

NEMLINEÁRIS VEM PROGRAM GYAKORLATI ALKALMAZÁSA GUMIALKATRÉSZEKRE

Mankovits Tamás¹, Szabó Tamás²

¹Adjunktus, Debreceni Egyetem, Gépészmérnöki Tanszék
4028 Debrecen, Ótemető u. 2-4., e-mail: tamas.mankovits@eng.unideb.hu

²Egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Robert BOSCH Mechatronikai Tanszék
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: szabo.tamas@uni-miskolc.hu

Összefoglalás

Jelen cikk gumialkatrészek numerikus vizsgálatához készült saját fejlesztésű végeleemes program elméleti hátterét mutatja be, amellyel meghatározható a nemlineáris erő-elmozdulás jelleggörbe. A program gyakorlati alkalmazhatóságát kísérlettel igazoltuk. Ezt kereskedelmi végelesem szoftver alkalmazásával is leellenőriztük. A program tengelyszimmetrikus majdnem összenyomhatatlan gumik vizsgálatára lett kifejlesztve egy későbbi alakoptimalizálás céljából.

Kulcsszavak: gumi, végelesem-módszer, rugó karakterisztika

Abstract

This paper presents a theoretical background of a special purpose finite element code for the finite element analysis of rubber parts. The nonlinear load-displacement curve is determined. The application of the FEM code in practice is verified by experiment and checked by commercial FEM software. The FEM code for axially symmetric nearly incompressible rubber parts has been developed for further shape optimization tasks.

Keywords: rubber, finite element method, rubber characteristics

1. Bevezetés

A gumirugók olyan szerkezeti elemek, amelyek külső erők munkáját képesek belső alakváltozási energia formájában felhalmozni. Többek között ezen kiváló tulajdonság miatt alkalmazásuk nélkülözhetetlenné vált a járműiparban. A gumirugók alkalmazási területük szempontjából különböző igénybevételt kell, hogy kielégítsenek. Jelen cikk a nyomásra igénybevett gumirugókkal foglalkozik, melyre a gumirugó jelleggörbéje (rugó karakterisztika) progresszív jelleget mutat. Ez a legtöbb rugózási feladatnál előnyösen kihasználható.

A gumirugó nagy alakváltozást szenved terhelések hatására, amely önmagában is nemlineáris viselkedésre utal. A gumi összenyomhatatlansága ezt a nemlineáris viselkedést tovább fokozza. Az ilyen feladatokat a hagyományos mérnöki tervezés csak nagy elhanyagolás árán tudott kezelni. A számítástechnika és a mérnöki tudományok fejlődésének köszönhetően ma már számos kereskedelmi szoftver segíti a tervezést, de a téma kutatása továbbra is aktuális maradt. A végelesem-módszerrel foglalkozó kutatók számára komoly kihívást jelent, hogy hatékony és megbízható eljárásokat dolgozzanak ki

olyan problémákra, mint például a gumi összenyomhatatlanságának kezelése. Egy olyan saját fejlesztésű végeselemes program kidolgozását tűztük ki célul, amely a fent említett problémára hatékony megoldást szolgáltat.

Az elkészített végeselemes programunk hitelesítésére egy járműiparban alkalmazott gumibakon végzünk laboratóriumi méréseket, amelynek eredményét összehasonlítjuk a numerikus vizsgálatokkal. A feladatot kereskedelmi szoftver segítségével is leellenőrizzük.

1.1. Irodalom feldolgozás

A kifejlesztendő program komoly kontinuummechanikai háttérrel igényel. Az alakváltozás nemlineáris elméletét [1,2] részletesen tárgyalja, amelyek jó alapot adnak a gumiszerű anyagok mechanikai viselkedésének leírásában és a végeselemes program kifejlesztésében.

A gumik leírására számos anyagmodell létezik. Ilyen például a Neo-Hooke, a Mooney-Rivlin és az Ogden anyagmodellek. A modellekben alkalmazott paraméterek meghatározásához mindenképpen szükséges laboratóriumi mérés. A hiperelasztikus anyagok paramétereinek illesztésével foglalkozik [3,4,5]. Az anyagmodellek konstansait [5] a Shore-féle keménységmérés eredményéből állapította meg. Ez a mérési módszer olcsó és széles körben elterjedt eljárás. A keménységmérés felhasználásával gyorsan meghatározhatók a szükséges paraméterek. Megjegyezzük, hogy az ellenőrző számítások elvégzése minden esetben indokolt, mert a tapasztalatok alapján csak közelítőleg adnak valósághű eredményt.

