

NÉGYTAGÚ SÍKBELI MECHANIZMUS TERVEZÉSE ÉS HELYZET-ANALÍZISE

Pál István

BSc hallgató, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: istu97@gmail.com

Burmeister Dániel

egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: daniel.burmeister@uni-miskolc.hu

Absztrakt

Jelen cikk egy négytagú síkbeli RRRP mechanizmus analitikus szintézisével és helyzetanalízisével foglalkozik. A vizsgálat tárgyát képező mechanizmus két kívánt helyzetéhez tartozó szintézise során vektorhurkok kerülnek felírásra, melyek skaláregyenletei egy nemlineáris egyenletrendszert alkotnak. A nemlineáris egyenletrendszer ismeretlenjei közül vannak szabadon választhatók, míg a többi numerikus eljárással határozzuk meg. A szabadon választott és ismeretlen változók megoldásai adják a mechanizmus tagjainak fő méreteit. A mechanizmus helyzetanalízise során szintén vektorhurkok skaláregyenletei szolgáltatnak nemlineáris egyenletrendszert, melyek segítségével meghatározhatók a mechanizmus másodlagos koordinátái az elsődleges koordináta függvényében.

Kulcsszavak: négytagú mechanizmus, szintézis, helyzetanalízis

Abstract

The present paper deals with the analytical synthesis and position analysis of a fourbar planar RRRP linkage. Vector loop equations are formulated for the two position synthesis of the investigated mechanism. The scalar equations of the vector loops form a system of nonlinear equations. Some of the unknowns of the system of equations are free of choice while the others are calculated numerically. The chosen and the calculated variables provide the main geometrical measures. In the position analysis of the mechanism we also use vector loop equations which provide a system of nonlinear equations. By solving these, the dependent coordinates of the mechanism can be determined in terms of the independent coordinate.

Keywords: fourbar linkage, synthesis, position analysis

1. Bevezetés

Mechanizmusok tágabb értelemben véve minden olyan gép, amely az általa elvégzendő feladatot mozgás révén valósítja meg, így a gépek zöme valamilyen mechanizmus. Szűkebb értelemben véve azt a szerkezetet szokás mechanizmusnak nevezni, ahol a gépet alkotó testek (a mechanizmus tagjai) egymás mozgását kényszerkapcsolatok révén kölcsönösen befolyásolják.

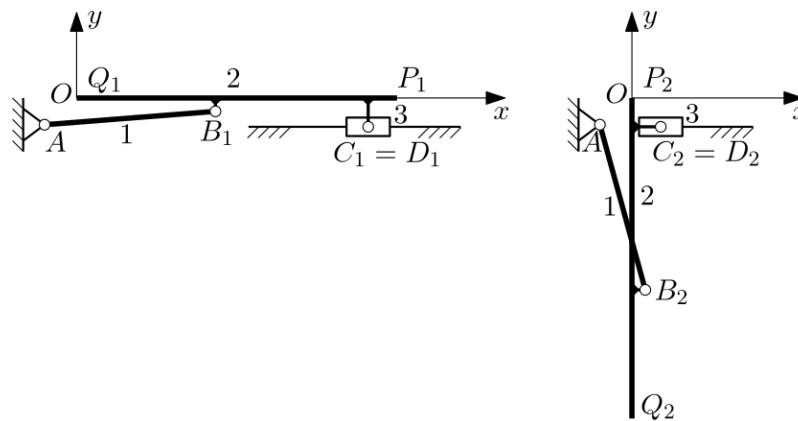
A mérnöki gyakorlatban számos olyan berendezés található, amelyben valamilyen négy tagból álló, zárt láncú, síkbeli mechanizmus található. Ilyenek például a belső égésű motorokban vagy szivattyúkban található dugattyús mechanizmusok, markológépek, himbás gépek stb.

