Multidiszciplináris tudományok, 10. kötet. (2020) 4 sz. pp. 149-161 **https://doi.org/10.35925/j.multi.2020.4.19**

SPIN-PÁLYA KORREKCIÓK A KOMPAKT KETTŐS RENDSZEREK MOZGÁSÁNAK LEÍRÁSÁBAN I. – A VEKTOROK LEÍRÁSA EULER-SZÖGEKKEL

Majár János
egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Fizikai és Elektrotechnikai Intézet, Fizikai Tanszék
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: fizmajar@uni-miskolc.hu

Pszota Gábor
egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Fizikai és Elektrotechnikai Intézet, Fizikai Tanszék
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: fizpszo@uni-miskolc.hu

Absztrakt
A Gravitációs hullámok kutatásában kiemelt szerepe van a kompakt objektumok által alkotott kettős rendszereknek, mivel az általuk kibocsátott, és a földfelszíni detektorokban érzékelhető jelalakjuk széles paramétertartományban nagy pontossággal leírható. Munkánk során a mozgás leírásában igyekeztünk minden releváns effektust figyelembe venni, kiemelten kezelve a pálya excentricitását és a testek forgásának hatásait. A korábbi kutatásainkban a mozgást leíró szögmennyiségeket a lehető legegyszerűbben fejtettük sorba az alkalmazott poszt-newtoni közelítésben, ez azonban divergens járulékokhoz vezetett. Ennek megoldására egy összetettebb (amplitúdó és frekvencia) sorfejtést alkalmazunk, viszont ehhez ki kell fejeznünk a releváns vektor-mennyiségeket a választott szögmennyiségekkel, és származtatni kell a mozgásegyenleteket. Célkitűzés továbbá a korábbi, alapanyagként használt publikációk hibáinak feltárása, javítása.

Kulcsszavak: *általános relativitáselmélet, gravitációs hullámok, kompakt kettős rendszerek, poszt-newtoni sorfejtés, Euler-szögek*

Abstract
In the research of gravitational waves, the binary systems formed by compact objects have a special role, since the waveform emitted by them, and detectable in ground-based detectors, can be described with high accuracy over a wide range of parameters. In the course of our work, we tried to take into account all the relevant effects in the description of the motion, focusing on the treatment of the eccentricity of the orbit and the effects of the spin of the bodies. In our previous research, we wrote out the series expansion of the angular quantities describing the motion as simply as possible in the post-Newtonian approximation we used, but this led to divergent contributions. To solve this problem we are using a more complex (amplitude and frequency) series expansion, but for this we need to express the relevant vector quantities with the chosen angular quantities, and calculate the equations of motion. The aim is also to explore and correct the errors of previous publications that we used as starting material.

Keywords: *general relativity, gravitational waves, compact binary system, post-newtonian approximation, Euler angles*

1. Bevezetés

A gravitációs hullámok kutatása új szakaszba érkezett 2015-ben, az első közvetlen észleléssel [1], amelyet a LIGO gravitációshullám-detektorokkal sikerült elérni. Az elmúlt években több további forrásból is detektáltak gravitációs hullámokat, és vannak már a Virgo által is visszaigazolt észlelések, illetve sikerült elektromágneses megfigyelésekkel is összhangba hozni az eredményeket (ahol van elektromágneses jel is) [2-5].

Ez nem csupán az Általános Relativitáselmélet újabb közvetlen bizonyítéka (a gravitációs hullámok létezését Einstein feltételezte, amikor az egyenletének megoldását kereste a sík Minkowski téridő körüli kis perturbációkként), hanem egy újfajta eszközt is kaptunk a világegyetem megismeréséhez. Ugyanis a gravitációs hullámok segítségével olyan objektumokat és jelenségeket ismerhetünk meg, amelyek az elektromágneses sugárzások segítségével nem érzékelhetőek. A cél tehát az, hogy az első detektálásokra alapozva megszülethessen a gravitációs hullám csillagászat.

A kompakt asztrofizikai objektumok (jellemzően neutroncsillagok és fekete lyukak) által alkotott kettős rendszerek kétféleképpen is jellegzetes gravitációs hullám forrást alkothatnak.

Az egyik esetben a két objektum kvázi-hiperbolikus pályán elszóródik egymáson, eközben egy jellegzetes hullámformát bocsátanak ki, amelyek jó közelítéssel leírhatóak. Ezek a jelek azonban ritkán érzékelhetőek, mivel a két objektum általában nem kerül elég közel egymáshoz ahhoz, hogy a Föld felszínén is detektálható jelalakot produkáljanak. Ennek ellenére ennek a forrásnak a jelentősége nem elhanyagolható [6].

A másik esetben a két objektum kötött rendszert alkot, és ellipszis-pályán mozognak egymás körül. Eközben a gravitációs sugárzás hatására a dinamikai mennyiségek veszteséget szenvednek el, ami miatt a pályák mérete és excentricitása is csökken. Végül a két objektum összeolvad, miközben jellegzetes „chirp” jelet bocsátanak ki gravitációs hullámok formájában (a „chirp” jel egyre növekvő amplitúdójú és frekvenciájú jelet jelent). Az összeolvadási folyamat „közelítési” szakaszára nagy pontosságú leírással rendelkezünk (mind a kettősrendszer mozgására, mind a kibocsátott gravitációs hullámokra vonatkozóan), az „összeolvadást” több numerikus szimuláció is sikeresen modellezi, a „lecsengő” szakaszban pedig ismét közelítő, analitikus módszerek állnak rendelkezésünkre.

