \right], \quad (23)$$

$$\psi_4(z) = \frac{c^2 \langle AE \rangle_{-1}}{\langle IE \rangle \{IE\} \Omega} \sinh \Omega z + \frac{z}{\{IE\}}, \quad (24)$$

$$s_4(z) = - \frac{c}{\langle IE \rangle \Omega} \sinh \Omega z, \quad (25)$$

$$M_4(z) = 1 = \text{állandó}, \quad V_4(z) = 0, \quad (26)$$

$$N_{14}(z) = \frac{c \langle AE \rangle_{-1}}{\{IE\}} (1 - \cosh \Omega z), \quad (0 \leq z < \infty). \quad (27)$$

$$5. \quad v_5(z) = - \left[ \frac{1}{k \Omega} \left( \frac{c \langle AE \rangle_{-1}}{\{IE\}} \right)^2 (\Omega z - \sinh \Omega z) + \frac{z^3}{6 \{IE\}} \right], \quad (28)$$

$$\psi_5(z) = \frac{1}{k} \left( \frac{c \langle AE \rangle_{-1}}{\{IE\}} \right)^2 (1 - \cosh \Omega z) + \frac{z^2}{3 \{IE\}}, \quad (29)$$

$$s_5(z) = - \frac{c \langle AE \rangle_{-1}}{k \{IE\}} (1 - \cosh \Omega z), \quad (30)$$

$$M_5(z) = z, \quad V_5(z) = 1 = \text{állandó}, \quad (31)$$

$$N_{15}(z) = \frac{kc}{\Omega^3 \langle IE \rangle} (\Omega z - \sinh \Omega z), \quad (0 \leq z < \infty). \quad (32)$$

$$6. \quad v_6(z) = \frac{c \langle AE \rangle_{-1}}{k \{IE\}} (\cosh \Omega z - 1), \quad (33)$$

$$\psi_6(z) = - \frac{c \langle AE \rangle_{-1}}{k \{IE\}} \sinh \Omega z, \quad (34)$$

$$s_6(z) = \frac{\Omega}{k} \sinh \Omega z, \quad (35)$$

$$M_6(z) = V_6(z) = 0, \quad (36)$$

$$N_{16}(0) = 1, \quad N_{16}(z) = \cosh \Omega z, \quad (0 \leq z < \infty). \quad (37)$$

Még egy terhelési előíráshoz tartozó alapmegoldás képletét adjuk meg, amely az alapmegoldások második osztályába tartozik, és a  $v(0) = \psi(0) = s(0) = M(0) = V(0) = N_1(0) = 0$  homogén kezdeti feltételeknek is eleget tesz. Az egyenletesen megoszló terhelés intenzitása  $f_0$  egységnyi (2. ábra). A (9-12) egyenletek felhasználása az alábbi eredményt adja:

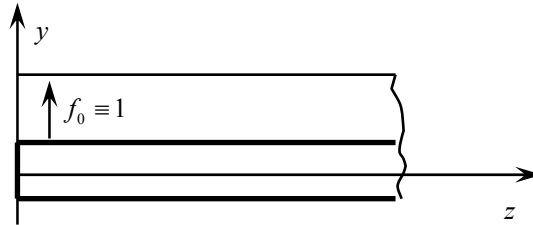
$$v_f(z) = \frac{z^4}{24\{IE\}} + \frac{1}{k} \left( \frac{c\langle AE \rangle_{-1}}{\Omega\{IE\}} \right)^2 \left[ -1 - \frac{1}{2}(\Omega z)^2 + \cosh \Omega z \right], \quad (38)$$

$$\psi_f = -\frac{z^3}{6\{IE\}} - \frac{1}{k\Omega} \left( \frac{c\langle AE \rangle_{-1}}{\{IE\}} \right)^2 (\sinh \Omega z - \Omega z), \quad (39)$$

$$s_f(z) = \frac{c\langle AE \rangle_{-1}}{k\{IE\}} \left[ -z + \frac{\sinh \Omega z}{\Omega} \right], \quad (40)$$

$$M_f(z) = -\frac{z^2}{2}, \quad V_f(z) = -z, \quad (41)$$

$$N_{1f}(z) = \frac{ck}{\Omega^4\langle IE \rangle} \left( \cosh \Omega z - \frac{(\Omega z)^2}{2} - 1 \right), \quad (0 \leq z < \infty). \quad (42)$$