A mechanizmus működése során a tagjai által végzett mozgások a tagok geometriájától függ. Az adott szerkezet tervezésének azon szakaszát, amikor a tagok geometriai méretezését úgy választjuk meg, hogy az egyes tagok mozgása az elvárásoknak megfelelő legyen, a mechanizmus szintézisének nevezzük. Szintézisnek három alapvető célja lehet, melyek (a) előírt függvény szerinti mozgás, mely során a hajtott tag bemeneti input mozgására, a mechanizmus egy másik adott tagjának valamely koordinátája előírt függvény szerint változik. Ebbe a körbe tartozó gépek az elektronikusan vezérelt meghajtások idejében már veszítettek jelentőségükből, tipikus példaként a bütykös mechanizmusokat említhetjük meg, melyről az [1,2] művekben olvashatunk részletesen. A szintézis további céljai (b) az előírt pályán történő mozgás, mely során a mechanizmus valamely tagjának bizonyos pontja előre megadott pontokon halad keresztül, illetve (c) az előírt helyzet szerinti mozgás, mely során nem csak a tag valamely pontjának helye, hanem a tag szöghelyzete is elő van írva valamennyi diszkrét helyen. Az előírt pálya, illetve helyzet célú analitikus szintézissel kapcsolatban számos tanulmány született, melyek különféle módszereket használnak. Példaként említhetjük [3-5] műveket, melyek a hurokegyenletek módszerét használják, a [6,7] cikkeket, melyek a hajtórúd pályagörbét leíró egyenletet oldják meg, illetve a [8-14] tanulmányokat, melyek valamilyen iteratív optimalizációs elvet használnak.

A jelen dolgozat egy zárt hurokból álló négytagú mechanizmus hurokegyenletek módszerével történő szintézisét és annak szintén a hurokegyenletek módszerével történő helyzetanalízisét kívánja bemutatni. A használt eljárásról bővebben a [15] műben részletesen tájékozódhatunk. A helyzetanalízissel kapcsolatban a [16,17] alatti művekben találunk további leírásokat.

2. A feladat ismertetése

A vizsgálat tárgya az 1. ábrán, két véghelyzetében vázolt, 0A_1B_2C_3D_0 szerkezeti képletű, RRRP mechanizmus, mely egy busz ajtajának a vázlatos rajza. Meghatározandók a síkmozgást végző mechanizmus főbb geometriai méretei oly módon, hogy a 2. jelű hajtókar (ajtó) P pontja az általunk felvett koordináta-rendszer x tengelyén elhelyezkedő P_1 pontból P_2 pontba mozdul el és közben α szöggel elfordul óramutató járásával ellentett irányban.



1. ábra. A mechanizmus vázlati rajzai véghelyzetekben

A szintézis feladata, hogy meghatározzuk a kívánt mozgás eléréséhez szükséges fő geometriai méreteket, azaz az A csukló helyét az xy koordináta-rendszerben, az AB és BC távolságokat, a D csúszka helyét és a P pont relatív helyét a B és C csuklókhöz képest. A szintézis során egyes kiinduló adatok adottak, melyek a következők:

- a P pont két végállapotának helye $P_1(b=0,6;0)$ m és $P_2=Q_1(0;0)$
- az ajtó szélessége, $b=QP=0,6$ m
- a 2 jelű tag QP egyenese kiinduló helyzetben az x tengellyel párhuzamos és $\alpha = 90^\circ$ -kal történő elforgás után az y tengellyel párhuzamos a másik véghelyzetében. Az előző feltétellel együtt ebből következik, hogy $Q_1=P_2$ és $Q_2(0;-0,6)$ m.
- a D csúszka tengelye párhuzamos az x tengellyel.

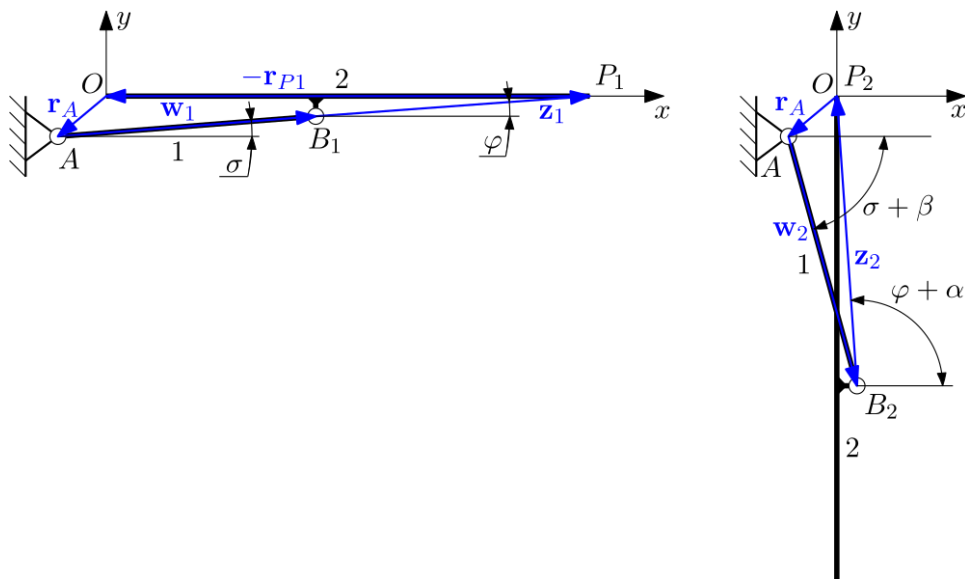
3. A mechanizmus szintézise

A szintézishez mindkét kívánt helyzetben két-két vektorhurkot írunk fel. Ezek a vektorhurkok az állványtól a P pont aktuális helyzetébe mutatnak. Az állvány az A és D kényszereknél jelenik meg, ennélfogva az A - P , illetve D - P pontok közötti hurkokat írhatunk fel.