Érdemes kiemelni a két eset kombinációját is, amelyeket a „zoom-whirl orbit” jelzővel szoktunk meghatározni. Ezeknél az eseteknél a két test kvázi-hiperbolikus, vagy kvázi-parabolikus pályán közelít egymáshoz, de a sugárzási veszteség akkora, hogy annak hatására a dinamikai mennyiségek elegendő veszteséget szenvednek ahhoz, hogy kötött pálya alakuljon ki. Ezek bár meglehetősen ritka események, a jelalakok sajátosságai miatt a detektálhatóságuk várhatóan nagy lesz.

1.1. A kettősrendszer által kibocsátott hullámforma kiszámításának módszerei

Az alábbiakban a kötött pályán mozgó kettős rendszerek mozgásának leírásával fogunk foglalkozni. Ebben az esetben összetettebb módszereket kell alkalmaznunk, lévén a kettősrendszert tovább követjük nyomon, így a matematikai leírás rövid távú, nagy pontosságát hosszú távon is tudnunk kell biztosítani, miközben a sugárzási veszteség miatt az alapvető dinamikai mennyiségek (és így a mozgás tulajdonságai) folyamatosan változnak.

A távlati célkitűzés a kettősrendszer által kibocsátott gravitációs hullám jelalakok meghatározása a „közeledési” szakaszban [7,8]. Ehhez a távoli hullámforrás által kibocsátott jelalakra vonatkozó multipol-sorfejtést (poszt-Minkowski sorfejtés) és a forrást alkotó kettősrendszer mozgását leíró posztnewtoni sorfejtést kell megfelelően összeillesztenünk egy köztes tartományon [9]. Ezt „terjesztjük el” a detektorig, megkapva a keresett jóslatot a detektor által érzékelhető jelalakra vonatkozóan.

A detektor által érzékelt jelalakot egy $h(t)$ hullámfüggvénnyel szoktuk leírni. A mérés alapjául szolgáló interferométer esetén ez a $h(t)$ függvény lényegében úgy viselkedik, mint az interferométer relatív karhossz-változása (bár a mögötte meghúzódó fizikai effektus más). Ezt szokták az alábbi kifejezéssel leírni:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{h(t)}{2}. \tag{1}$$

A detektálható jelalak két polarizációs állapot kombinációjaként áll elő. Ez a két függvény a „plusz” polarizációs állapot, vagyis $h_+(t)$, illetve a „kereszt” polarizáció, amelynek jelölése $h_\times(t)$. Ezekkel

$$h(t) = F_+(\alpha,\beta,\xi)h_+(t) + F_\times(\alpha,\beta,\xi)h_\times(t), \tag{2}$$

ahol α és β a forrás (detektorhoz képesti) helyének polárkoordinátái, ξ pedig a polarizációs szög. Az $F_+(\alpha,\beta,\xi)$ és $F_\times(\alpha,\beta,\xi)$ függvények konkrét alakja függ attól, hogy milyen geometriájú a detektor-elrendezés.

A két polarizációs állapot egy projektálás segítségével határozható meg a téridő (sík Minkowski téridőhöz viszonyított) perturbációit leíró tenzor TT (transzverzális, spúrtalan) mértékben megadott alakjából. Ezt a tenzort $h_{TT}^{ij}(t)$ jelöléssel látjuk el, és a fent említett illesztett módszer ennek a komponenseit adja meg a mozgást leíró mennyiségek függvényében. A projektálás lényegi eleme, hogy az köti össze a kettősrendszer pályasíkjának irányát a detektor karjainak irányával – vagyis számot ad a pálya elmozdulásáról, és a detektor mozgásáról egyaránt.

1.2. A poszt-newtoni sorfejtés

Mint korábban jeleztük, a hullámformák leírása egy, a kettősrendszer mozgását leíró sorfejtésen alapul, ezt nevezzük poszt-newtoni sorfejtésnek. Ahhoz, hogy a módszer konvergáljon, három feltételnek kell teljesülnie. Az objektumok v sebességének négyzete (a c vákuumbeli fénysebesség négyzetéhez képest), a sűrűséghez viszonyított feszültségtenzor, illetve az M tömegű forrás gravitációs potenciáljának helyi értéke (GM/ac^2, ahol M a forrás tömege, a a forrás jellemző kiterjedése, G pedig a gravitációs állandó) egynél jóval kisebb paraméterek. Ezek maximumát választjuk az úgynevezett poszt-newtoni paraméternek, és eszerint végezzük el a sorfejtést.

A kettősrendszer életének közeledési szakaszában egy poszt-newtoni (röviden PN) rend egy $(v/c)^2$ nagyságrendet jelent. Lévén a gravitációs potenciált tartalmazó tagokban is rendre megjelenik az $1/c$ szorzófaktor, elmondható, hogy formálisan egy $1/c$ szerinti sorfejtést kapunk, ahol egy nagyságrendet jelöl az $(1/c)^2$ faktor.

Mivel a hullámformát meghatározó kifejezésekbe behelyettesítjük a mozgás poszt-newtoni sorfejtéssel megadott tagjait, és az $1/c$ faktor a $h_{TT}^{ij}(t)$ tenzor komponenseiben is ugyanolyan logika mentén jelenik meg, a hullámforma-jóslatok összefüggései is ugyanezen sorfejtésnek feleltethetőek meg.

A továbbiakban áttérünk a $c = G = 1$ mértékegységrendszerre. Ekkor a PN rendek követése összetettebbé válik, de általában elmondható, hogy minden v^2 és M/r faktor 1PN rendet jelent. A mozgás relativisztikus leírásában a poszt-newtoni korrekciók egész rendeknél jelennek meg (vannak olyan jelenségek, amelyek „feles”, vagy „félegész” rendű korrekciókat hoznak a leírásba, például a vizsgált spin-pálya kölcsönhatás 1,5PN rendű korrekció). Az egyes mennyiségeket leíró összefüggésekben a legalacsonyabb rendű kifejezéseket '*N*' alsó index-szel, a korrekciókat pedig a megfelelő poszt-newtoni rend alsó index-be írásával jelöljük.

