

EGYENES ALKOTÓJÚ HENGERES TEST KÖRÜLI HATÁRRÉTEG-ÁRAMLÁS NUMERIKUS VIZSGÁLATA

Kalmár László¹, Czibere Tibor²

¹ Egyetemi docens, ² Professzor emeritus

Miskolci Egyetem, Áramlás- és Hőtechnikai Gépek Tanszéke

3515 Miskolc-Egyetemváros, aramka@uni-miskolc.hu, aramczt@uni-miskolc.hu

Összefoglalás

A cikk egy számítási módszert mutat be, amely egy ellipszis (határesetben kör-) keresztmetű hengeres test körül kialakuló határréteg-áramlás sebességeloszlásának numerikus meghatározására szolgál, az un. sztochasztikus turbulencia modell alkalmazásával [1,2]. A keresett sebességeloszlás egy differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldásával állítható elő a határréteg speciális koordinátarendszerében. Ez a számítási eljárás a szakirodalomban már bevett szóhasználattal a rúd körüli határréteg-áramlásnak az un. egy-egyenlet megoldási módszere. A módszer és az ennek alapján kifejlesztett számítógépes kód lamináris és turbulens határréteg áramlások esetében egyaránt alkalmazható [3].

Kulcsszavak: lamináris és turbulens határréteg-áramlás, sztochasztikus turbulencia-modell

Abstract

This paper deals with the introduction of a numerical method available to determine velocity distribution of the boundary layer flow around elliptical (in border-line case is cylindrical) cylinder by applying the Stochastic Turbulent Model (STM) proposed by Czibere [1,2]. The wanted velocity distributions can be determined by numerical solution of this differential equation in special coordinate system of the boundary layer. This numerical computational procedure is named in the literature as „one-equation method” applying to solve the boundary layer flow around cylindrical rod. The numerical algorithm and also the developed computer code is available to investigate both the cases of laminar and turbulent flows [3].

Keywords: laminar and turbulent boundary layer flow, stochastic turbulent model

1. A turbulens áramlás transzportegyenletei

1.1 Tömeg- és impulzus-megmaradási tételek

A folyékony kontinuumok turbulens áramlásában a pillanatnyi turbulens jellemzőkkel felírt tömeg- és impulzus-megmaradást kifejező alapegyenletek időbeni átlagolásával állíthatjuk elő a folyékony kontinuum turbulens mozgását leíró transzportegyenleteket az időbeni középértékkel értelmezett $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ sebességtérben *összenyomhatatlan Newtoni közeg* áramlása esetére.

Az összenyomhatatlan közegre vonatkozó *tömegtranszport* egyenlete [1,2]:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

és az *impulzustranszport* egyenlete:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} - \text{Div} \rho (\overline{\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}) \quad , \quad (2)$$

ahol: $\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t) = v'_1(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_1 + v'_2(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_2 + v'_3(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_3$ a *turbulens ingadozási sebességtér*; \mathbf{g} a tömegegységre vonatkoztatott *fajlagos térerő*; $\mathbf{r} \equiv (q_1, q_2, q_3)$ az *általános ortogonális görbevonalú koordináták*; $\mathbf{F}_R = -\rho (\overline{\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'})$ a *Reynolds-féle turbulens feszültségtenzor*.

A $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebesség- és $p(\mathbf{r}, t)$ nyomás-tér meghatározása szemszögéből nézve a fenti két transzportegyenlet ugyan a rendelkezésünkre áll. De az problémát jelent, hogy a (2) egyenletben – az \mathbf{F}_R Reynolds-féle turbulens feszültségtenzor elemei – mint további ismeretlen függvények jelennek meg. A megoldandó differenciálegyenlet-rendszer az ismeretlen függvények meghatározása szempontjából nézve alulhatározott.