Ha a mechanizmus A oldali ágát tekintjük, akkor a 2. ábrának megfelelően az $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{z} = \overrightarrow{BP}$, $-\mathbf{r}_P = \overrightarrow{PO}$ vektorok alkotnak egy zárt hurkot. Az 1 és 2 indexek a mechanizmus két kívánt helyzetét különböztetik meg, melyekhez tartozó vektorhurkok az alábbiak szerint írhatók fel:

$$\mathbf{r}_A + \mathbf{w}_1 + \mathbf{z}_1 - \mathbf{r}_{P1} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_A + \mathbf{w}_2 + \mathbf{z}_2 = \mathbf{0} \quad (2)$$



2. ábra. A mechanizmus A oldali vektorhurkai a két kívánt helyzetben

Az A pontba mutató helyvektort koordinátái $\mathbf{r}_A(x_A; y_A)$, míg a \mathbf{w} és \mathbf{z} vektorokat a $w=|\mathbf{w}|$ illetve $z=|\mathbf{z}|$ állandó hosszuk és az x tengellyel bezárt szögük segítségével írjuk fel. A 2. ábrának megfelelően a \mathbf{w} vektor az első helyzetben σ szöggel adott iránya a második helyzetben $\sigma + \beta$ szögre változik, míg a \mathbf{z} vektor a mechanizmus 2-es tagjához van kötve, így annak az első pozícióban mért φ szöge a második pozícióban a hajtókar megkívánt elfordulásával, azaz α szöggel tér el. Az előzőeket figyelembe véve az (1) és (2) vektorhurkok x , illetve y tengelyre eső vetületei négy skalár egyenletet alkotnak, melyek

$$f_1 = x_A + w \cos \sigma + z \cos \varphi - b = 0 \quad (3)$$

$$f_2 = y_A + w \sin \sigma + z \sin \varphi = 0 \quad (4)$$

$$f_3 = x_A + w \cos(\sigma + \beta) + z \cos(\varphi + \alpha) = 0 \quad (5)$$

$$f_4 = y_A + w \sin(\sigma + \beta) + z \sin(\varphi + \alpha) = 0 \quad (6)$$

Az f_1, \dots, f_4 négy darab nemlineáris egyenlet az $x_A, y_A, w, z, \varphi, \sigma, \beta$ változók meghatározására. Mivel az ismeretlenek száma hét, ebből hármat önkényesen megválaszthatunk. Az A csukló helyét szeretnénk úgy megadni, hogy a 2. ábra is látható módon, a 2 jelű tag a mozgástartományán kívül essen és az y tengely negatív oldalán helyezkedjen el. Ennek a feltételnek az $x_A = -0,06$ és $y_A = -0,05$ m választás megfelel. A fennmaradó megválasztható ismeretleneket úgy választjuk meg, hogy a P pont mozgása során annak x koordinátája ne legyen nagyobb a P_1 kiinduló pont x koordinátájánál (azaz a P ne mozogjon P_1 -től jobbra). Ezt akkor érjük el, ha a φ szög legalább olyan meredek, mint az A és P pontokat összekötő egyenes, azaz $\varphi \geq \tan^{-1}(|y_A|/(b + |x_A|))$. Ennek a feltételnek a $\varphi = 5^\circ = 0,087266 \text{ rad}$ választás megfelel.