2. ábra. Egyenletesen megoszló terhelés

A felírt alapfüggvények az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek:

$$v_1(0) = 1, \quad \psi_1(0) = s_1(0) = M_1(0) = V_1(0) = N_{11}(0) = 0, \quad (43)$$

$$\psi_2(0) = 1, \quad v_2(0) = s_2(0) = M_2(0) = V_2(0) = N_{12}(0) = 0, \quad (44)$$

$$s_3(0) = 1, \quad v_3(0) = \psi_3(0) = M_3(0) = V_3(0) = N_{13}(0) = 0, \quad (45)$$

$$M_4(0) = 1, \quad v_4(0) = \psi_4(0) = s_4(0) = V_4(0) = N_{14}(0) = 0, \quad (46)$$

$$V_5(0) = 1, \quad v_5(0) = \psi_5(0) = s_5(0) = M_5(0) = N_{15}(0) = 0, \quad (47)$$

$$N_{16}(0) = 1, \quad v_6(0) = \psi_6(0) = s_6(0) = M_6(0) = V_6(0) = 0, \quad (48)$$

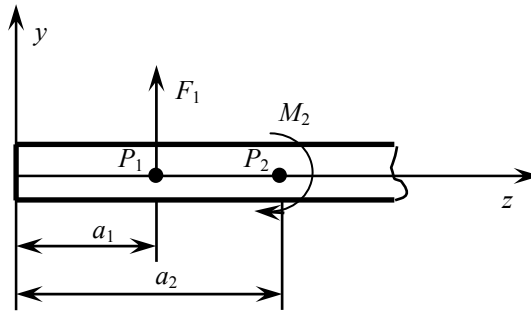
A  $z = a$ , ( $a \neq 0$ ,  $a = L$ ) helyen működő koncentrált erőhöz és erőpárhoz tartozó második osztályba sorolt megoldásfüggvényeket a már felírt első osztályhoz tartozó megoldásfüggvényekből – amelyek a 4-5. esetekre vonatkoznak – a Heaviside féle függvény alkalmazásával állítjuk elő. Így például a 3. ábrán szemléltetett esetben az  $F_1$  koncentrált erőhöz valamint az  $M_2$  koncentrált nyomatékhoz tartozó lehajlás és szlip függvényeket az alábbi képletek adják meg:

$$v(z) = F_1 H(z - a_1) v_5(z - a_1) - M_1 H(z - a_2) v_4(z - a_2), \quad (0 \leq z < \infty), \quad (49)$$

$$s(z) = F_1 H(z - a_1) s_5(z - a_1) - M_1 H(z - a_2) s_4(z - a_2), \quad (50)$$

ahol

$$H(z - a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < a, \\ 1, & a \leq z < \infty. \end{cases} \quad (51)$$



3. ábra. Koncentrált erővel és erőpárral terhelt kompozit rúd

#### 4. Példák

A példákban szereplő kompozit rudak keresztmetszetét a 4. ábra szemlélteti. A 4. ábra alapján írhatjuk, hogy jelen esetben

$$c_1 = |\overline{CC}_1| = \frac{E_2 h_2 (h_1 + h_2)}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)}, \quad (52)$$

$$c_2 = |\overline{CC}_2| = \frac{E_1 h_1 (h_1 + h_2)}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)}, \quad (53)$$

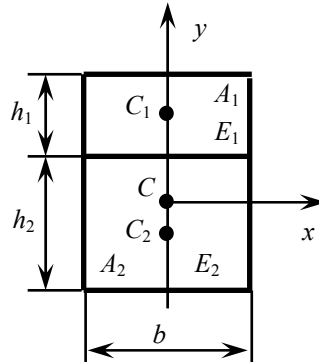
$$c = c_1 + c_2 = \frac{h_1 + h_2}{2}, \quad (54)$$

$$A_1 = h_1 b, \quad A_2 = h_2 b, \quad \langle AE \rangle = (E_1 h_1 + E_2 h_2) b, \quad (55)$$

$$\langle AE \rangle_{-1} = \frac{E_1 h_1 E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2}, \quad (56)$$

$$\{IE\} = \left[ \frac{E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3}{12} + E_1 h_1 c_1^2 + E_2 h_2 c_2^2 \right] b, \quad (57)$$

$$\langle IE \rangle = \frac{(E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3) b}{12}. \quad (58)$$