1.2 A turbulens kinetikus energia transzportegyenlete

A következőkben vizsgálat tárgyává tesszük a

$$k = (\overline{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'})/2 \quad (3)$$

egyenlettel definiált *fajlagos turbulens kinetikus energia* transzportját. A szükséges átalakítások [2] elvégzését követően – a részletek bemutatásának mellőzésével – nyerjük a

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)k = -(\overline{\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}) : (\nabla \circ \mathbf{v}) - \varepsilon - \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}{2} + \frac{\mathbf{v}' p'}{\rho} \right) - \nu \nabla k - \nu \text{Div} (\overline{\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}) \right] \quad (4)$$

turbulens kinetikus energia transzportegyenletét, ahol

$$\varepsilon = \nu (\overline{\mathbf{v}' \circ \nabla}) : (\overline{\mathbf{v}' \circ \nabla} + \nabla \circ \overline{\mathbf{v}'}) \quad (5)$$

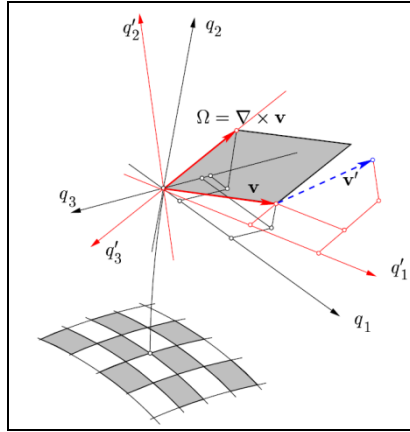
Az egyenlet bal oldalán a *turbulens kinetikus energia szubsztanciális* (időbeni teljes) *megváltozása*. A (4) egyenlet jobb oldalán álló első tag a *turbulens produkció* ($\nabla \circ \mathbf{v}$ a gerjesztője a turbulenciának), a második tag a *turbulens disszipáció* és a harmadik tag pedig a *turbulens kinetikus energia diffúziója*.

Az (1) és (2) differenciálegyenletek alkotta egyenletrendszer a turbulens kinetikus energia (4) transzportegyenletével kiegészítve is alulhatározott marad, mert újabb ismeretlen függvények is fellépnek. Ezért a kiegészített egyenletrendszert – a megoldhatósága érdekében – még bővíteni kell, vagyis a megoldáshoz modell alkotására van szükség.

2. A sztochasztikus turbulencia-modell

Az időbeni középértékekkel értelmezett sebességtérben a \mathbf{v} sebességvektor és az $\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ örvényvektor által meghatározott *természetes koordinátarendszer* bázisvektorai [2]:

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}'_2 \times \mathbf{e}'_3 \quad ; \quad \mathbf{e}'_2 = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}|} \quad ; \quad \mathbf{e}'_3 = -\frac{\mathbf{\Omega}}{\Omega} \quad . \quad (6)$$



1. ábra. A természetes q'_1, q'_2, q'_3 és a számítási q_1, q_2, q_3 koordinátarendszer

A természetes és a számítási koordinátarendszer közötti transzformáció az \mathbf{E} transzformáció tenzor felhasználásával végezhető el, amelynek elemei az alábbi összefüggésekből számíthatók:

$$E_{i1} = \frac{1}{\sqrt{1-S^2}} \left(\frac{v_i}{v} - S \frac{\Omega_i}{\Omega} \right) ; \quad E_{i3} = -\frac{\Omega_i}{\Omega} \quad , \quad (\text{ahol } i=1,2,3) \quad (7)$$

$$E_{12} = \frac{1}{\sqrt{1-S^2}} \frac{v_2 \Omega_3 - v_3 \Omega_2}{v \Omega} ; \quad E_{22} = \frac{1}{\sqrt{1-S^2}} \frac{v_3 \Omega_1 - v_1 \Omega_3}{v \Omega} ; \quad E_{32} = \frac{1}{\sqrt{1-S^2}} \frac{v_1 \Omega_2 - v_2 \Omega_1}{v \Omega} , \quad (8)$$

ahol:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} ; \quad \Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2} ; \quad S = \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{v}}{v \Omega} \right) = \frac{v_1 \Omega_1 + v_2 \Omega_2 + v_3 \Omega_3}{v \Omega} . \quad (9)$$