Hiperelasztikus anyagok numerikus vizsgálatára általában a h -verziós végeselemeket alkalmazták [6,7,8], a p -verziós végeselemeket csak az utóbbi években kezdték el használni [9,10] összenyomhatatlan, vagy majdnem összenyomhatatlan anyagok végeselemes vizsgálatához. A kontinuummechanikai leírásban az összenyomhatatlanság egy kiegészítő feltétel, amelynek közelítésére több megközelítést mutat be [1]. A célunk megbízható, az ún. „locking” (bezáródás) szempontjából kedvező tengelyszimmetrikus végeselemek alkalmazása [11,12]. A gumikhoz ezért a vegyes mezők módszerét, funkcionálként független hárommezős funkcionált alkalmazunk [1].

2. Nagy alakváltozás elmélete tengelyszimmetrikus gumialkatrészekre

A Lagrange-féle leírásmód alapján [2] szerint (r, φ, z) henger-koordináta rendszerben a pillanatnyi $(t = t)$ konfiguráció mozgásfüggvényét felírhatjuk az azonosító $(t = 0)$ konfiguráció függvényeként

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(r^0, z^0; t). \quad (1)$$

Mivel vizsgálatainkban a terhelés és a peremfeltétel is tengelyszimmetrikus, így nincsen φ -től való függés. A vizsgált testnek az azonosító konfigurációban értelmezett $d\mathbf{r}^0$ és a pillanatnyi konfiguráció $d\mathbf{r}$ vonalelemének kapcsolatát az \mathbf{F} alakváltozási gradienssel írhatjuk le

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{r}^0}, \quad (2)$$

amelyet összenyomhatatlan, vagy majdnem összenyomhatatlan anyagok esetén célszerű felbontani egy \mathbf{F}_V térfogatváltozást leíró és egy $\hat{\mathbf{F}}$ torzulásos (deviátoros) tagra

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_V \cdot \hat{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{F}_V = J^{\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{I}, \quad \hat{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{F}, \quad (3)$$

ahol J a Jacobi-determináns, amelyre $\det \mathbf{F} = J \neq 0$.

Az alakváltozási gradiensből származtathatók az alakváltozási tenzorok. Így előállítható az azonosító konfigurációban értelmezett \mathbf{C} jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor, a $\hat{\mathbf{C}}$ Cauchy-Green alakváltozási tenzor torzulásos tagja, valamint a végeeselemes számításhoz szükséges \mathbf{E} Green-Lagrange alakváltozási tenzor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \hat{\mathbf{F}} = J^{-\frac{2}{3}} \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (4)$$

ahol \mathbf{I} az egységtenzor.

Gumik esetén az anyagmodelleket az alakváltozási energiasűrűség függvénnyel szokás megadni. Majdnem összenyomhatatlan anyagok energiasűrűség függvénye is felbontható egy térfogatváltozási és egy torzulásos részre

$$W(J, \hat{\mathbf{C}}) = U(J) + \hat{W}(\hat{\mathbf{C}}), \quad (5)$$

ahol $U(J)$ jelöli a térfogatváltozásból származó, míg $\hat{W}(\hat{\mathbf{C}})$ a torzulásból származó alakváltozási energiasűrűséget. Az $U(J)$ -t az alábbi egyszerű formában alkalmazzuk

$$U(J) = \frac{1}{2} \cdot \kappa \cdot (J - 1)^2, \quad (6)$$

ahol κ a térfogati rugalmassági (bulk) modulus, amely egy valóságos anyagjellemző és a végeeselemes vizsgálatokban büntetőparaméterként értelmezhető. Ha összenyomhatatlan anyagot vizsgálunk, akkor $U(J) = 0$, mivel a Poisson-tényező $\nu = 0,5$. Megjegyezzük, hogy az iparban alkalmazott gumik a gumikeverék összetevői miatt majdnem összenyomhatatlan anyagnak tekinthetők. Ennek megfelelően a Poisson-tényező $0,49 < \nu < 0,5$ közé esik. Az alakváltozási energiasűrűség torzulásos tagjára számos anyagmodell használatos. Nyomó igénybevételre a Mooney-Rivlin anyagmodell jó egyezést mutat a laboratóriumi méréseinkkel, így anyagtörvénynek azt alkalmazzuk. Mivel a gumi homogén izotróp anyag, így az anyagtörvényt az alakváltozási tenzorok skalár invariánsaival szokás kifejezni. A Mooney-Rivlin anyagtörvény így [1] alapján

$$\hat{W}(\hat{\mathbf{C}}) = \mu_{10} \cdot (\hat{I}_I - 3) + \mu_{01} \cdot (\hat{I}_{II} - 3) \quad (7)$$

alakban írható fel, ahol \hat{I}_I és \hat{I}_{II} a Cauchy-Green alakváltozási tenzor torzulásos tagjának első- és második skalár invariánsa, μ_{10} és μ_{01} pedig az ún. Mooney-Rivlin anyagállandók.