A detektálható jelalak esetében a korrekciók fél PN rendenként jelennek meg (formálisan mindegyik egy $1/c$ faktort jelent) a multipol-sorfejtésben a legalacsonyabb rendű, $h_N(t)$ -vel jelölt kifejezéshez képest. Lévén a mozgás leírását is rendről rendre végezzük el, ezek behelyettesítése is magasabb rendű járulékokhoz vezet. Vezessük be az alábbi jelölést, ahol jelöljük a mozgás leírásának mennyiségeinél, és a hullámforma esetén is a különböző poszt-newtoni rendeket:

$$\vec{r} = \vec{r}_N + \vec{r}_{1PN} + \vec{r}_{2PN} + \ldots \qquad \vec{v} = \vec{v}_N + \vec{v}_{1PN} + \vec{v}_{2PN} + \ldots$$
$$h(t) = h_N(t) + h_{0,5PN}(t) + h_{1PN}(t) + h_{1,5PN}(t) + \ldots \tag{3}$$

ahol $\vec{r}$ a szeparációs vektor (a két objektumot összekötő vektor), és $\vec{v}$ a relatív sebességvektor (a két test egymáshoz képesti mozgásának sebessége).

Fontos azonban figyelembe vennünk, hogy a hullámfüggvényre vonatkozó összefüggéseink impliciten tartalmazzák az időt, a szeparációs vektoron, a relatív sebességen és néhány más mennyiségen keresztül, amelyek szintén ki vannak fejtve PN rendenként. Így korrekten elvégezve a sorfejtést, és összerendezve a megfelelő rendhez tartozó tagokat, azt kapjuk például, hogy az 1PN rendű hullámforma korrekció az alábbi módon áll elő:

$$h(t)\big|_{1PN} = h_{1PN}\left(\vec{r}_N(t), \vec{v}_N(t)\right) + h_N\left(\vec{r}_{1PN}(t), \vec{v}_{1PN}(t)\right). \tag{4}$$

Mint korábban említettük, a gravitációs sugárzás hatására az egyes mozgásállandók változni kezdenek vagyis csökkenni fog az energia és az impulzusmomentum, és ennek hatására a pálya mérete monoton csökkenni kezd, a sebesség pedig monoton növekszik. Ez a jelenség 2,5PN rendben jelenik meg, vagyis nagyon kis perturbáció, viszont hosszú távon ez határozza meg a hullámforma viselkedését (a többi korrekció korlátos hatást gyakorol a hullámformára), ez hozza létre a jellegzetes „chirp" jellegű jelalakokat.

1.3. A testek forgása a poszt-newtoni közelítésben

Az általunk vizsgált jelenségek, amelyek az egyes objektumok forgásából származnak, szintén megjelennek a mozgás leírásában, és természetesen a hullámforma-kifejezésekben is. A mozgás leírásában a spin-pálya kölcsönhatás 1,5PN rendben, a spin-spin kölcsönhatás 2PN rendben jelenik meg. Továbbá, ide tartozik még a kvadrupol-monopol kölcsönhatás, amely 2PN rendű korrekció. A multipol-sorfejtésben a spin-pálya kölcsönhatás legalacsonyabb rendje 1PN, a spin-spin és a kvarupol-monopol kölcsönhatás pedig 2PN rendben jelenik meg először. A három kölcsönhatás járulékai a megjelenésük után minden fél rendben adnak további járulékokat.

Az egyes összefüggésekben a spin-pálya kölcsönhatás korrekcióit SO index-szel jelöljük.

Fontos kiemelni, hogy a testek forgása akkor vezethető be konzisztensen a poszt-newtoni formalizmusba, ha az egyes testek forgását leíró $\vec{S}_i$ spin-vektorokra igaz, hogy nagyságuk legfeljebb fél poszt-newtoni rendben jelenik meg a perturbálatlan, úgynevezett Newtoni pálya-impulzusmomentum (jelölése $\vec{L}_N$) nagyságához képest, vagyis

$$\frac{S_i}{L_N} \sim \varepsilon^{0,5} . \tag{5}$$

A testek forgásának hatásai nagyon fontosak a kettősrendszer leírásában, amellett, hogy azt nagyban meg is bonyolítják. Ugyanis a spineknek köszönhetően a pálya síkja precesszálni kezd, ráadásul változó körfrekvenciával és nyílásszöggel. Sőt, a spin-vektorok maguk is precesszálnak, már a spin-pálya kölcsönhatásnak köszönhetően is.

1.4. A cikk célkitűzései

Korábbi munkáinkban a bevezetett szögmennyiségeket, illetve azok szögfüggvényeit egyszerű Taylor-sorba fejtettük [7]. Azonban a szögekre vonatkozó kifejezésekben felléptek nem korlátos perturbációk is (egyszerű frekvencia-korrekciókon keresztül), amelyek a korlátos szögfüggvények sorba fejtésekor divergens járulékokhoz vezettek. Ezek rövid távon nem okoznak problémát, azonban cél az eredményeinket sok ezer körülfordulás esetére is érvényesnek megtartani, hiszen a sugárzási veszteségek csak több perióduson keresztül fejtik ki érdemben hatásukat.

Ehelyett vezettünk be egy összetettebb, vegyes amplitúdó és frekvencia-sorfejtést [8], amellyel a fenti probléma kezelhetővé válik, és a kiszámolt hullámformák sok ezer körülfordulás során is érvényesek lesznek.