2.1. A sztochasztikus turbulencia-modell (STM) alapösszefüggései a természetes koordinátarendszerben

Az áramlási tér azon részében, ahol a turbulens ingadozást szilárd fal nem korlátozza – tehát már teljesen kifejlődött turbulencia esetéről van szó – a *Reynolds-féle turbulens feszültségtenzor* a természetes koordinátarendszerben a turbulencia $M_\nu = l \Omega$ sebességleptékével az alábbi egyenlet szerint határozható meg [2]:

$$\mathbf{F}_R = -\rho \overline{(\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}')} = \rho \kappa^2 (l\Omega)^2 \mathbf{H} , \quad (10)$$

ahol $\kappa = 0,407$ a Kármán-konstans, l a turbulencia un. hosszúság-léptéke (egy hosszúság-dimenziójú érték, ami a Prandtl-féle keveredési úthossznak felel meg), továbbá \mathbf{H} az un. hasonlósági tenzor az alábbi skalár elemekkel:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} ; \alpha = -3,28 \quad \beta = -1,64 \quad \gamma = -2,46 . \quad (11)$$

A fajlagos turbulens kinetikus energia a turbulencia sebességléptékével kifejezve:

$$k(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \overline{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}')} = a^2 \kappa^2 (l\Omega)^2 ; \quad a^2 = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 3,69 . \quad (12)$$

Az örvényviszkózitási tenzor a hasonlósági tenzor deviátora:

$$\mathbf{H}_* = \begin{pmatrix} \alpha_* & 1 & 0 \\ 1 & \beta_* & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_* \end{pmatrix} ; \alpha_* = \frac{1}{3}(2\alpha - \beta - \gamma); \beta_* = \frac{1}{3}(2\beta - \alpha - \gamma); \gamma_* = \frac{1}{3}(2\gamma - \alpha - \beta) . \quad (13)$$

A turbulens feszültségtenzor a fentieket felhasználva az alábbi módon is felírható:

$$\mathbf{F}_R(\mathbf{r}, t) = -\rho \overline{(\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}')} = \rho k \mathbf{H}_* / a^2 - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I} . \quad (14)$$

Az (5) egyenlettel definiált ε fajlagos turbulens disszipáció két különböző módon számítható:

- egyrészt a sztochasztikus turbulenciamodell fenti paramétereinek felhasználásával:

$$\varepsilon = -\nu \kappa^2 \{ a_{11} A_1^2 + a_{22} A_2^2 + a_{33} A_3^2 + 2(a_{12} A_1 A_2 + a_{13} A_1 A_3 + a_{23} A_2 A_3) \} , \quad (15)$$

ahol: $a_{11} = 2\alpha + \beta + \gamma$ $a_{22} = \alpha + 2\beta + \gamma$ $a_{33} = \alpha + \beta + 2\gamma$;

$a_{12} = \alpha + \beta + \gamma + 1$ $a_{13} = \alpha + \beta + \gamma$ $a_{23} = \alpha + \beta + \gamma$;

$$A_i = \frac{\partial (l\Omega)}{h_i' \partial q_i'} \quad (i = 1, 2, 3).$$

- másrészt a dimenzióanalízis alapján nyert alábbi formula segítségével:

$$\varepsilon = C_E \nu^N (l\Omega)^{2(1-N)} \Omega^{N+1} ; \quad N \approx 2 \quad \text{és} \quad C_E \approx 0,1 . \quad (16)$$

A (15) és (16) formulák összevonásával adódik egy differenciálegyenlet az $l\Omega$ sebességléptékre:

$$a_{11} A_1^2 + a_{22} A_2^2 + a_{33} A_3^2 + 2(a_{12} A_1 A_2 + a_{13} A_1 A_3 + a_{23} A_2 A_3) = -C_E \kappa^{-2} \nu^{N-1} (l\Omega)^{2(1-N)} \Omega^{N+1} . \quad (17)$$

2.2. A sztochasztikus turbulencia-modell (STM) alapösszefüggései a számítási koordinátarendszerben

A turbulens áramlást leíró skalár mennyiségek változatlanok a két koordináta rendszerben, de a vektor- és tenzor mennyiségeket át kell transzformálni az egyik koordinátarendszerről a másikba. A \mathbf{G} örvényviszkózitási tenzor az \mathbf{E} transzformációs tenzor felhasználásával adódik:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}_* \cdot \mathbf{E}^T . \quad (18)$$