A (3)-(6) nemlineáris egyenletrendszer így négy egyenlet a w, z, σ, β ismeretlenek meghatározására, melynek megoldását az Octave matematikai szoftverrel végeztük el. A számítás eredményei az alábbiak:

$$w = 0,31201 \text{ m} \quad (7)$$

$$z = 0,34993 \text{ m} \quad (8)$$

$$\sigma = 0,062544 \text{ rad} \quad (9)$$

$$\beta = -1,3391 \text{ rad} \quad (10)$$

Ha a mechanizmus D oldali ágát tekintjük, akkor a 3. ábra megfelelően az $\mathbf{u} = \overrightarrow{OD}$, $\mathbf{s} = \overrightarrow{CP}$ és $-\mathbf{r}_P = \overrightarrow{PO}$ vektorok alkotnak egy zárt hurkot (a C és D pontok mindig egybeesnek). A két kívánt helyzethez tartozó vektorhurkok az alábbiak szerint írhatók fel:

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_{P1} = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_2 + \mathbf{s}_2 = \mathbf{0} \quad (12)$$

A D pontba mutató helyvektort koordinátái $\mathbf{u}(x_{D1}, y_{D1})$, míg az \mathbf{s} vektort az $s=|\mathbf{s}|$ állandó hosszával és az x tengellyel bezárt szögével írjuk fel. A 3. ábrának megfelelően az \mathbf{s} vektor az első helyzetben ψ szöggel adott iránya a második helyzetben $\psi + \alpha$ szögre változik, mivel az \mathbf{z} vektor a mechanizmus 2-es tagjához van kötve, így annak az első pozícióban mért szöge a második pozícióban a hajtókar megkívánt elfordulásával tér el.

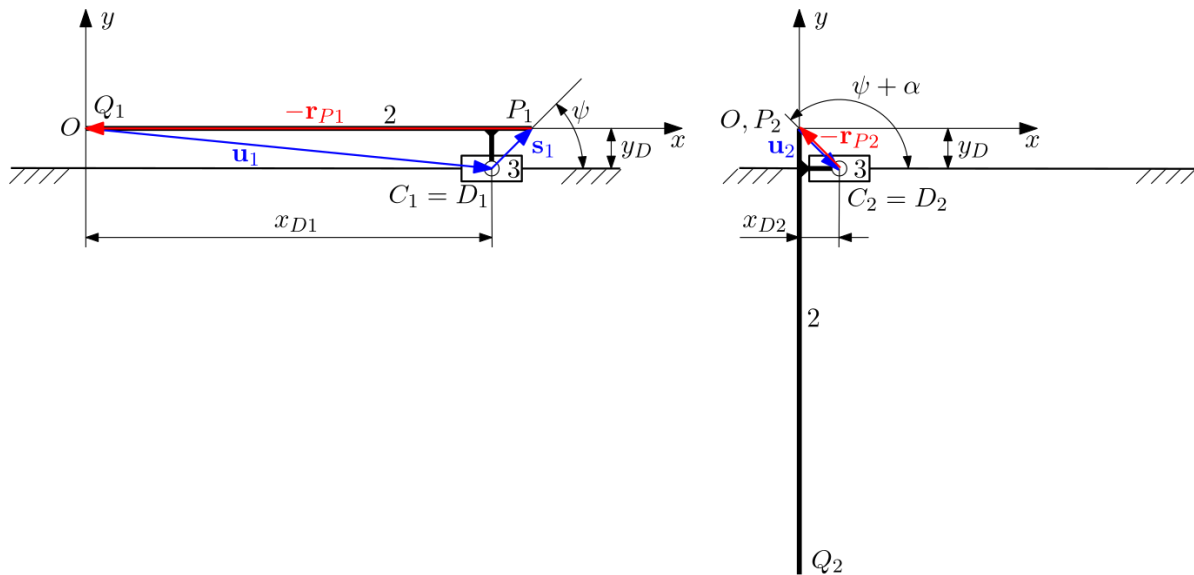
Az előbbieket figyelembe véve a (11) és (12) vektorhurkok x illetve y tengelyre eső vetületei négy skalár egyenletet alkotnak, melyek

$$f_1 = x_{D1} + s \cos \psi - b = 0 \quad (13)$$

$$f_2 = y_{D1} + s \sin \psi = 0 \quad (14)$$

$$f_3 = x_{D2} + s \cos(\psi + \alpha) = 0 \quad (15)$$

$$f_4 = y_{D2} + s \sin(\psi + \alpha) = 0 \quad (16)$$



3. ábra. A mechanizmus D oldali vektorhurkai a két kívánt helyzetben

Az f_1, \dots, f_4 négy darab nemlineáris egyenletet jelent az $x_{D1}, x_{D2}, y_D, s, \psi$ változók meghatározására. Mivel az ismeretlenek száma öt, ebből egyet megválaszthatunk. A D csúszkának az y_D koordinátáját kívánjuk úgy megadni, hogy a csúszka tengelye ne legyen túl távol az x tengelytől, másfelől a helyzetanalízist is elvégezve látható, hogy amennyiben a D_2 pont távolabb van az y tengelytől, mint a B_2 pont, akkor az 1 jelű tag szögelfordulását választva elsődleges koordinátának, a mechanizmusnak nem lesz holtponthelyzete. Az említett feltétel akkor áll fenn, ha $|y_D| > z \cos \varphi$, azaz $|y_D| > 0,030498 \text{ m}$. Ennek fényében $y_D = -0,06 \text{ m}$ értéket választjuk. A maradék négy ismeretlent a (13)-(16) egyenletek alkotta egyenletrendszer megoldásával kapjuk:

$$x_{D1} = 0,54 \text{ m} \quad (17)$$

$$x_{D2} = 0,06 \text{ m} \quad (18)$$

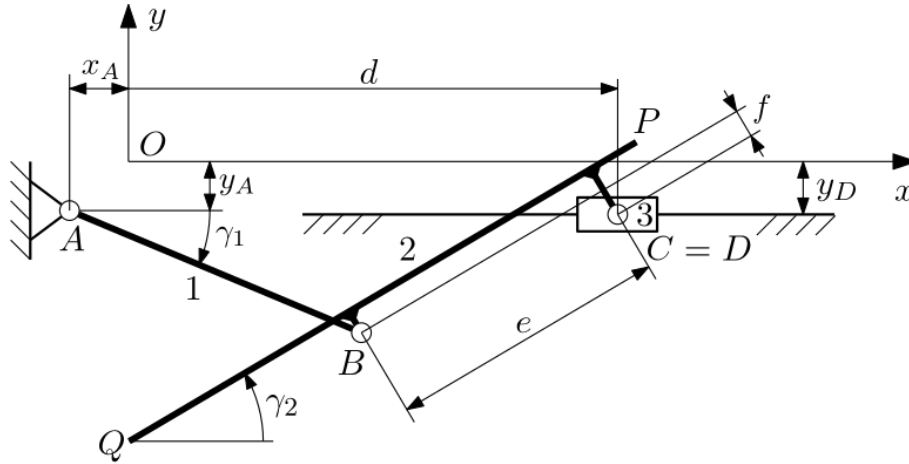
$$s = 0,084853 \text{ m} \quad (19)$$

$$\psi = 0,78540 \text{ rad} \quad (20)$$

A (7)-(10) és (17)-(20) számeredmények közvetlenül megadják az AB távolságot, a D csúszka helyét, a P pont relatív helyét a B és C csuklókhoz képest, valamint a tagok véghelyzeteit. Továbbá segítségükkel számítható a BC távolság és annak véghelyzetekben mért szöghelyzete.

4. Helyzetanalízis

A szerkezet helyzetanalízise abból áll, hogy a vizsgálat tárgyát képező mechanizmus szabadságfokának megfelelő számú elsődleges (független) koordináta függvényében megadjuk a mechanizmust alkotó összes tag helyzetét leíró koordinátákat. Az adott mechanizmus szabadságfoka egy, ezért egy elsődleges koordináta elegendő a mechanizmus mozgásának egyértelmű leírásához.



4. ábra. A mechanizmus helyzetanalíziséhez használt méretek és koordináták

A tagok helyzetét valamely pontjának helyével és a tag szöghelyzetével adjuk meg. A vizsgált mechanizmus 1 jelű tagjának A pontjának helye rögzített és mivel a 4. ábra szerint a feltüntetett γ_1 szöghelyzetet választjuk elsődleges koordinátának, az 1 jelű tag helyzete ismertnek tekinthető. A 3 jelű tag D pontjának y_D koordinátája és a szöghelyzete (a csúszka x tengellyel párhuzamos tengelye) szintén rögzített, így a 4. ábrán feltüntetett d koordinátáját kell meghatároznunk γ_1 elsődleges koordináta függvényében. Mivel az 1 jelű tag mozgása ismert γ_1 koordináta függvényében, így B pontjának helyét is ismerjük. Mivel a 2 jelű tag a B pontban csuklóval csatlakozik, a 2-es tag ezen pontjának helyét ismerjük, következésképp a 2 jelű tag γ_2 szöghelyzete a meghatározandó ismeretlen γ_1 elsődleges koordináta függvényében.