Mivel a meghatározó vektor-mennyiségek és mozgásegyenletei származtatása során támaszkodtunk az egyszerű sorfejtés eredményeire [7], így ezeket a számolásokat újra el kell végeznünk.
A cikkben bemutatjuk a mozgás leírásának alapjait, majd bevezetjük a vektor-irányok jellemzésére használt Euler-szögeket. Megvizsgáljuk, hogy ezek sorfejtése milyen szabályokat követ, majd újraszámoljuk a meghatározó vektormennyiségek komponenseit a megadott koordináta-rendszerekben. Ezen vektorok a szeparációs vektor, a relatív sebességvektor, a testek forgását jellemző spin-vektorok, és a hullámforma projektálása során felhasznált $\vec{N}, \vec{p}, \vec{q}$ vektor-triád.

2. A mozgás leírásának alapjai

2.1. A gyorsulás-vektor

Két, egyenként m_1 és m_2 tömegű kompakt objektum által alkotott kettősrendszer mozgásának leírásában a poszt-newtoni közelítés Lagrange-függvényeit használjuk kiindulópontként. Ebből az alábbi gyorsulás-vektor kifejezéseket kapjuk [10] a kovariáns SSC-ben [11]:

$$\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_{1PN} + \vec{a}_{SO} , \quad \text{ahol} \quad \vec{a}_N = -\frac{m}{r^3}\vec{r} ,$$

$$\vec{a}_{1PN} = \frac{m}{r^3}\left\{\left[(1+3\eta)v^2 - 2(2+\eta)\frac{m}{r} - \frac{3}{2}\eta\dot{r}^2\right]\vec{r} - 2(2-\eta)\dot{r}\,r\,\vec{v}\right\}, \tag{6}$$

$$\vec{a}_{SO} = \frac{1}{r^5}\left\{6(\vec{r}\times\vec{v})\cdot\left(\vec{S}+\vec{\sigma}\right)\vec{r} - r^2\vec{v}\times\left(4\vec{S}+3\vec{\sigma}\right) + 3\dot{r}\,r\left[\vec{r}\times\left(2\vec{S}+\vec{\sigma}\right)\right]\right\}.$$

Az összefüggésekben a következő jelöléseket használtuk: m a rendszer teljes tömege, vagyis $m = m_1 + m_2$, μ a redukált tömeg, amelyre $\mu = m_1 m_2 / m$, illetve $\eta = \mu / m$. A két test relatív sebességét jelöljük $\vec{v}$-vel, az $\vec{r}$ pedig a szeparációs vektor. A két test forgását az $\vec{S}_1$ és $\vec{S}_2$ spinvektorokkal jellemezzük, és használjuk az $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ teljes spin vektor és a $\vec{\sigma} = \varsigma_1 \vec{S}_1 + \varsigma_2 \vec{S}_2$ tömeggel súlyozott spinvektort ($\varsigma_1 = m_2 / m_1$, $\varsigma_2 = m_1 / m_2$), rövidítésképpen.

A Lagrange-függvényekből, illetve a gyorsulásvektorból általában a relatív sebességvektort, illetve a szeparációs vektor hosszának deriváltját szokás kiszámolni. Azonban a hullámformák leírásához szükségünk van a térbeli elhelyezkedést és a dinamika irányjellemzőinek változását leíró szögmennyiségek származtatására is.

2.2. A mozgás leírásához használt koordináta-rendszerek

A gravitációs hullámok leírásában kritikus szerepe van a pályasíknak, amit a rá merőleges pálya-impulzusmomentummal és a szeparációs vektorral jellemezhetünk. Ezen felül szükségünk lesz egy „álló" koordináta-rendszerre, amelyben a mozgásegyenleteket származtathatjuk. Lévén a testek forgásának a hatásait vizsgáljuk, ezen koordináta-rendszert érdemes a teljes impulzusmomentum vektorhoz rögzíteni. Mindennek részletezéséhez szükségünk van ezen mennyiségek pontos alakjára, figyelembe véve az összes lehetséges poszt-newtoni korrekciót.

A pálya-impulzusmomentum, vagy más néven a newtoni impulzusmomentum alakja $\vec{L}_N = \mu \vec{r} \times \vec{v}$. A teljes impulzusmomentum-vektor pedig (ami a mozgás egyik mozgásállandója 2PN renddel bezáróan)

$$\vec{J} = \vec{L}_N + \vec{L}_{PN} + \vec{L}_{SO} + \vec{S}\,, \tag{7}$$

ahol

$$\vec{L}_{PN} = \vec{L}_N \left[\frac{1-3\eta}{2} v^2 + \left(3+\eta\right) \frac{m}{r} \right], \qquad \vec{L}_{SO} = \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \left[\vec{r} \times \left(2\vec{S} + \vec{\sigma} \right) \right] - \frac{\eta}{2} \left[\vec{v} \times \left(\vec{v} \times \vec{\sigma} \right) \right], \tag{8}$$

illetve ismét

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2\,. \tag{9}$$

A releváns vektor-mennyiségéket így két koordináta-rendszerben írjuk le.

Az egyik a $\vec{J}$ teljes impulzusmomentumhoz rögzített, úgynevezett **invariáns koordináta-rendszer**, amelyben a deriválásokat és integrálásokat végezzük majd el. Ennek 'z' tengelye mutat a teljes impulzusmomentum vektor irányába.

A gravitációs hullámok polarizációs állapotainak leírásához vezetjük be a pálya-impulzusmomentumhoz rögzített **együtt-mozgó koordináta-rendszert**. Ebben a koordináta-rendszerben $\vec{L}_N$ jelöli ki a 'z' irányt, az 'x' koordináta-tengely irányát pedig az $\vec{r}$ szeparációs vektorhoz rögzítjük.