A fenti kifejezéseket felhasználva a *turbulens feszültségtenzorra* felírt (10) összefüggés a

$$\mathbf{F}_R(\mathbf{r}, t) = -\rho \overline{(\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}')} = \rho k \mathbf{G}/a^2 - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I} \quad (19)$$

formában írható fel. Az $l\Omega$ *turbulens sebességlepték* (17) differenciálegyenlete alakilag változatlan marad a számítási koordinátarendszerben, de az A_i tényezők transzformációra szorulnak:

$$A_i = E_{i1} \frac{\partial (l\Omega)}{h_1 \partial q_1} + E_{i2} \frac{\partial (l\Omega)}{h_2 \partial q_2} + E_{i3} \frac{\partial (l\Omega)}{h_3 \partial q_3}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

3. A turbulens áramlási probléma transzportelméleti megoldása

A tömeg-, impulzus- és energia-transzport fentiekben megadott egyenletei lamináris áramlás esetén a bennük fellépő – az áramlás matematikai leírására alkalmas – ismeretlen függvények szemszögéből nézve matematikailag zárt rendszert képeznek. Turbulens áramlás esetében az impulzus transzport (2) egyenletében új ismeretlenként jelentkezik a *Reynolds-féle turbulens feszültségtenzor*. Ezért a turbulens áramlásprobléma megoldása érdekében az említett transzportegyenleteket ki kell egészíteni, amire két lehetőség kínálkozik.

Az **egyik lehetőség** a *turbulens kinetikus energia* (4) transzportegyenletének a választása, és ekkor összenyomhatatlan áramló közeget feltételezve a *megoldandó differenciálegyenlet-rendszer* a következő:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{2}{3} \nabla k + \text{Div}(k \mathbf{G})/a^2, \quad (21)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) k = \frac{k}{a^2} \mathbf{G} : (\nabla \circ \mathbf{v}) - \varepsilon - \nabla \cdot \left\{ \frac{k^{3/2} \mathbf{t}}{2(\kappa a)^3} - \frac{C_k}{\kappa a} \frac{k}{\Omega} \nabla k \right\} + \nu \left[\frac{2}{3} \Delta k - \nabla \cdot \text{Div}(k \mathbf{G})/a^2 \right] \quad (22)$$

de ezt a differenciálegyenlet-rendszert még egy algebrai egyenlettel ki kell egészíteni:

$$\varepsilon = C_E \nu^N (\kappa a)^{2(N-1)} \frac{\Omega^{N+1}}{k^{N-1}}. \quad (23)$$

A **másik lehetőség** a (20)-(21) transzportegyenleteket a turbulens sebességlepték (17) differenciálegyenletével kiegészíteni. Ez esetben a (17) differenciálegyenletet – az előző eredményeket felhasználva – a numerikus megoldása érdekében célszerű átalakítani:

$$f_1(\mathbf{r}, t) \frac{\partial (l\Omega)}{h_1 \partial x_1} + f_2(\mathbf{r}, t) \frac{\partial (l\Omega)}{h_2 \partial x_2} + f_3(\mathbf{r}, t) \frac{\partial (l\Omega)}{h_3 \partial x_3} = \sqrt{F(\mathbf{r}, t)}, \quad (24)$$

ahol: $f_j(\mathbf{r}, t) = E_{1j} + E_{2j} + E_{3j} \quad ; \quad (j = 1, 2, 3)$

$$F(\mathbf{r}, t) = 2[(1 - a_{12})A_1A_2 + (1 - a_{13})A_1A_3 + (1 - a_{23})A_2A_3] + \\ + (1 - a_{11})A_1^2 + (1 - a_{22})A_2^2 + (1 - a_{33})A_3^2 - C_E \kappa^{-2} \nu^{N-1} (l\Omega)^{2(1-N)} \Omega^{N+1}$$