4. ábra. A kompozit rúd keresztmetszete

A feladat megoldása során a példákban az alábbi adatokat használjuk:

$$E_1 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}, \quad E_2 = 10^{10} \text{ Pa}, \quad h_1 = 0,02 \text{ m}, \quad h_2 = 0,04 \text{ m}, \quad b = 0,03 \text{ m}.$$

**1. Példa.** Koncentrált erővel terhelt csuklós és görgős alátámasztású kompozit rúd (5. ábra). A feladat megoldását a kezdeti feltételekhez és a koncentrált  $F_1$  erőhöz tartozó alapmegoldások szuperpozíciójaként nyerjük. Az ismeretlen kezdeti értékeket  $\psi(0)$ -t és  $s(0)$ -t a  $z = 2a$  koordinátával kijelölt szélső keresztmetszetre vonatkozó

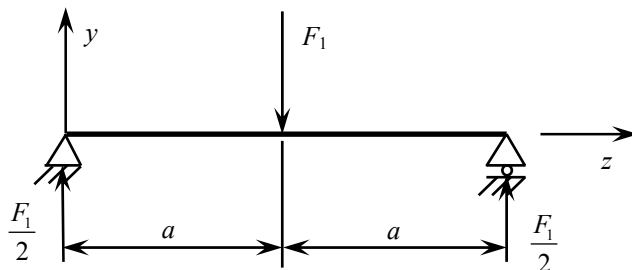
$$v(2a) = 0, \quad N_1(2a) = 0 \quad (59)$$

kerületi feltételek alapján nyerjük. Az (59) egyenletből az következik, hogy

$$\psi(0) = \frac{F_1}{2\{IE\}} \left[ \frac{a^2}{2} - \frac{c^2 \langle AE \rangle_{-1}}{\langle IE \rangle \Omega^2} \frac{1 - \cosh \Omega a}{\cosh \Omega a} \right], \quad (60)$$

$$s(0) = F_1 \frac{c}{2\langle IE \rangle \Omega^2} \frac{1 - \cosh \Omega a}{\cosh \Omega a}. \quad (61)$$





5. ábra. Koncentrált erővel terhelt csuklós és görgős alátámasztású kompozit rúd

A többi kezdeti érték ismert, hiszen

$$v(0) = N_1(0) = M(0) = 0, \quad V(0) = -\frac{F_1}{2}. \quad (62)$$

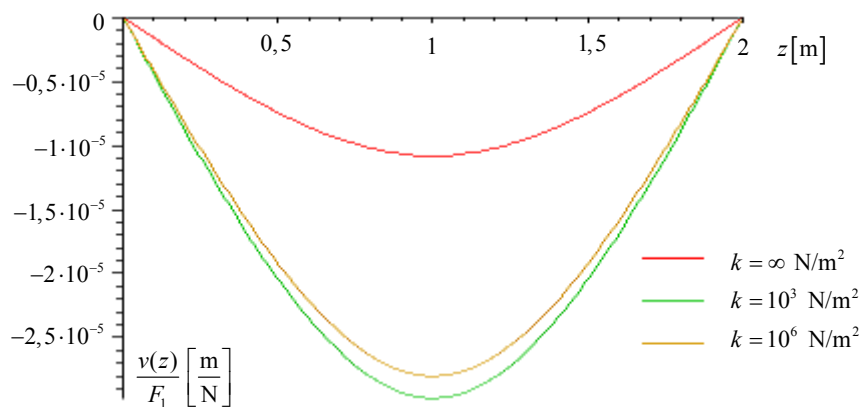
Jelen feladat megoldása a következő alakban adható meg:

$$X(z) = \psi(0)X_2(z) + s(0)X_3(z) + V(0)X_5(z) + F_1H(z-a)X_5(z-a), \quad (63)$$

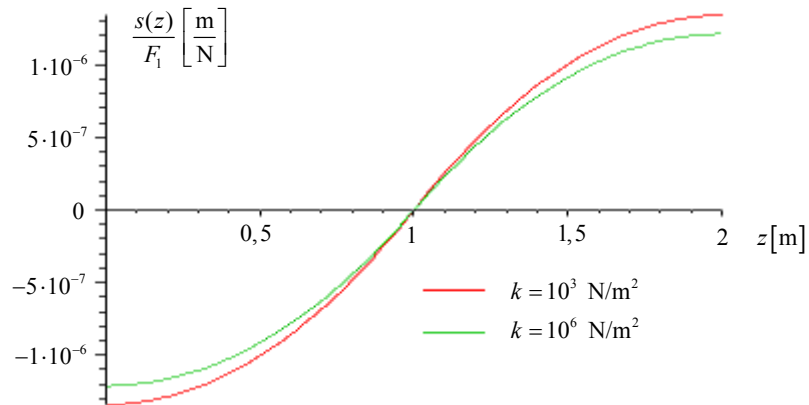
ahol

$$X = v, \psi, s, M, V, N_1. \quad (64)$$

A 6-7. ábrák szemléltetik a  $v = v(z)$  lehajlás és az  $s = s(z)$  szlip függvény görbéit a  $k$  kapcsolati merevség néhány jellemző értékére.