Az ismeretlen d és γ_2 koordináták a másodlagos koordináták, melyek meghatározásához a

$$\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{DO} = \mathbf{0} \quad (21)$$

vektorhurok x , illetve y tengellyel párhuzamos vetületi egyenleteit írjuk fel. A 4. ábra feltüntetett e és f méreteket a mechanizmus szintézise után geometriai úton meghatározhatjuk. Ezeket, illetve a többi ismert méretet és ismeretlen koordinátákat felhasználva a (21) egyenlet skalár egyenletei a

$$f_1 = x_A + w \cos \gamma_1 + e \cos \gamma_2 + f \cos \left(\gamma_2 + \frac{\pi}{2} \right) - d = 0 \quad (22)$$

$$f_2 = y_A + w \sin \gamma_1 + e \sin \gamma_2 + f \sin \left(\gamma_2 + \frac{\pi}{2} \right) + y_D = 0 \quad (23)$$

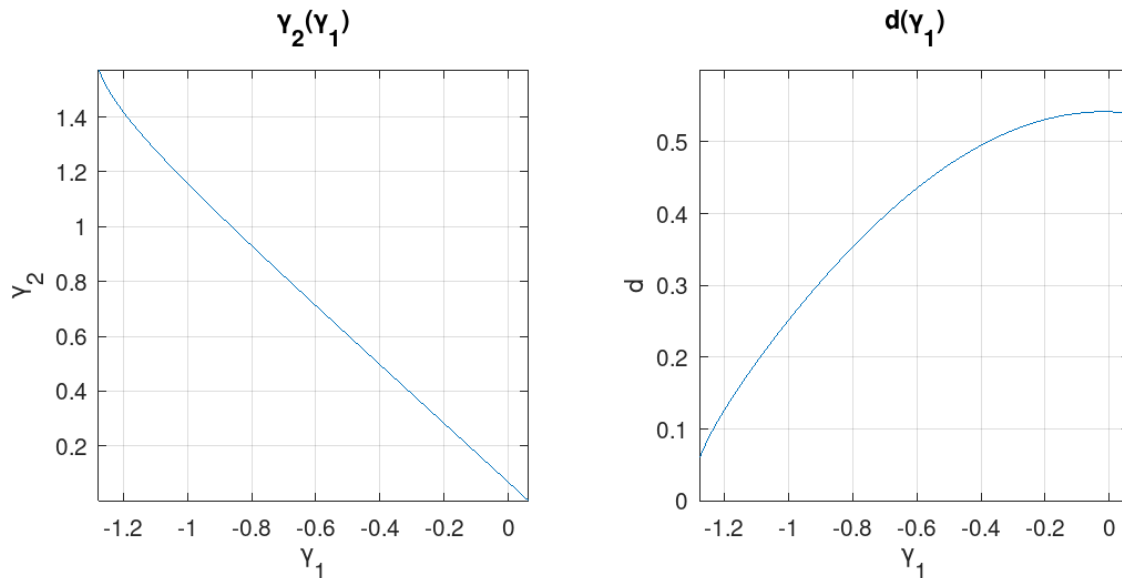
nemlineáris egyenletrendszer alkotják.

Mivel elsődleges koordinátaként a γ_1 szöveget választjuk, az egyenletrendszer

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial f_1}{\partial d} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial f_2}{\partial d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e \sin \gamma_2 - f \sin \left(\gamma_2 + \frac{\pi}{2} \right) & -1 \\ e \cos \gamma_2 + f \cos \left(\gamma_2 + \frac{\pi}{2} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Jacobi mátrixa a $\gamma_2 = 95,837^\circ$ szög esetén szinguláris, amely a mechanizmus kívánt mozgási tartományán kívül esik.

A γ_1 szögnek a mechanizmus kívánt mozgási tartományán belüli, megfelelően nagy számban választott diszkrét értékeivel megoldjuk a (22)-(23) nemlineáris egyenletrendszert d -re és γ_2 -re. Az 5. ábrán vázolt diagramok d és γ_2 koordinátákat ábrázolják γ_1 függvényében.



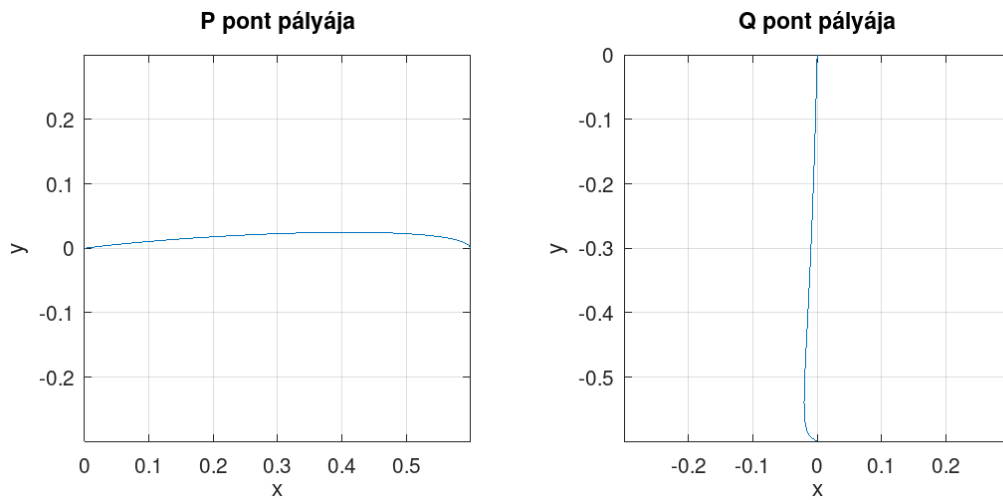
5. ábra. A másodlagos koordináták az elsődleges koordináták függvényében