E differenciálegyenletnek a jobboldalán álló $F(\mathbf{r}, t)$ függvény a numerikus számítások során alkalmazott iterációban mindig az előző iterációs lépésben nyert eloszlásokból meghatározva ismertnek tekinthető, és akkor a (24) differenciálegyenlet transzportegyenletként lesz kezelhető. Az így nyert – összesen öt skálár parciális differenciálegyenlet és egy algebrai egyenlet alkotta – egyenletrendszerben fellépő ismeretlen függvények (a \mathbf{v} sebesség-vektor három skálár komponense, a p nyomás, a k turbulens kinetikus energia és az ε fajlagos turbulens disszipáció) száma már megegyezik az egyenletek számával, tehát az egyenletrendszer zárt, amelynek numerikus megoldásával az ismeretlenek meghatározhatók. Ezt a számítási módszert a sztochasztikus turbulencia-modell egy-egyenlet változatának nevezzük, amelyben a tömeg- és impulzus-transzport (20)-(21) differenciálegyenleteit az alulhatározottságuk feloldása érdekében egy további differenciálegyenlet egészíti ki.

4. A kétdimenziós stacionárius határréteg-áramlási probléma aszimptotikus megoldása

A tapasztalat szerint az áramlást határoló szilárd falhoz közelítve a turbulens ingadozásnak a falra merőleges v'_2 komponensét a fal jelenléte korlátozza, illetve határesetben meg is szünteti. Ezt a jelenséget feszültségtenzor skálár elemeivel a következőképpen fejezhetjük ki: $\overline{v'_1 v'_2} \rightarrow 0$, $\overline{v'_2 v'_1} \rightarrow 0$, $\overline{v'_2 v'_2} \rightarrow 0$. Ennek következtében a szilárd fal menti *határrétegben* a sztochasztikus turbulencia-modell (11) összefüggéssel megadott \mathbf{H} hasonlósági tenzora módosul.

Numerikus vizsgálatainkat olyan *nagy Reynolds-számú* határréteg-áramlásokra korlátozzuk, amelyekben a szilárd falak mentén kialakuló határrétegek vastagságának nagyságrendje $\delta \ll 1$, és feltételezzük, hogy a fajlagos turbulens kinetikus energiáé is ugyanekkora: $k \sim \delta$; a kinematikai viszkozitási tényezőé pedig ezekénél egy nagyságrenddel kisebb: $\nu \sim \delta^2$.

Nagyságrendi becslésekkel [4] meghatározhatók az előbbi megoldandó differenciálegyenletek stacionárius határréteg áramlásra érvényes alakjai, amit a szóban forgó egyenletekből a δ és ennél kisebb nagyságrendű tagok elhanyagolásával állíthatunk elő:

$$\frac{\partial (v_1 h_2)}{h_1 h_2 \partial q_1} + \frac{\partial (v_2 h_1)}{h_1 h_2 \partial q_2} = 0 \quad , \quad (25)$$

$$(l\Omega)^{N-1} \frac{\partial (l\Omega)}{h_2 \partial q_2} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{-\frac{C_E \nu^{N-1}}{\alpha + \gamma} \Omega^{N+1}} \quad , \quad (26)$$

$$\frac{v_1}{h_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} = g_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{h_1 \partial q_1} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{h_2^2 \partial q_2^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial k}{h_2 \partial q_2} \quad , \quad (27)$$

$$0 = g_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{h_2 \partial q_2} - \left(\frac{2}{3} - \frac{\beta_*^{(0)}}{a^2} \right) \frac{\partial k}{h_2 \partial q_2} \quad , \quad (28)$$

$$\nu \kappa^2 (\alpha + \gamma) \left(\frac{\partial (l\Omega)}{h_2 \partial q_2} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \left| \frac{\partial v_1}{h_2 \partial q_2} \right| = 0 \quad , \quad (29)$$

ahol: $a^2 = -\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$, ugyanis a határrétegben $\beta = 0$.