A végeeselemes számításokban megjelenő \mathbf{S} II. Piola-Kirchhoff feszültségi tenzor is az alakváltozási gradiensből származtatható, így kifejezhető a Green-Lagrange alakváltozási tenzonnal, valamint felbontható egy torzulásos és egy hidrosztatikus (izotróp) részre, azaz

$$\mathbf{S} = 2 \cdot \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}' + p \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{C}^{-1}, \quad (8)$$

ahol \mathbf{S}' a II. Piola-Kirchhoff feszültségi tenzor torzulásos tagja, \mathbf{C}^{-1} a Cauchy-Green alakváltozási tenzor inverze, míg p a hidrosztatikus nyomás, amely a térfogatváltozásból származó energiasűrűségből számolható

$$p = \frac{dU}{dJ} \quad (9)$$

módon.

Az alakváltozás és a feszültség között az anyagtörvény teremt kapcsolatot, amely a \mathbf{D} anyagállandók negyedrendű tenzorával írható le. A kezdeti konfigurációban az anyagállandók tenzora

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}, \quad (10)$$

azaz a II. Piola-Kirchhoff feszültségi tenzornak a Green-Lagrange alakváltozási tenzor szerinti deriválásával számolható.

3. Az energia funkcionál és a végelelemes tárgyalásmód

A gumikhoz a vegyes mezők módszerét, funkcionálként pedig független hárommezős funkcionált alkalmazunk. Szokás ezt a funkcionált Hu-Washizu típusú funkcionálnak nevezni [1], mert az \mathbf{u} elmozdulásmező, a \bar{J} térfogatváltozást és a \bar{p} hidrosztatikus nyomást egymástól függetlenül közelíti. Megjegyezzük, hogy a Hu-Washizu variációs elv az elmozdulásmező, az alakváltozási gradiens és az I. Piola-Kirchhoff feszültségi tenzormező független közelítésére épül. A kifejlesztendő végelelemes program alapjául a

$$\Pi(\mathbf{u}, \bar{J}, \bar{p}) = \int_V \hat{W}(\hat{\mathbf{C}}) dV + \int_V U(\bar{J}) dV + \int_V \bar{p} \cdot (J - \bar{J}) dV - \Pi_k(\mathbf{u}) \quad (11)$$

funkcionál szolgál, ahol $U(\bar{J})$ a büntetőparaméteres tag. A J az elmozdulásból származtatható és független \bar{J} -től. A \bar{p} egy Lagrange-féle multiplikátor, amelynek fizikai tartalma a hidrosztatikus nyomás, $\Pi_k(\mathbf{u})$ a külső erők potenciálja. Képezve a funkcionál változók szerinti variációját kapjuk

$$\delta_{\mathbf{u}} \Pi(\mathbf{u}, \bar{J}, \bar{p}) = 0 = \int_V \frac{\partial \hat{W}(\hat{\mathbf{C}})}{\partial \mathbf{C}} \cdots \delta \mathbf{C} dV + \int_V \bar{p} \cdot \delta J dV - \delta \Pi_k(\mathbf{u}), \quad (12)$$

$$\delta_{\bar{J}} \Pi(\mathbf{u}, \bar{J}, \bar{p}) = 0 = \int_V \left(\frac{dU(\bar{J})}{d\bar{J}} - \bar{p} \right) \cdot \delta \bar{J} dV, \quad (13)$$

$$\delta_{\bar{p}} \Pi(\mathbf{u}, \bar{J}, \bar{p}) = 0 = \int_V (J - \bar{J}) \cdot \delta \bar{p} dV. \quad (14)$$

Mivel a \bar{p} és \bar{J} független mezőket az elem határán nem illesztjük, ezért (13) és (14) végelelemenként kerül felírásra. A (12) egyenlet az elmozdulás nemlineáris függvénye, ezért azt a diszkretizáció előtt a megfelelő változók szerinti növekmények alkalmazásával linearizálni kell. Így bevezetjük a $\Delta \mathbf{E}$ Green-Lagrange alakváltozási tenzor és $\Delta \mathbf{S}$ II. Piola-Kirchhoff feszültségi tenzor növekményeket [13]. A Total Lagrange leírást felhasználva

$$\mathbf{E}^{t+\Delta t} = \mathbf{E}^t + \Delta \mathbf{E}, \quad \mathbf{S}^{t+\Delta t} = \mathbf{S}^t + \Delta \mathbf{S}. \quad (15)$$

A számítások során az elmozdulásmezőről feltételezzük, hogy kinematikailag lehetséges, azaz folytonos, elegendően sokszor differenciálható és kielégíti a kinematikai peremfeltételt. A funkcionál elmozdulásmező szerinti variációja [13] alapján, amely tartalmilag megegyezik (12)-vel

$$\int_V \mathbf{S}^{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{E}^{t+\Delta t} dV - \delta \Pi_k(\mathbf{u}) = 0 \quad (16)$$

alakban írható fel. A Green-Lagrange alakváltozási tenzor növekmény felbontható egy elmozdulástól lineárisan és egy nemlineárisan függő részre

$$\Delta \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E}_L + \Delta \mathbf{E}_{NL}. \quad (17)$$