2.3. Az Euler-szögek bevezetése

A mozgás leírásához Euler-szögeket vezetünk be, amelyekkel a két test relatív helyvektorát az invariáns rendszerben az alábbi módon adjuk meg, Euler-szögekkel:

$$\vec{r}_{inv} = r\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \cos\iota\sin\phi\sin\psi \\ \sin\phi\cos\psi + \cos\iota\cos\phi\sin\psi \\ \sin\iota\sin\psi \end{pmatrix}, \tag{10}$$

ahol ι a két impulzusmomentum ($\vec{J}$ és $\vec{L}_N$) által bezárt szög, ϕ írja le a pálya-precessziót (vagyis a pályasík és a $\vec{J}$ -re merőleges sík metszetének egy adott referencia-irányhoz mért szögét és annak változását), és ψ írja le a testek mozgását a pályasíkon.

Az Euler-szögek használatának a mozgás leírásában a fő motivációja az, hogy ezek segítségével a pálya-precesszió, és a pályán történő mozgás jobban különválasztható. Mivel a pálya precessziójáért a spin-hatások felelősek, a forgást elhanyagoló modellekben a fenti három szögmennyiség helyett elegendő egyetlen szöget használni.

Általánosságban igaz, hogy bármely vektor komponensei megadhatóak az invariáns rendszerben (ezt a vektor 'inv' indexével jelöljük), ha ismerjük a komponenseket az együtt-mozgó rendszerben (ezt 'co' alsó index-szel jelöljük) az alábbi transzformáció segítségével:

$$\vec{V}_{inv} = O_z(\phi)O_x(\iota)O_z(\psi)\vec{V}_{co}, \tag{11}$$

ahol az adott tengely körüli megadott szögű forgatásokat egyszerű forgatásmátrixokkal írjuk le, vagyis például $O_z(\psi)$ jelöli a 'z' tengely körüli, ψ szögű elforgatás mátrixát. Az ellentétes irányú áttéréshez a fenti transzformáció inverzét használjuk, vagyis

$$\vec{V}_{co} = O_z(-\psi)O_x(-\iota)O_z(-\phi)\vec{V}_{inv}. \tag{12}$$

Az Euler-szögek kiválasztásának van egy nehézsége. A poszt-newtoni sorfejtés során a pálya-precesszió a spin-pálya kölcsönhatásnak megfelelő rendben (1,5PN) jelenik meg, vagyis a ι szög esetében 0 körüli sorfejtést kell majd elvégeznünk.

2.4. A relatív sebességvektor

Azonban először a relatív sebességvektor komponenseit számoljuk ki, ami az invariáns rendszerben időderiválással kapható meg, vagyis

$$\begin{aligned}\vec{v}_{inv} = \dot{\vec{r}}_{inv} = \dot{r}\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \cos\iota\sin\phi\sin\psi \\ \sin\phi\cos\psi + \cos\iota\cos\phi\sin\psi \\ \sin\iota\sin\psi \end{pmatrix} + r\dot{\phi}\begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\psi - \cos\iota\cos\phi\sin\psi \\ \cos\phi\cos\psi - \cos\iota\sin\phi\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + r\dot{\psi}\begin{pmatrix} -\cos\phi\sin\psi - \cos\iota\sin\phi\cos\psi \\ -\sin\phi\sin\psi + \cos\iota\cos\phi\cos\psi \\ \sin\iota\cos\psi \end{pmatrix} + r\sin\psi\dot{\iota}\begin{pmatrix} \sin\iota\sin\phi \\ -\sin\iota\cos\phi \\ \cos\iota \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{13}$$

A vektor komponenseit áttranszformálva az együtt-mozgó rendszerbe az alábbi eredményt kapjuk

$$\vec{v}_{co} = \dot{r}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\dot{\phi}\begin{pmatrix}0\\ \cos\iota\\ -\sin\iota\cos\psi\end{pmatrix} + r\dot{\psi}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r\dot{\iota}\sin\psi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{r}\\ r(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\iota)\\ -r\dot{\phi}\sin\iota\cos\psi + r\dot{\iota}\sin\psi\end{pmatrix}. \quad (14)$$

Ennek azonban látható problémája, hogy nem merőleges a ‘z’ irányt meghatározó $\vec{L}_N$ vektorra, pedig annak definíciója alapján merőlegesnek kellene lennie.

A kérdés tisztázására végezzük el a fenti folyamatot gömbi polár koordináta-rendszerben! Válaszszuk úgy a θ és φ szögeket, hogy a szeparációs vektor az invariáns rendszerben

$$\vec{r}_{inv} = r\begin{pmatrix}\cos\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} \quad (15)$$

legyen! Ez azt jelenti, hogy bármely vektor az alábbi módon transzformálható az együtt-mozgó rendszerből az invariáns rendszerbe:

$$\vec{V}_{inv} = O_z(\theta)O_y(90° - \varphi)\vec{V}_{co}, \quad (16)$$

illetve ennek inverze

$$\vec{V}_{co} = O_y(\varphi - 90°)O_z(-\theta)\vec{V}_{inv}. \quad (17)$$

Ezek felhasználásával az $\vec{r}_{inv}$ vektort deriválva, majd áttérve az együtt-mozgó rendszerbe a sebességvektor komponensei

$$\vec{v}_{co} = \begin{pmatrix}\dot{r}\\ r\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\sin^2\varphi}\\ 0\end{pmatrix}. \quad (18)$$

lesznek. Jól látható, hogy a harmadik komponens itt nulla lesz, vagyis relatív sebességvektor valóban merőleges a pálya-impulzusmomentumra.

A látszólagos ellentmondás feloldása abban áll, hogy mivel egy térbeli irány jellemzésére három (Euler-) szöget vezettünk be, ezek között léteznie kell egy kényszerfeltételnek. Ezen kényszerfeltételből vezethető le a

$$-\dot{\phi}\sin\iota\cos\psi + \dot{\iota}\,\sin\psi = 0 \quad (19)$$

feltétel, amely felhasználásával a sebességvektor az együtt-mozgó rendszerben

$$\vec{v}_{co} = \begin{pmatrix}\dot{r}\\ r(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\iota)\\ 0\end{pmatrix}. \quad (20)$$

alakú lesz, ami már merőleges a pálya-impulzusmomentum vektorára.