A határrétegbeni x_1, x_2 koordináta-rendszerben az x_1 (ív-hossz) koordináta az áramlás irányába (a falhoz érintőlegesen), az x_2 pedig rá merőlegesen a faltól távolodó irányba mutat. Ebben a koordináta-rendszerben a numerikus számítások érdekében bevezetjük a $\Psi(x_1, x_2)$ áram-függvényt, amelynek deriváltjai szolgáltatják a

$v_1 = \frac{\partial \Psi}{h_2 \partial x_2}$ és $v_2 = -\frac{\partial \Psi}{h_1 \partial x_1}$ sebességkomponenseket. Bevezetjük továbbá a

$\Pi = \Gamma + p/\rho$ teljes potenciált, ahol Γ a térerő potenciálja: $\mathbf{g} = -\nabla \Gamma$. Az így definiált Ψ áramfüggvény a (25) kontinuitási egyenletet automatikusan kielégíti, s így az ismeretlenekkel együtt a megoldandó egyenletek száma is eggyel kevesebb lesz.

A továbbiakban célszerű áttérni az s, n ívhossz-koordinátákra. A numerikus számítások során pedig a ξ, η dimenziótlan ívhossz-koordinátákat használjuk az alábbi transzformációnak megfelelően: $\xi = s/L$; $\eta = n/\delta_N(s)$, ahol L az un. vonatkoztatási geometriai méret, $\delta_N(s)$ pedig egy a határréteg vastagságával arányos un. normálási hossz, amely az áramlásra merőleges ívhossz-koordináta dimenziótlanítására szolgál.

A határréteg-áramlás sebességkomponenseit a határrétegen kívüli potenciálos áramlásnak a keresztmetszet-kontúron ébredő $U(s)$ tangenciális sebességével dimenziótlanítjuk. Definiáljuk még az $f(\xi, \eta)$ dimenziótlan áramfüggvényt is, amely a már bevezetett Ψ áramfüggvénnyel a

$$\Psi(\xi, \eta) = \delta_N(\xi) U(\xi) f(\xi, \eta) \quad , \quad (30)$$

összefüggésben áll. Ezt a dimenziótlan áramfüggvényt most be kell vezetnünk a (27)-(28) mozgásegyenletekbe, amelyek összevonásával nyerjük a határréteg-áramlás mozgásegyenletét:

$$\frac{v_1}{h_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{h_1 \partial q_1} + \frac{1}{b_*} \frac{\partial \Pi}{h_2 \partial q_2} + \frac{\nu}{h_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial q_2^2}; \quad b_* = \frac{3\beta_*^{(0)} - 2a^2}{3}.$$

Ebből a behelyettesítések után az $f(\xi, \eta)$ dimenziótlan áramfüggvényre a

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \text{Re} \frac{\delta_N}{L} \left\{ \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\delta_N}{L} \frac{U}{U_\infty} \right) f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\delta_N}{L} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{U}{U_\infty} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right\} - \text{Re} \frac{U_\infty}{U} \left(\frac{\delta_N}{L} \right)^2 \frac{\partial P}{\partial \xi} +$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{\delta_N}{L} \frac{U_\infty}{U} \left[\frac{1}{b_*} + \eta \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\delta_N}{L} \right) \right] \frac{\partial P}{\partial \eta} + \operatorname{Re} \left(\frac{\delta_N}{L} \right)^2 \frac{U}{U_\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \right) = 0 \quad (31)$$

differenciálegyenlet adódik, ahol U_∞ a vizsgált rúdtól távol a zavartalan áramlás sebessége, $\operatorname{Re} = U_\infty L / \nu$ az áramlás Reynolds-száma és $P = \Pi / U_\infty^2$ a dimenziótlan teljes potenciál. A határrétegen kívüli potenciálos áramlás $U(\xi) / U_\infty$ dimenziótlan sebességeloszlása ismert potenciálméleti módszerrel meghatározható, a $\delta_N(\xi) / L$ normálási hosszt pedig mind lamináris, mind turbulens esetben az

$$\text{alábbi egyenlet szerint célszerű választani:} \quad \frac{\delta_N}{L} = \left(\frac{\xi}{\operatorname{Re}} \frac{U_\infty}{U} \right)^{1/2}.$$

A (31) parciális differenciálegyenletben – a megoldása érdekében – még néhány átalakítást végzünk; először is kiszámítjuk a $P(\xi, \eta)$ dimenziótlan teljes potenciál deriváltjait. A teljes potenciál eloszlását turbulens határrétegben is a határrétegen kívüli potenciálos áramlás határozza meg, s így az Euler-féle mozgásegyenlet alapján $\frac{\partial P}{\partial \xi} = -\frac{U}{U_\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)$ adódik. A (28) egyenletet a ξ, η koordináta-rendszerbe transzformálva a P dimenziótlan teljes potenciál η szerinti deriváltjára a $\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{b_*}{a^2} \frac{\partial g}{\partial \eta}$ összefüggés kapjuk, ahol $g = k / U_\infty^2$ a dimenziótlan fajlagos turbulens kinetikus energia.