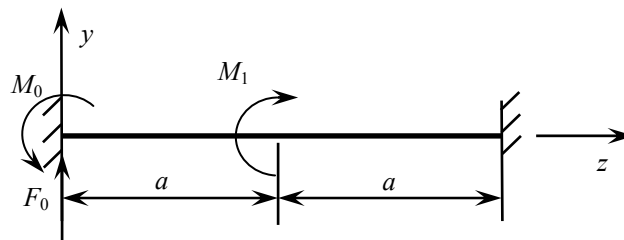
6. ábra. Kéttámaszú kompozit tartó lehajlás függvényei



7. ábra. Kéttámaszú kompozit tartó szlip függvényei

**2. Példa.** E példa statikailag határozatlan megtámasztású tartóra vonatkozik. A tartó középső keresztmetszetét  $M_1$  koncentrált nyomaték terheli (8. ábra). A 8. ábra alapján írhatjuk, hogy

$$v(0) = \psi(0) = s(0) = 0. \quad (65)$$



8. ábra. Koncentrált nyomatékkal terhelt, szélső keresztmetszeteinél befalazott tartó.

Ismeretlen kezdeti értékek

$$M(0) = M_0, \quad V(0) = -F_0, \quad N_1(0) = N_{10}. \quad (66)$$

Az ismeretlen kezdeti értékeket a  $z = 2a$  helyre vonatkozó geometriai peremfeltételek alapján számítjuk

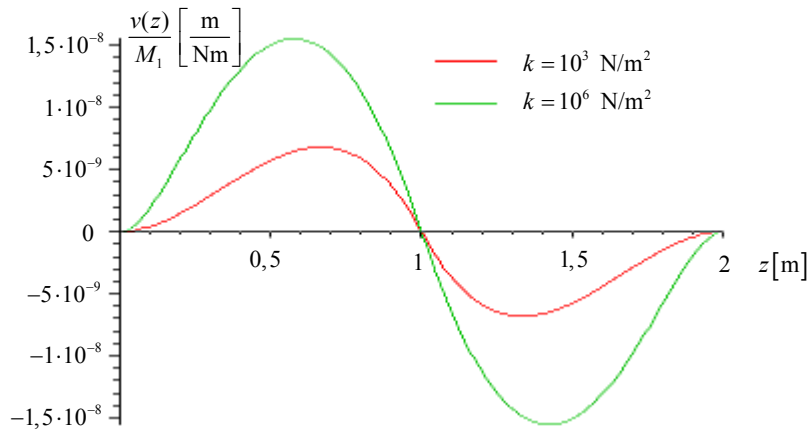
$$v(2a) = 0, \quad \psi(2a) = 0, \quad s(2a) = 0. \quad (67)$$

Az elvégzett számítások alapján írhatjuk, hogy

$$F_0 = \frac{0,25M_1}{a \left( -\frac{1}{3} + \frac{c^2 \langle AE \rangle_{-1} (\tanh \Omega a - \Omega a)}{\langle IE \rangle (\Omega a)^3} \right)}, \quad (68)$$

$$M_0 = M_1 \left( 0,5 + \frac{0,25}{-\frac{1}{3} + \frac{c^2 \langle AE \rangle_{-1} (\tanh \Omega a - \Omega a)}{\langle IE \rangle (\Omega a)^3}} \right), \quad (69)$$

$$N_{10}(0) = M_1 \left\{ \frac{c \langle AE \rangle_{-1}}{\langle IE \rangle} \left[ 0,5 + \frac{0,25}{-\frac{1}{3} + \frac{c^2 \langle AE \rangle_{-1} (\tanh \Omega a - \Omega a)}{\langle IE \rangle (\Omega a)^3}} + \frac{0,25c^2 \langle AE \rangle_{-1}}{\langle IE \rangle \Omega a \left( -\frac{1}{3} + \frac{c^2 \langle AE \rangle_{-1} (\tanh \Omega a - \Omega a)}{\langle IE \rangle (\Omega a)^3} \right)} - \frac{0,25c \langle AE \rangle_{-1} \tanh \Omega a}{\langle IE \rangle (\Omega a) \left( -\frac{1}{3} + \frac{c^2 \langle AE \rangle_{-1} (\tanh \Omega a - \Omega a)}{\langle IE \rangle (\Omega a)^3} \right)} \right] \right\}. \quad (70)$$