Ezek felhasználásával kiszámolhatjuk a pálya-impulzusmomentum vektor komponenseit az együtt-mozgó rendszerben, amelyek közül csak az alábbi nem zérus:

$$L_{Nco,z} = \mu r^2 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \iota) . \tag{21}$$

2.5. A spin-vektorok

Fontos még bevezetnünk a spin-vektorokat jellemző szögeket is. A spinek irányának leírásához egyszerű gömbi polárkoordinátákat (α_i és β_i) használunk, amivel az i-edik spinvektor az invariáns koordináta-rendszerben

$$\vec{S}_{i,inv} = S_i \begin{pmatrix} \cos \beta_i \sin \alpha_i \\ \sin \beta_i \sin \alpha_i \\ \cos \alpha_i \end{pmatrix} \tag{22}$$

lesz, és a rá vonatkozó mozgásegyenlet (a spinprecessziós egyenlet) a vizsgált poszt-newtoni rendig

$$\dot{\vec{S}}_i = \frac{4 + 3\varsigma_i}{2r^3} \vec{J} \times \vec{S}_i . \tag{23}$$

Mivel a spinek nagyságára az a feltétel vonatkozik, hogy azok 0,5PN relatív rendűek a legalacsonyabb rendű impulzusmomentumhoz képest, a spin vektorok a vizsgált poszt-newtoni rendig rendelkeznek egy 0,5PN rendű, és egy 1,5PN rendű taggal [12,13].

3. A ι szög sorfejtése

Mint a bevezetőben jeleztük, a mozgásegyenletek származtatása során ügyelnünk kell az egyes szögmennyiségek sorfejtésére. Ez különösen problémás a ι szög esetén, lévén annak a „nulladrendje” zérus, a pálya-impulzusmomentum és a teljes impulzusmomentum vektorok iránya párhuzamos, ha elhanyagoljuk a spin-pálya kölcsönhatást.

Külön problémát jelent a már említett egyszerű sorfejtés. A ι szög esetében például a szög szinuszának sorfejtésekor kapunk egy időben lineáris korrekciót is. Ez azonban a hosszú időtartamra vonatkozó vizsgálatok során súlyos problémához vezet, a helytelen sorfejtésből származó tagok túlnőnek saját rendjük határain (egy korlátos függvényt közelítettünk lineárissal).

Ahelyett, hogy korlátoznánk a számolásaink érvényességét, nem fejtjük sorba a szögfüggvényeket, hanem egyelőre csak azt vizsgáljuk, hogy a $\sin \iota$ és $\cos \iota$ mennyiségek milyen rendű kifejezések.

A ι szög a pályasíkot meghatározó $\vec{L}_N$, és az invariáns rendszert definiáló $\vec{J}$ teljes impulzusmomentum vektor által bezárt szög. Ez a két impulzusmomentum vektor 1,5PN rendig párhuzamos egymással, beleértve az $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ teljes spinvektor legalacsonyabb rendű (0,5PN) járulékát is.

Azonban 1,5 PN rendben az $\vec{L}_{SO}$ vektoron, a teljes spin-vektor és a mozgáselemek spin-pálya korrekcióin keresztül fellépnek olyan vektor-járulékok, amelyek már nem feltétlenül párhuzamosak a pálya-impulzusmomentummal, így ezek határozzák meg a ι szöget.

Bontsuk fel a teljes impulzusmomentum vektort az alábbi módon:

$$\vec{J} = \vec{J}_{\parallel} + \vec{J}_{SO}, \tag{24}$$

ahol $\vec{J}_{\parallel}$ jelöli azon impulzusmomentum járulékokat, amik mindenképpen párhuzamosak $\vec{L}_N$-val, míg $\vec{J}_{SO}$ tartalmazza azon járulékokat, amik általában nem párhuzamosak vele. Fontos kiemelni, hogy $\vec{J}_{SO}$ csak 1,5PN és annál magasabb rendű korrekciókból áll.

Tekintsük azt a háromszöget, amelynek három oldala $\vec{J}$, $\vec{J}_{\parallel}$ és $\vec{J}_{SO}$! Ebben a háromszögben a ι szög a $\vec{J}$ és $\vec{J}_{\parallel}$ által bezárt szög. Ahhoz, hogy a legáltalánosabb érvényű felső becslést megtegyük, tekintsük azt az esetet, amikor $\vec{J}$ és $\vec{J}_{\parallel}$ hossza megegyezik egymással, vagyis egyenlő szárú háromszöget alkot a három vektor! Ekkor lesz ugyanis rögzített $\vec{J}_{SO}$ esetén maximális a ι szög nagysága. Ebben a háromszögben

$$\sin\frac{\iota}{2} = \frac{J_{SO}}{2J}, \qquad \cos\frac{\iota}{2} = \frac{\sqrt{J^2 - J_{SO}^2}}{J} = \sqrt{1 - \frac{J_{SO}^2}{J^2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{J_{SO}}{J}\right)^2 + o(4{,}5PN), \tag{25}$$

ahol a koszinusz esetében elvégeztük a J_{SO}/J szerinti sorfejtést, figyelembe véve, hogy annak posztnewtoni rendje 1,5PN. Az addíciós tételek alkalmazásával

$$\sin\iota = \frac{J_{SO}}{J} - \frac{1}{2}\left(\frac{J_{SO}}{J}\right)^3 + o(6PN), \qquad \cos\iota = 1 - \frac{5}{4}\left(\frac{J_{SO}}{J}\right)^2 + o(4{,}5PN). \tag{26}$$

A fentiek értelmében az összefüggéseinkben $\sin\iota$-t 1,5PN rendű perturbációként kezeljük majd, illetve jól láthatóan $\cos\iota = 1$ egészen 3PN rendig.