Az $f(\xi, \eta)$ dimenziótlan áramfüggvény a (31) parciális differenciálegyenletnek egy olyan partikuláris megoldása, amelyre vonatkozó kezdőfeltételek: $f(\xi, 0) = 0$; $\left. \frac{\partial f}{\partial \xi} \right|_{\eta=0} = 0$; $\left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0$. A határrétegen kívül – feltételeink szerint – az áramlás potenciálos, tehát a határrétegben v_1 sebességkomponensnek a potenciálos U sebességhez kell tartania, vagyis $\lim_{\eta \rightarrow \infty} v_1 = U$. A megoldandó (31) differenciálegyenlet a $\frac{\partial f}{\partial \xi} = \varphi(\xi) \frac{\partial f}{\partial \eta}$ járulékos feltétel mellett a következő képen alakul:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + a_1 f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - a_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + (a_{31} \eta + a_{30}) \frac{\partial g}{\partial \eta} + a_2 = 0 \quad , \quad (32)$$

ahol az együtthatók az alábbi formulák alapján számíthatók:

$$\begin{aligned} a_1 &= \operatorname{Re} \frac{\delta_N}{L} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\delta_N}{L} \frac{U}{U_\infty} \right), & a_2 &= \operatorname{Re} \left(\frac{\delta_N}{L} \right)^2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{U}{U_\infty} \right) \\ a_{30} &= \operatorname{Re} \frac{\kappa^2}{a^2} \frac{\delta_N}{L} \frac{U_\infty}{U}, & a_{31} &= b_* \operatorname{Re} \frac{\kappa^2}{a^2} \frac{\delta_N}{L} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\delta_N}{L} \right) \frac{U_\infty}{U}. \end{aligned}$$

A (32) parciális differenciálegyenlet – miután benne csak az η koordináta szerinti deriváltak lépnek fel – közönséges differenciálegyenletként kezelhető. Mivel azonban ebben az egyenletben az $f(\xi, \eta)$ dimenziótlan áramfüggvény mellett még a dimenziótlan fajlagos turbulens kinetikus energia $g(\xi, \eta)$ eloszlása is fellép, a megoldhatósága érdekében még ki kell kiegészíteni a (26) és (29) egyenletekből levezethető alábbi összefüggéssel:

$$g(\xi, \eta) = C_E^{1/N} \kappa^{2 \frac{N-1}{N}} \frac{a^2}{\text{Re}} \frac{U}{U_\infty} \frac{L}{\delta_N} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right| \quad (33)$$

A (32) differenciálegyenlet a jól ismert Runge-Kutta módszerrel megoldható és az $f(\xi, \eta)$ ismeretében az érintőirányú sebességkomponens határrétegbeni eloszlása

már kiszámítható: $v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = U \frac{\partial f}{\partial \eta}$.