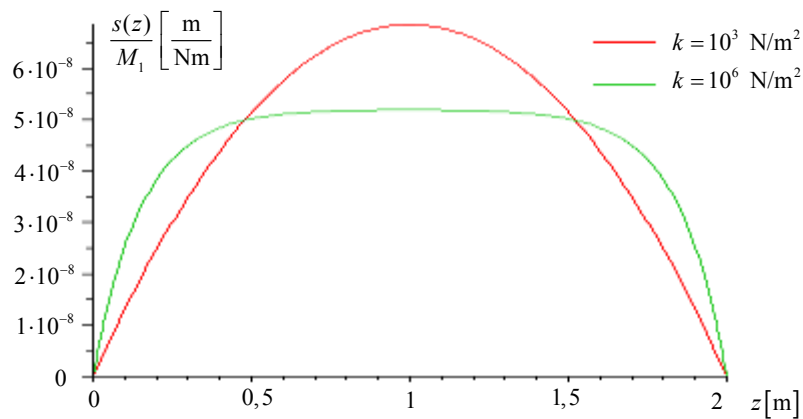


9. ábra. A lehajlás függvények ábrái

Az elemzett példa megoldását az

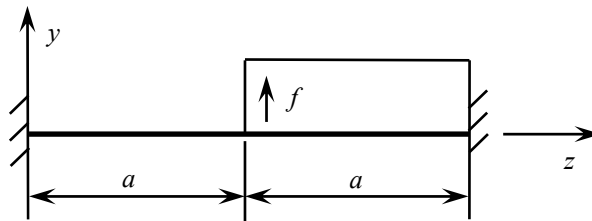
$$X(z) = M_0 X_4(z) - F_0 X_6(z) + N_{10}(0) X_6(z) - M_1 H(z-a) X_4(z-a) \quad (71)$$

képlet adja meg. A 9-10. ábrák szemléltetik a  $v = v(z)$  lehajlás és az  $s = s(z)$  szlip függvények görbéit a  $k$  kapcsolati merevség néhány értékére.



10. ábra. A szlip függvények ábrái

**3. Példa.** E példában állandó intenzitású megoszló terheléssel részlegesen terhelt, mindkét szélső keresztmetszeténél fixen megfogott tartót vizsgálunk (11. ábra). A feladatban az alábbi kezdeti feltételek ismertek:



11. ábra. Részlegesen terhelt kompozit tartó

$$v(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad s(0) = 0. \quad (72)$$

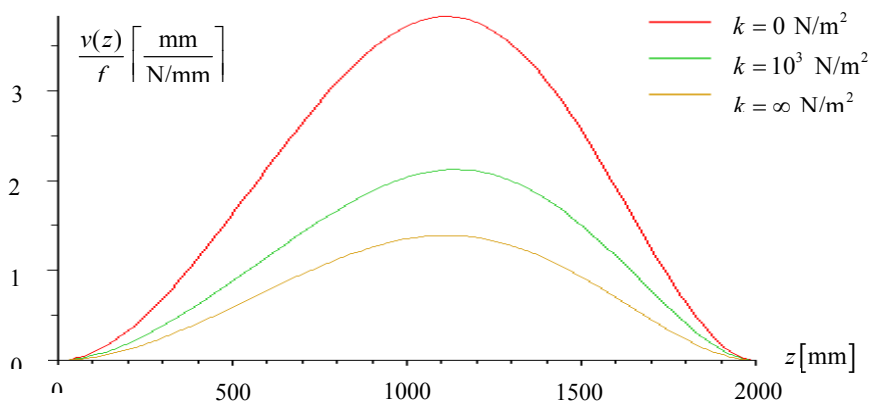
A hiányzó kezdeti feltételek a  $z = 2a$  koordinátával kijelölt keresztmetszetre vonatkozó peremfeltételek alapján határozhatók meg, amelyek a következő előírásokat fogalmazzák meg.