Miután ismertté vált minden, a tagok helyzetét leíró koordináta, mint az elsődleges koordináta függvénye, bármely tag tetszőleges pontjának helye, illetve pályagörbéje előállítható a mozgási tartományon belül. Mivel a kívánt mozgást a mechanizmus 2 jelű tagja végzi, annak mozgását vizsgáljuk. A tag szögelfordulása az 5. ábrán is látható módon a kívánt $[0; \frac{\pi}{2}]$ tartományba esik. A P és Q pontjainak pályagörbéjét pedig az ismert pontjának helyéből kiindulva geometriai úton előállíthatjuk. A pályagörbét azonos lépték mellett a 6. ábra, míg eltérő lépték mellett felnagyítva a 7. ábra szemlélteti.

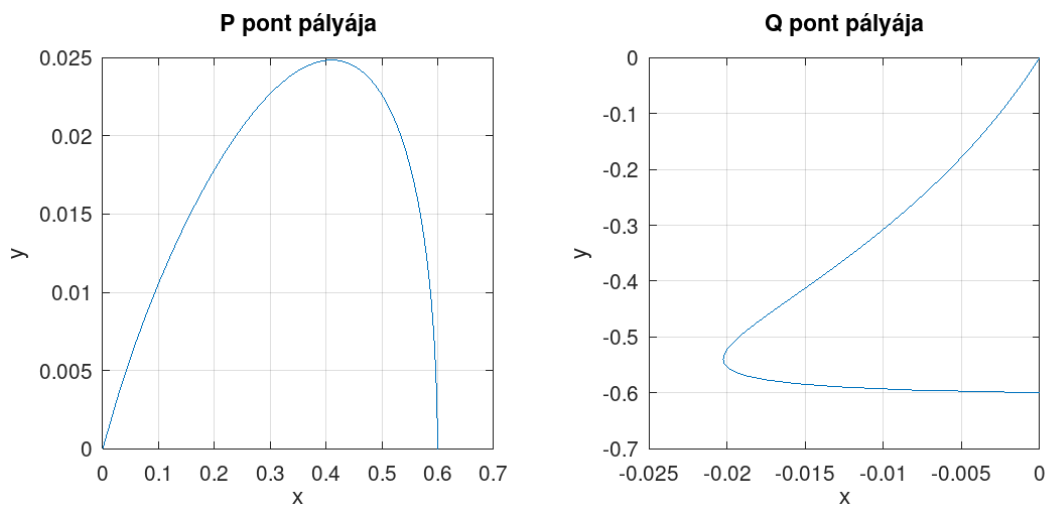
5. Összefoglalás

Bemutatásra került egy négytagú síkbeli RRRP mechanizmus analitikus szintézise és helyzetanalízise. A vektorhurkok módszerével alkotott nemlineáris egyenletrendszerek megoldásával egyes változók szabad megválasztása mellett számszerűen meghatároztuk a mechanizmus főbb méreteit, azaz az állványhoz tartozó csukló és csúszka helyét, valamint a mechanizmus mozgó tagjainak a kényszerek közötti távolságát, továbbá egymáshoz viszonyított relatív helyzetét.

Hurokegyenletek módszerével elvégeztük a mechanizmus helyzetanalízisét. A felírt nemlineáris egyenletrendszer alapján megállapítottuk, hogy a mechanizmus 1 jelű tagjának szögelfordulását választva elsődleges koordinátaként, a mechanizmusnak nincsen szinguláris helyzete a kívánt mozgási tartományon belül. A nemlineáris egyenletrendszert megoldva diagramok segítségével megadtuk a másodlagos koordinátákat az elsődleges koordináta függvényében, majd előállítottuk a mechanizmus 2 jelű tagja két pontjának pályagörbéit.