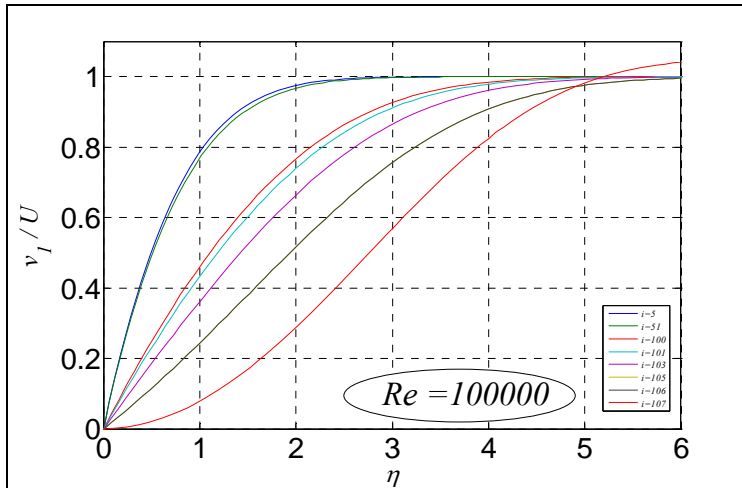
Ha a határréteg-áramlás lamináris, akkor a (32) egyenletből a $g(\xi, \eta)$ dimenziótlan fajlagos turbulens kinetikus energia eltűnik, és akkor az $f(\xi, \eta)$ áramfüggvény differenciálegyenlete a

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + a_1 f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - a_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + a_2 = 0 \quad (34)$$

alakot ölti, tehát lamináris határréteg-áramlás esetén egyetlen differenciálegyenlet leírja az áramlást, s így a megoldásához további kiegészítő egyenletre már nincs szükség. Említésre érdemes még, hogy a (34) differenciálegyenlet síklap menti határréteg-áramlás esetén az irodalomból jól ismert Blasius-féle differenciálegyenletbe megy át.

A fent bemutatott számítási eljárás felhasználásával egy számítógépes kód került kidolgozásra, amelynek segítségével a henger körüli határréteg-áramlás jellemzői numerikusan meghatározhatók. Körhenger néhány kiválasztott diszkrét pontjához tartozóan meghatároztuk a határrétegen belüli $v_1/U(\eta)$ sebességeloszlást. A körhenger felső ívét 200 diszkrét ívszakaszra bontottuk fel, s a rááramlás irányában kezdtük el az ívszakaszok végpontjainak számozását. A kiválasztott diszkrét pontok az i index értékeivel kerültek azonosításra.

A 2. ábrán a (32) differenciálegyenlet megoldásával számított turbulens ($Re = 100000$) határréteg-áramlásra vonatkozó eloszlásokat mutatjuk be, amelyen az $i = 5, 51, 100, 101, 103, 105, 106, 107$ jelű diszkrét pontokhoz tartozóan ábrázoltuk a $v_1/U(\eta)$ dimenziótlan sebesség felületre merőlegesen (sugárirányban) való változását. A lamináris ($Re = 1000$) határréteg-áramlásra vonatkozó – a (34) differenciálegyenlet megoldásával számított – eloszlások a [4]-ben megtalálhatók.



2. ábra. Körhenger körüli turbulens határréteg-áramlás dimenziótlán sebességeloszlása

5. Összefoglalás

A 2. ábrán jól látható, hogy a sebességprofil körhenger falától induló érintője fokozatosan csökkenő és folyamatosan átmegy a falhoz érintőleges irányba, ami az áramlás falról történő leválásának helyét jelzi. A számítási eredmények ismeretében megfigyelhető, hogy ez a leválási hely a turbulens határréteg-áramlásban a körhenger felületének az áramlás irányában egy későbbi szakaszán található.

6. Köszönetnyilvánítás

A cikkben ismertetett kutatómunka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként – az Új Magyarország fejlesztési terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

7. Irodalomjegyzék

- [1] Czibere, T.: *Three dimensional stochastic model of turbulence*, JCAM, Miskolc, 2001., No. 1, pp. 7-20.
- [2] Czibere, T., *Calculating turbulent flows based on a stochastic model*, JCAM, Miskolc, 2006., Vol. 7, No. 2, pp. 155-188.
- [3] Kalmár, L., Janiga, G., Czibere, T.: *Numerical Computation of the Flow in the Boundary-Layer around a Circular Cylinder*, MicroCAD 2009 International Computer Science Conference, Section E: Fluid and Heat Engineering, Miskolc, 2009., p. 131-138.
- [4] Kalmár, L., Czibere, T.: *Egyenes alkotójú hengeres test körüli határréteg-áramlás numerikus vizsgálata*, Műszaki Tudomány az Észak-Kelet Magyarországi Régióban 2011, Miskolc, 2011., p. 355-364.