$$v(2a) = 0, \quad \psi(2a) = 0, \quad s(2a) = 0. \quad (73)$$

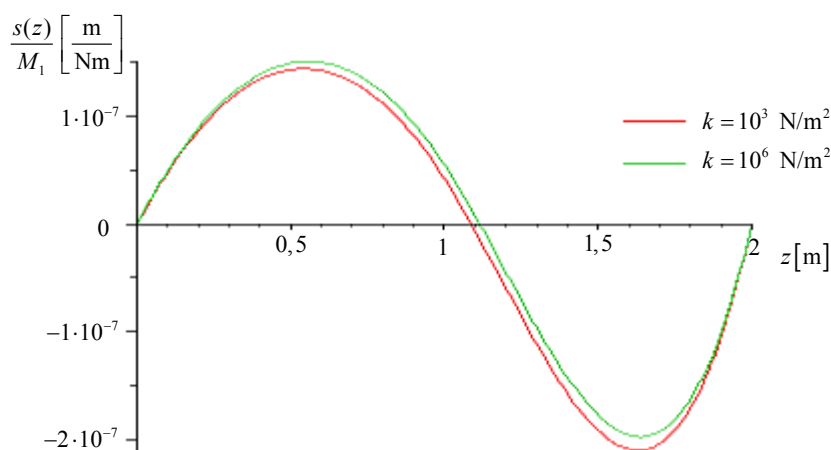
E peremfeltételek alapján nyerjük a hiányzó kezdeti feltételeket, az  $M_1(0)$ ,  $V_1(0)$ ,  $N_1(0)$  értékeit. Ezek ismeretében a feladat megoldása a (38-42) egyenletek felhasználásával az alábbi alakba írható:

$$X(z) = M_1(0)X_4(z) + V_1(0)X_5(z) + N_{10}(0)X_6(z) + f_0H(z-a)X_f(z), \quad (74)$$

ahol  $X = v, \psi, s, M, V, N_1$ . Az e feladathoz tartozó zárt alakú képletek igen bonyolultak, felírásuktól eltekintünk, pusztán az alkalmazásukkal előállított lehajlás és szlip függvények ábráit adjuk meg a 12-13. ábrákon.



12. ábra. A 3. példához tartozó lehajlás függvények



13. ábra. A 3. példához tartozó szlip függvények

## 5. Következtetések

A dolgozat egy új analitikus eljárást ismertet a kétrétegű, nem tökéletesen kapcsolódó hajlított és nyírt kompozit rudak szilárdságtani számítására. Az adott statikai peremérték feladat analitikus megoldását úgynevezett alapfüggvények lineáris kombinációjaként állítja elő. A dolgozatban ismertetett numerikus példák eredményei mint „benchmark” megoldások hasznosíthatók különböző közelítő eljárásokkal, mint például a véges differenciák módszere, végelelem módszer alkalmazásával nyert numerikus eredmények hiba analizésére.

## 6. Köszönetnyilvánítás

A cikkben ismertetett kutatómunka a TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0008 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

## 7. Irodalom

- [1] Ayoub, A.: *A two-field mixed variational principle for partially connected composite beams*, Finite Element in Analysis and Design 37, 2001. pp. 929-959.
- [2] Dall’Astra, Zona, A.: *Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection*, Finite Element in Analysis and Design 40, 2004. pp. 425-448.
- [3] Girhammar, U., Gupu, V.: *Composite beams – columns with interlayer slip – exact analysis*. Journal of Structural Engineering 119, 1999. pp. 1265-1282.
- [4] Murakami, H.: *A laminated beam theory with interlayer slip*, Journal of Applied Mechanics, 1984. pp. 551-558.
- [5] Newmark, N., Seiss, C., Veist, I.: *Test and analysis of composite beams with incomplete interactions*. Proceedings of the Society of Experimental Stress Analysis 9, 1951. pp. 75-92.
- [6] Thompson, E., Goodman, J., Vanderbilt, M.: *Finite element analysis of layered wood systems*. Journal of the Structural Division 101, 1975. pp. 2659-2672.
- [7] Girhammar, U., Pan, D.: *Exact static analysis of partially composite beams and beam-columns*, International Journal of Mechanical Sciences 49, 2007. pp. 239-255.
- [8] Ecsedi, I., Baksa, A.: *Static analysis of composite beams with weak shear connection*, Applied Mathematical Modelling 35, 2011. pp. 1739-1750.