Felhasználva azt, hogy

$$\delta \mathbf{E}^{t+\Delta t} = \delta \Delta \mathbf{E} \quad \text{és} \quad \Delta \mathbf{S} = \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{E}_L \quad (18)$$

a linearizálás után, élve a $\delta \Delta \mathbf{E} = \delta \Delta \mathbf{E}_L$ közelítéssel a (16)

$$\int_V \delta \Delta \mathbf{E}_L \cdot \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{E}_L dV + \int_V \mathbf{S}^t \cdot \Delta \mathbf{E}_{NL} dV = \delta \Pi_k(\mathbf{u}) - \int_V \mathbf{S}^t \cdot \Delta \mathbf{E}_L dV \quad (19)$$

alakban írható fel, amely végelemes számításra alkalmas.

Végeselemként kilenc csomópontú izoparametrikus elemeket [14] alkalmazunk. Tengelyszimmetrikus feladatnál a vízszintes és függőleges elmozdulásokat közelítjük síkbeli esetben, mivel a test pontjai a meridiánsíkban mozognak el, amely mátrixos alakban

$$\mathbf{u}^e = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{u}_i \quad (20)$$

írható fel, ahol \mathbf{N}_i az approximációs mátrix, \mathbf{u}_i a csomóponti elmozdulás vektor és $n = 9$. Az elmozdulást teljes másodfokú függvénnyel, a térfogatváltozást és a hidrosztatikus nyomást lineáris függvénnyel közelítjük, így

$$\bar{J} = a_0 + a_1 \cdot r + a_2 \cdot z, \quad \bar{p} = b_0 + b_1 \cdot r + b_2 \cdot z. \quad (21)$$

A végelelemes diszkretizáció után megkapjuk a Newton-Raphson iterációs összefüggést [13], azaz

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_k - \mathbf{f}_b = \Delta \mathbf{f}, \quad (22)$$

ahol \mathbf{K}_T a szerkezet tangenciális merevségi mátrixa, amely a lineáris és a geometriai merevségi mátrixok összege

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL}, \quad (23)$$

ahol \mathbf{f}_k és \mathbf{f}_b a szerkezet külső- és belső erőinek tehervektorai. A $\Delta \mathbf{f}$ a szerkezet kiegyensúlyozatlan tehervektora, míg $\Delta \mathbf{u}$ a csomóponti elmozdulás növekmény. A szerkezeti mátrixok az elemek megfelelő merevségi mátrixainak és tehervektorainak végelelemes összegzésével állíthatók elő [13].

Erre a képletsorra egy saját fejlesztésű végelelemes program készült FORTRAN nyelven majdnem összenyomhatatlan anyagokra. Az elmozdulás approximációjának foka $p = 2$.

4. Numerikus példa

A kifejlesztett végelelem programunk hitelesítésére (valóságnak megfelelő eredmény) egy járműiparban alkalmazott gumibakon végzünk laboratóriumi méréseket. Ezt összehasonlítjuk a gumialkatrész numerikus vizsgálatának eredményeivel. Mivel számos kereskedelmi

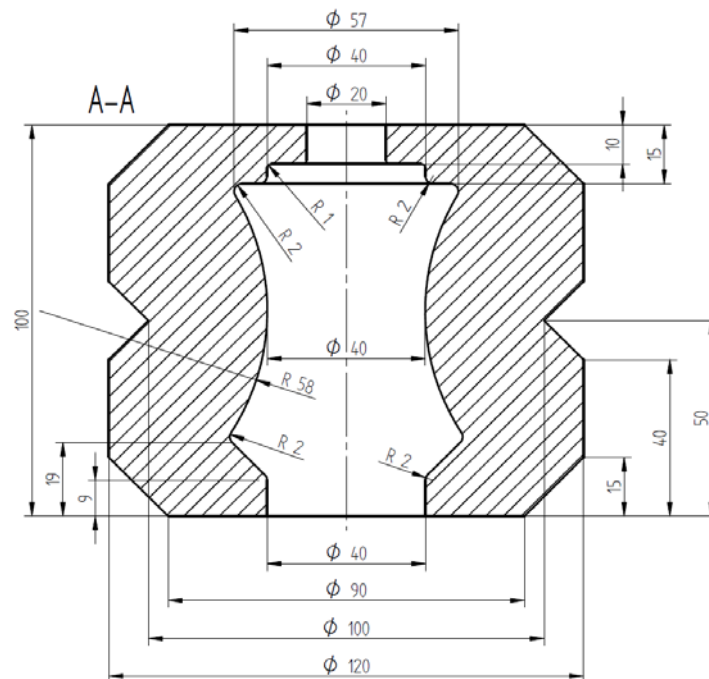
végeselem szoftver képes hatékonyan kezelni a gumikat, így ezt a feladatot a FEMAP szoftterrel is leellenőrizzük.