4. A releváns vektormennyiségek kifejezése az Euler-szögekkel

A fenti eredmények felhasználásával kiszámoljuk a releváns vektor-mennyiségek egyes komponenseit Euler-szögek segítségével. Az előző fejezet eredményeit figyelembe véve a kifejezések 2,5PN rendig érvényesek, ami jóval a kitűzött pontosság (1,5PN) felett van.

4.1. A szeparációs vektor, a relatív sebességvektor és a pálya-impulzusmomentum vektor komponensei

A szeparációs vektor Euler-szögekkel megadott komponensei az invariáns koordináta-rendszerben

$$\vec{r}_{inv} = r\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi \\ \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi \\ \sin\iota\sin\psi \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\Upsilon \\ \sin\Upsilon \\ \sin\iota\sin\psi \end{pmatrix} \tag{27}$$

lesznek, ahol bevezettük az $\Upsilon = \phi + \psi$ szöget. Fontos kiemelni, hogy ha nincs a spinek által okozott pálya-precesszió, elegendő ezt az egyetlen szöget bevezetni a mozgás leírásába. A relatív sebességvektor az invariáns koordináta-rendszerben ekkor

$$\vec{v}_{inv} = \dot{\vec{r}}_{inv} = \dot{r}\begin{pmatrix} \cos\Upsilon \\ \sin\Upsilon \\ \sin\iota\sin\psi \end{pmatrix} + r\dot{\phi}\begin{pmatrix} -\sin\Upsilon \\ \cos\Upsilon \\ 0 \end{pmatrix} + r\dot{\psi}\begin{pmatrix} -\sin\Upsilon \\ \cos\Upsilon \\ \sin\iota\cos\psi \end{pmatrix} + r\sin\psi\,\dot{\iota}\begin{pmatrix} \sin\iota\sin\phi \\ -\sin\iota\cos\phi \\ 1 \end{pmatrix}.. \quad (28)$$

Ezek alapján a relatív sebességvektor az együtt-mozgó koordináta-rendszerben, illetve a pálya-impulzusmomentum vektor az együtt-mozgó és az invariáns rendszerben az alábbi alakot öltik:

$$\vec{v}_{co} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r(\dot{\psi}+\dot{\phi}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\Upsilon} \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{L}_{N,co} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu r^2(\dot{\psi}+\dot{\phi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu r^2\dot{\Upsilon} \end{pmatrix},\ \vec{L}_{N,inv} = \mu r^2\dot{\Upsilon}\begin{pmatrix} \sin\iota\sin\phi \\ -\sin\iota\cos\phi \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

4.2. Az $\vec{N}, \vec{p}, \vec{q}$ vektor-triád

A gravitációs hullámok számítása során fontos a kettősrendszer mozgását a detektor szemszögéből vizsgálni, figyelembe véve, hogy a gravitációs hullámok a pillanatnyi pályasíkról „válnak" le. Ehhez szükségünk van egy $\vec{N}, \vec{p}, \vec{q}$ vektor-triádra, amelyek összekötik a detektor és a pillanatnyi pályasík helyzetét. Az ezekre a vektorokra korábban [7] megadott formulákat is újra kell számolnunk az új sorfejtési alapelvek mentén. Ezek ugyanis kritikus fontosságúak a gravitációs hullámok polarizációs állapotainak projektálásához,

$$h_+(t) = \frac{1}{2}\left(p_i p_j - q_i q_j\right)h_{TT}^{ij}(t), \qquad h_\times(t) = \frac{1}{2}\left(p_i q_j + q_i p_j\right)h_{TT}^{ij}(t), \quad (30)$$

illetve a $h_{TT}^{ij}(t)$ kifejezéseiben megjelennek az $\vec{N}\cdot\vec{r}$ és $\vec{N}\cdot\vec{v}$ skaláris szorzatok is. Ezen számításokat a legegyszerűbb az együtt-mozgó koordináta-rendszerben elvégezni, így a vektor-triád komponenseit ebben határozzuk meg.

Az $\vec{N}$ egységvektor az úgynevezett látóirány, vagyis a detektort a forrással összekötő egyenes irányvektora. Ennek leírására egy γ szöget választunk úgy, hogy az invariáns rendszerben

$$\vec{N}_{inv} = \begin{pmatrix} \sin\gamma \\ 0 \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \quad (31)$$

legyen. A látóirány vektorának alakja az együtt-mozgó koordináta-rendszerben

$$\vec{N}_{co} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi\sin\gamma - \sin\psi\sin\phi\sin\gamma\cos\iota + \sin\psi\cos\gamma\sin\iota \\ -\sin\psi\cos\phi\sin\gamma - \cos\psi\sin\phi\sin\gamma\cos\iota + \cos\psi\cos\gamma\sin\iota \\ \sin\phi\sin\gamma\sin\iota + \cos\gamma\cos\iota \end{pmatrix}, \quad (32)$$

illetve felhasználva a 1,5 PN rendben érvényes $\cos\iota = 1$ feltételt

$$\vec{N}_{co} = \begin{pmatrix} \sin\gamma\cos\Upsilon + \cos\gamma\sin\psi\sin\iota \\ -\sin\gamma\sin\Upsilon + \cos\gamma\cos\psi\sin\iota \\ \sin\phi\sin\gamma\sin\iota + \cos\gamma \end{pmatrix}. \tag{33}$$

A $\vec{p}$ egységvektor a pályasíkban fekszik (vagyis merőleges az $\vec{L}_N$ vektorra), és az $\vec{N}$ irányvektorra is. Ezen feltételek alkalmazásával 1,5 PN rendben az együtt-mozgó koordináta-rendszerben

$$\vec{p}_{co} = \begin{pmatrix} \sin\Upsilon - \mathrm{ctg}\,\gamma\cos\phi\sin\iota\cos\Upsilon \\ \cos\Upsilon + \mathrm{ctg}\,\gamma\cos\phi\sin\iota\sin\Upsilon \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