6. ábra. A P és Q pontok pályái azonos léptékű tengelyeken



7. ábra. A P és Q pontok pályái különböző léptékű tengelyeken

6. Köszönetnyilvánítás

A cikkben ismertetett kutató munka az EFOP-3.6.1-16-2016-00011 jelű „Fiatalodó és Megújuló Egyetem – Innovatív Tudásváros – a Miskolci Egyetem intelligens szakosodást szolgáló intézményi fejlesztése” projekt részeként – a Széchenyi 2020 keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Irodalom

- [1] Uicker, J. J., Pennock, G. R., Shigley, J. E.: *Theory of machines and mechanisms*, Oxford University Press, New York, 2011. ISBN 0195371232
- [2] Norton, R. L.: *Cam Design and Manufacturing Handbook*, Industrial Press, New York, 2002. ISBN 9780831133672
- [3] Erdman, A. G.: *Three and Four Precision Point Kinematic Synthesis of Planar Linkages*, Mechanism and Machine Theory, 16, 1981. pp.227-245.
[https://doi.org/10.1016/0094-114X\(81\)90038-0](https://doi.org/10.1016/0094-114X(81)90038-0)
- [4] Erdman, A. G., Sandor G. N.: *Mechanism Design: Analysis and Synthesis. Vol. 1. 3rd ed.*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1997. ISBN 0130408727
- [5] Subbian, T., Flugrad, J. D. R.: *Fourbar Path Generation Synthesis by a Continuation Method*, Journal of Mechanical Design, 112 No.1., 1991. pp. 63. <https://doi.org/10.1115/1.2912752>
- [6] Blechschmidt, J. L., Uicker, J. J.: *Linkage Synthesis Using Algebraic Curves*, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 108, December 1986. pp. 543-548.
<https://doi.org/10.1115/1.3258767>
- [7] Ananthasuresh, G. K., Kota, S.: *A Renewed Approach to the Synthesis of Fourbar Linkages for Path Generation via the Coupler Curve Equation*, Proc. Of 3rd Applied Mechanisms and Robotics Conference, Cincinnati, 1993. pp. 83-1
- [8] Youssef, A.H., Oldham, K., Maunder, L.: *Optimal Kinematic Synthesis of Planar Linkage Mechanisms*, Papers World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, 4. 1975. pp. 393-398.
- [9] Kramer, S. N., Sandor G. N.: *Selective Precision Synthesis – A General Method of Optimization for Planar and Spatial Mechanisms*, Journal of Engineering for Industry, 97, No.2, 1975. pp. 689-701. <https://doi.org/10.1115/1.3438634>
- [10] Angeles, J., Alivizatoss, A., Akhras, R.: *An unconstrained nonlinear least-square method of optimization of RRRR planar path generators*, Mechanism and Machine Theory, 23, No. 5., 1988. pp. 343-353. [https://doi.org/10.1016/0094-114X\(88\)90048-1](https://doi.org/10.1016/0094-114X(88)90048-1)
- [11] Aviles, R., Navalpotro, S., Amezua, E., Hernandez, A.: *An Energy-Based General Method for the Optimum Synthesis of Mechanisms*, Journal of Mechanical Design, 116, No. 1, 1994. pp. 127-136. <https://doi.org/10.1115/1.2919336>
- [12] Fang, W. E.: *Simultaneous Type and Dimensional Synthesis of Mechanisms by Genetic Algorithms*, Proc. Of 23rd Biennial Mechanisms Conference, Minneapolis, MN, pp. 239.
- [13] Ullah, I., Yannou, B.: *Dimensional Synthesis of Planar Path Generator Linkages Using Neural Networks*, Mechanism and Machine Theory, 32, No. 65, 1998.
- [14] Liu, A. X., Yang, T. L.: *Finding All Solutions to Unconstrained Nonlinear Optimization for Approximate Synthesis of Planar Linkages Using Continuation Method*, Journal of Mechanical Design, 121(3), 1999. pp. 368-374. <https://doi.org/10.1115/1.2829469>
- [15] Norton, R. L.: *Design of Machinery, 3rd ed.*, McGraw-Hill, New York, 2004. ISBN 0-07-247046-1
- [16] Kramer, G.: *Solving Geometric Constraint Systems: A Case Study in Kinematics*, MIT Press, Cambridge, 1992. pp. 155-158.
- [17] Wampler, C. W.: *Solving the kinematics of Planar Mechanisms*, Journal of Mechanical Design, 121(3), 1999. pp. 387-391. <https://doi.org/10.1115/1.2829473>