Mintadarabunk egy nyomásra igénybevett gumibak, amelyet kamionoknál alkalmaznak a motor és a váltó ágyazására. A gumibakot az **1. ábra** szemlélteti.



1. ábra. A gumibak

A gumibak SOLID EDGE v20 tervező szoftterrel elkészített műhelyrajzát a **2. ábra** mutatja.



2. ábra. A gumibak műhelyrajza

4.1. A gumibak kísérleti nyomóvizsgálata

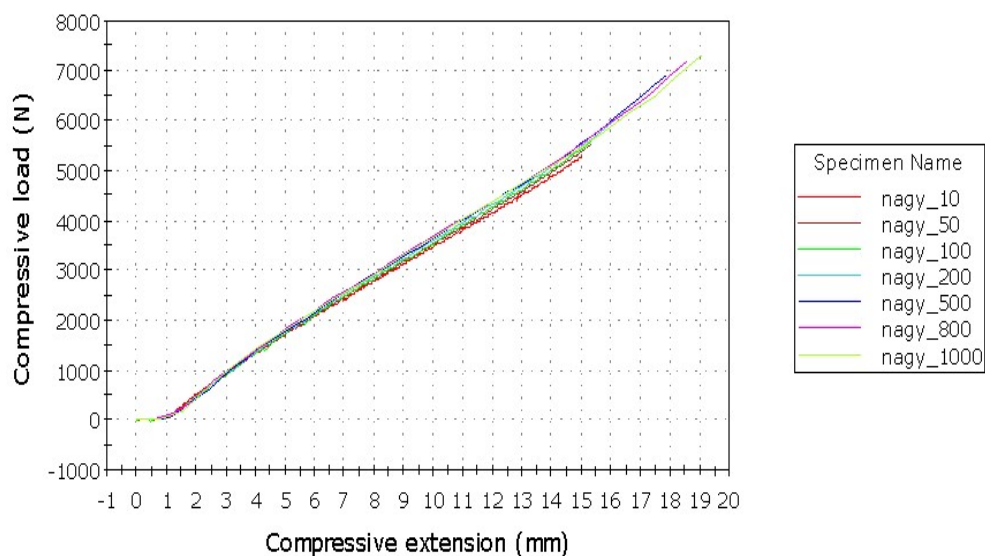
A nyomóvizsgálatra egy INSTRON 7784 típusú szervo-hidraulikus, biaxiális anyagvizsgáló gép állt rendelkezésre (3. *ábra*). A nyomóvizsgálatot szobahőmérsékleten végeztük 20 mm összenyomódásig. A nyomás sebessége a gép teljesítménye alapján $v = 1 - 1000 \text{ mm / min}$ intervallumban választható meg.



3. *ábra.* Képek a laboratóriumi vizsgálatról

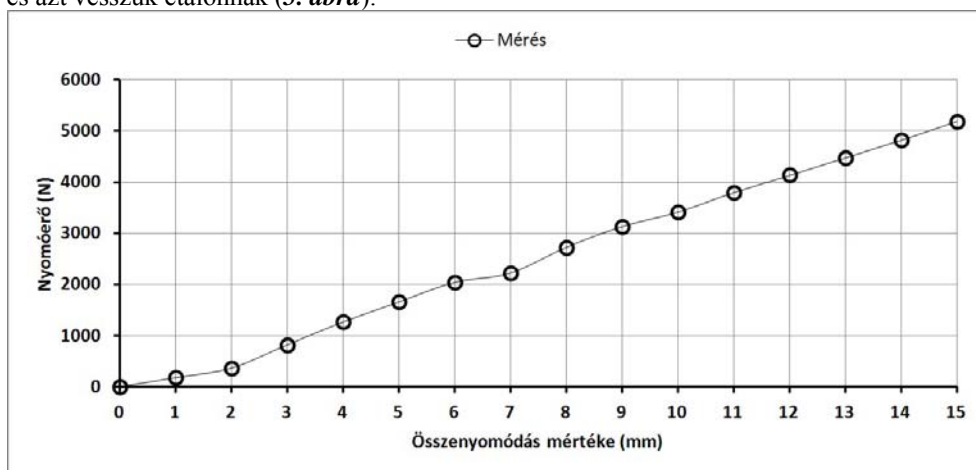
A felső határ már nagyon kihasználja a gépet, így a méréseket a következő sebességértékeknél értékeltük ki:

$$v\left(\frac{\text{mm}}{\text{min}}\right) = [10; 50; 100; 200; 500; 800].$$



4. *ábra.* Mérési eredmények különböző nyomás sebességekre

A **4. ábrából** jól látható, hogy a karakterisztikát nem befolyásolja nagymértékben a nyomás sebessége, így a különböző sebességértékeknél mért karakterisztikákból átlagot számolunk és azt vesszük etalonnak (**5. ábra**).