A fenti két vektorra merőlegesen vezetjük be a $\vec{q}$ vektort, amely 1,5 PN rendben

$$\vec{q}_{co} = \vec{N}_{co} \times \vec{p}_{co} = \begin{pmatrix} -\cos\gamma\cos\Upsilon - \sin\gamma\cos\Upsilon\sin\phi\sin\iota - \cos\gamma\,\mathrm{ctg}\,\gamma\sin\Upsilon\cos\phi\sin\iota \\ \sin\Upsilon\cos\gamma + \sin\gamma\sin\Upsilon\sin\phi\sin\iota - \mathrm{ctg}\,\gamma\cos\gamma\cos\Upsilon\cos\phi\sin\iota \\ \sin\gamma - \cos\gamma\sin\phi\sin\iota \end{pmatrix}. \tag{35}$$

5. Összefoglalás

A fentiekben – a kettős rendszerek leírásának és a poszt-newtoni közelítés bevezetése után – újra levezetésre kerültek a releváns vektormennyiségek komponensei az Euler-szögek megadásával. Ezen szögmennyiségek, illetve az invariáns és az együtt-mozgó koordináta-rendszerek definiálása során korábban nem került tisztázásra az a kérdés, hogy a relatív sebességvektor harmadik komponense miért nem zérus az együtt-mozgó rendszerben. Ennek bizonyítása és a kérdés tisztázása szerepel az eredmények között.

Az új, összetett amplitúdó és frekvencia sorfejtés miatt a meghatározó vektor-mennyiségek komponenseit újra kellett számolni. Ezért a szeparációs vektor, a relatív sebességvektor, a pálya-impulzusmomentum vektor, illetve az $\vec{N}, \vec{p}, \vec{q}$ vektor-triád vektorkomponenseit újraszármaztattuk, elhagyva a korábbi sorfejtés eredményeit. Természetesen az új formulák 1,5 PN rendig érvényesek, lévén ez a vizsgálataink hatóköre.

Külön kellett kezelni a pályasík nyílásszögének helyzetét, mivel a ι szög nulla körüli perturbációként áll elő. A szögmennyiség megfelelő geometriai értelmezése mentén felső becslést adtunk annak poszt-newtoni rendjére. Ennek köszönhetően $\cos\iota$-t a vizsgált rendben 1-nek tekinthetjük, $\sin\iota$-t pedig 1,5 PN rendű korrekciónak. Ennek felhasználásával a fent említett vektormennyiségek komponensei is leegyszerűsödnek.

A kutatás következő lépésben származtatnunk kell az Euler-szögekre vonatkozó mozgásegyenleteket, majd meg kell oldanunk azokat. Az egyenletek megoldásához a pálya excentricitása miatt egy megfelelő paraméterezést kell majd bevezetnünk, majd annak segítségével a választott paraméter függvényében az egyenletek kiintegrálhatóak. Ezután kerülhet sor a mennyiségek időfüggésének meghatározására, amihez már mindenképpen numerikus módszereket kell alkalmaznunk.

Mindeközben meg kell határoznunk a vegyes sorfejtés módszereinek részleteit, lépéseit. Ez külön nehézséget jelent majd a numerikus módszerek helyes alkalmazásakor, mivel az adott PN rendben rendelkezésünkre álló egyenletek nem veszik figyelembe a frekvencia-sorfejtés elemeit, azt nekünk kell majd beépíteni a számolási folyamatba.

Irodalom

[1] Abbott, B. P., et al.: *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016) **https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102**

[2] Abbott, B. P., et al.: *GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*, Phys. Rev. Lett. **116**, 241103 (2016) **https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.241103**

[3] Abbott, B. P., et al.: *GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2*, Phys. Rev. Lett. **118**, 221101 (2017) **https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.221101**

[4] Abbott, B. P., et al.: *GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence*, Phys. Rev. Lett. **119**, 141101 (2017) **https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.141101**

[5] Abbott, B. P., et al.: *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*, Phys. Rev. Lett. **119**, 161101 (2017) **https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.161101**

[6] O'Leary, R. M., Kocsis, B., Loeb, A.: *GW170814: Gravitational waves from scattering of stellar-mass black holes in galactic nuclei*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **395**, 2127–2146 (2009) **https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.14653.x**

[7] Majár, J., Vasúth, M.: *Gravitational waveforms for spinning compact binaries*, Phys. Rev. **D77**, 104005 (2008) **https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.104005**

[8] Majár, J., Forgács, P., Vasúth, M.: *Gravitational waves from binaries on unbound orbits*, Phys. Rev. **D82**, 064041 (2010) **https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.064041**

[9] Blanchet, L.: *On the multipole expansion of the gravitational field*, Classical Quantum Gravity **15** 1971-1999 (1998) **https://doi.org/10.1088/0264-9381/15/7/013**

[10] Kidder, L. E.: *Coalescing binary systems of compact objects to (post)$^{5/2}$-Newtonian order. V. Spin effects*, Phys. Rev. **D52**, 821 (1995) **https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.821**

[11] Mikóczi, B.: *Spin supplementary conditions for spinning compact binaries*, Phys. Rev. **D95**, 064023 (2017) **https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.064023**

[12] Majár, J.: *Spin-spin interaction in the spin-precession equations*, Phys. Rev. **D80**, 104028 (2009) **https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.104028**

[13] Majár, J., Mikóczi, B.: *Second order spin effects in the spin precession of compact binaries*, Phys. Rev. **D86**, 064028 (2012) **https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.064028**