5. ábra. A mérésekből meghatározott átlagos rugó karakterisztika

Mind a szoftverhez, mind pedig a végeselemes programhoz szükségünk van az anyagállandókra. A nyomóvizsgálat kiértékelését a Mooney-Rivlin anyagmodellre végezzük, ahol a két anyagállandó μ_{10} és μ_{01} . A szakirodalom az anyagállandók megválasztására ugyan javasol értékeket a vizsgált gumi Shore A keménységének függvényében [5], de csak tájékoztató adatként szabad felhasználni, ugyanis a paraméterek más-más igénybevételre, más-más gumigeometriából kerültek meghatározásra. Mivel a gumibak Shore-féle keménységmérése olcsó és egyszerűen kezelhető eljárás, így a gumibakon az MSZ ISO 868:1991 szabvány alkalmazásával és az eredmények az anyagvizsgálat statisztikai módszerével történő kiértékelése után meghatároztuk a gumibak keménységét, amely $ShA 66^\circ$ értékre adódott [15]. Az [5] számos mérésre alapozva adja meg a javasolt anyagállandókat a Shore keménység függvényében, amelyet a továbbiakban felhasználunk.

4.2. A gumibak nyomóvizsgálata végeelem-módszerrel

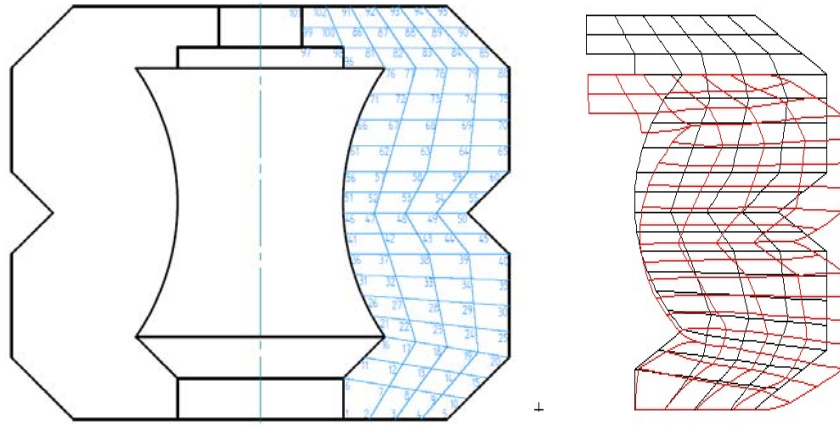
A gumibak végeselemes input adatait a 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat. A vizsgált gumibak jellemző adatai

Gumibak méretei	a mért geometria
Végeelem típusa	kilenc csomópontú izoparametrikus elem
Büntetőparaméter (κ)	1000
Előírt elmozdulás	15 mm
Teherlépcső	1,5 mm
Iteráció száma teherlépcsőnként	10
Shore A keménység	$ShA 66^\circ$
Peremfeltétel	két fémlap közé vulkanizált

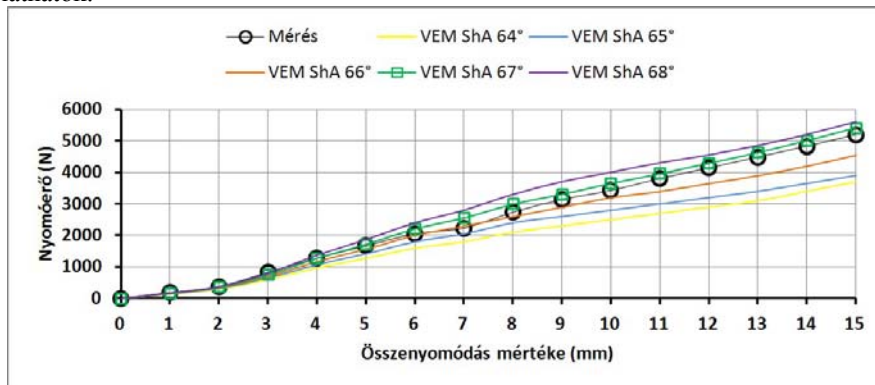
A futtatáshoz szükségünk van a Mooney-Rivlin anyagállandókra. Kiindulásnak [5] szerint megadott értékeket alkalmazunk. Ennek leellenőrzése és hibavizsgálata elengedhetetlen, így a továbbiakban az eredmények kiértékelését és hibaanalízisét is elvégezzük.

Az **6. ábra** a végeselemes felosztást és egy futási eredményt ábrázol.



6. ábra. A gumibak végeselemes felosztása és egy futási eredmény

Öt különböző keménységértékhez tartozó anyagállandóval futatott eredmények a **7. ábrán** láthatók.

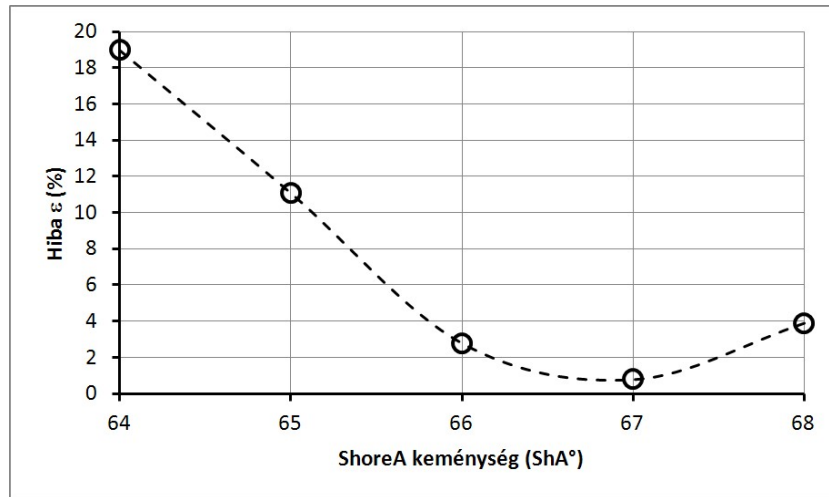


7. ábra. A végeselemes programmal előállított rugókarakterisztikák

Az [5] által a Shore keménységértékekhez javasolt anyagállandókkal meghatározott karakterisztikákból jól látható, hogy közelítik a mérési eredményeket, de szükséges meghatározni a hiba mértékét, amelyet a diszkrét pontpároknál négyzetes összefüggéssel adunk meg,

$$\varepsilon(\%) = \frac{\sum_{i=1}^n (F'_i - F_i)^2 \cdot \Delta x_i^2}{W^2} \cdot 100, \quad (24)$$

ahol ε a hiba, az F'_i a mért, F_i a program által számolt karakterisztikák teherlépcsők szerinti erő értékei, n a teherlépcsők száma, Δx_i az összenyomódás növekmények, W a mért rugó karakterisztika alatti terület nagysága, azaz a gumirugón végzett munka.

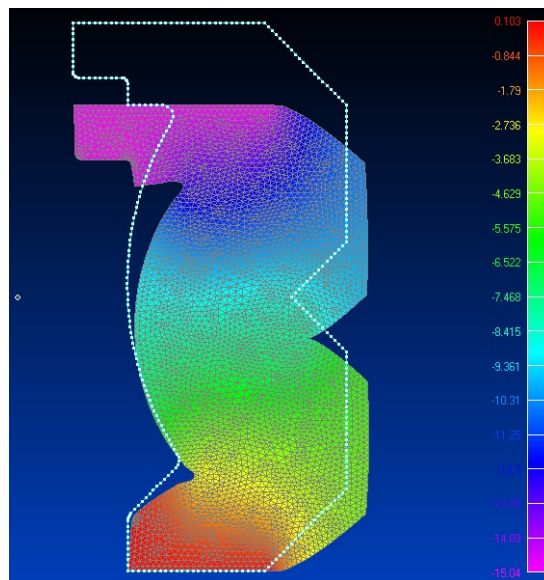


8. ábra. A hibaelemzés eredménye

A 8. ábrából kiolvasható, hogy a hiba minimális értékét a ShA 67° esetén kapjuk, amelyre a javasolt Mooney-Rivlin állandók [5] alapján

$$\mu_{10} = 0,64 \quad \mu_{01} = 0,16 .$$

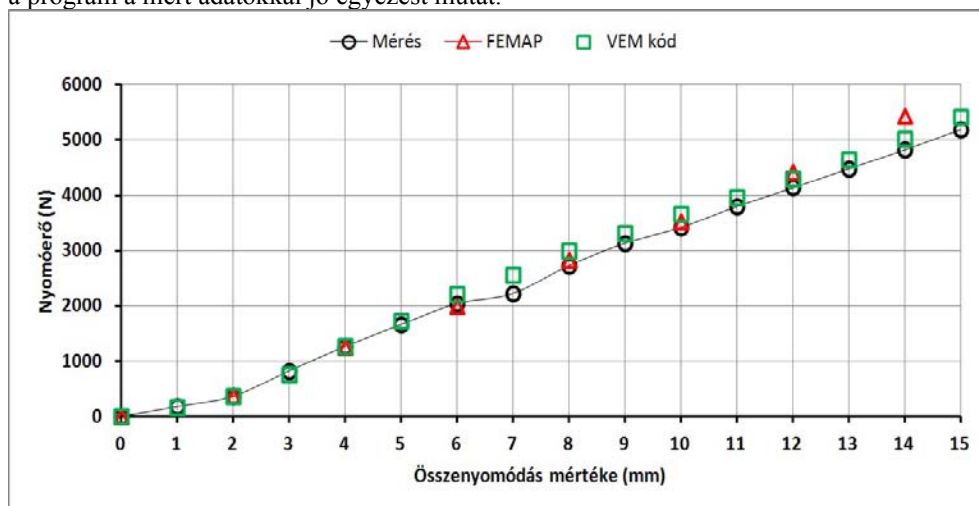
A FEMAP végelem szoftver NX NASTRAN Advanced Nonlinear megoldó modulja alkalmas gumik végeleemes vizsgálatára. A szoftverben is a végeleemes program paramétereit használtuk az összehasonlító vizsgálat során, amelynek eredménye a 9. ábrán látható.



9. ábra. A végeleemes futás eredménye

4.3. A mérési- és számítási eredmények összehasonlítása

Az eredményeket összevetve az tapasztalható (10. ábra), hogy mind a szoftver, mind pedig a program a mért adatokkal jó egyezést mutat.



10. ábra. Az összehasonlító vizsgálat eredménye

Ez alapján megállapíthatjuk, hogy a saját fejlesztésű program alkalmas tengelyszimmetrikus gumialkatrészek végeeselemes vizsgálatához.

5. Összefoglalás

Gumialkatrészek vizsgálatára egy folytonos elmozdulásmezőre alapozott végeeselemes programot dolgoztunk ki nagy alakváltozásra majdnem összenyomhatatlan anyagot feltételezve. A gumik végeeselemes vizsgálatához a vegyes mezők módszerét egy hárommezős funkcionálra alapoztuk. Ennek során az elmozdulásmezőt folytonosan, a térfogatváltozást és a hidrosztatikus nyomást nemfolytonosan egymástól függetlenül közelítjük. A kifejlesztett végeeselemes programot méréssel és egy kereskedelmi szoftverrel hitelesítettük. A vizsgálatok során megállapítást nyert, hogy az eredmények jó egyezést mutatnak, így a program alkalmas tengelyszimmetrikus gumik numerikus vizsgálatára.

6. Köszönetnyilvánítás

A tanulmány a TÁMOP-4.2.2.B-10/1-2010-0008 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

7. Irodalom

- [1] Bonet, J., Wood, R.D.: *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, Cambridge University Press, 1997.

- [2] Kozák, I.: *Kontinuummechanika*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1995.
- [3] Ogden, R.W.: *Nonlinear Elasticity with Application to Material Modelling*, AMAS Lecture Notes, 2003.
- [4] Ogden, R.W., Saccomandi, G., Sgura, I.: *Fitting Hyperelastic Models to Experimental Data*, Computational Mechanics, 34(6): pp.484-502, 2004.
- [5] Altidis, P., Warner, B.: *Analyzing Hyperelastic Materials*, IMPACT Engineering Solutions, 2005.
- [6] Zienkiewicz, O.C., Qu, S., Taylor, R.L., Nakazawa, S.: *The Patch Test for Mixed Formulations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23: pp.1873-1883, 1986.
- [7] Sussman, T., Bathe, K.J.: *A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and Inelastic Analysis*, Computers&Structures, 26(1-2): pp.357-409, 1987.
- [8] Simo, J.C., Taylor, R.L.: *Quasi-incompressible Finite Elasticity in Principal Stretches*, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 85: pp.273-310, 1991.
- [9] Szabó, B.A., Babuska, I., Chayapathy, B.K.: *Stress Computation for Nearly Incompressible Materials by the p-version of the Finite Element Method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28: pp.2175-2190, 1989.
- [10] Nándori, F., Páczelt, I., Szabó, T.: *Analysis of Incompressible Materials with p-version Finite Elements*, microCAD'2003, Hungary, 2003.
- [11] Babuska, I., Suri, M.: *Locking Effects in the Finite Element Approximation of Elasticity Problems*, Numerische Mathematik, 62: pp.439-463, 1992.
- [12] Suri, M.: *Analytical and Computational Assessment of Locking in the hp Finite Element Method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 133(3-4): pp.347-371, 1996.
- [13] Bathe, K.J.: *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1996.
- [14] Páczelt, I.: *Végeselem-módszer a mérnöki gyakorlatban*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1999.
- [15] Szabó, G., Mankovits, T.: *Gumialkatrész Shore-féle keménységének kiértékelése az anyagvizsgálatok statisztikai módszerével*, Debreceni Műszaki Közlemények, 9(1): pp.52-63, 2010.