Miskolci Egyetem, Multidiszciplináris tudományok, 1. kötet (2011) 1. szám, pp. 79-86.

A SZEMCSÉK ÉS A SZEMCSEHALMAZOK NÉHÁNY GEOMETRIAI ÉS TOPOLÓGIAI KÉRDÉSÉRŐL

Dr. Lámer Géza
főiskolai tanár
Debreceni Egyetem, Műszaki Kar, Műszaki Menedzsment és Vállalkozási Tanszék
1119 Budapest XI.. Rátz L. u. 20.
glamer@eng.unideb.hu

Összefoglalás
A szemcsék egyszeresen összefüggő, sima, konvex, izometrikus alakzatok. Érintkező szemcsék alkotják a szemcsehalmazokat. Az előadásban két témakört tekintünk át. Az egyik egy szemcse alakjának geometriai jellemzése, a másik a szemcsehalmaz geometriai és topológiai leírása.

Kulcsszavak**:** szemcse, szemcsehalmaz, szemcsehalmaz geometriája és topológiája, szemcsehalmaz leképezése

Abstract
The heaps are simple connected, smooth, convex, isometric forms. The heaped body is formed from connected heaps. In the lecture two topics are overviewed. The first is the characterisation of the geometry of the heap, the second is the characterisation of the geometry and topology of the heaped bodies.

Keywords**:** heap, heaped body, geometry and topology of heaped bodies, maps of heaped bodies

1. A szemcsék geometriai jellemzése

A pont fogalmát a geometriából „vesszük”. A szemcse fogalmát a geometriában nem értelmezik. Ezért elsőnek tekintsük a szemcse hétköznapi fogalmát!

Hétköznapi értelemben szemcse alatt apró, kemény, szemmel jól látható, ujjjal jól tapintható szilárd részecskét értünk.

A természetben található, vagy mesterségesen előállított szemcsék közös tulajdonságait a méretükkel és a geometriai alakjukkal jellemezhetjük.

1.1 A szemcse nagysága

A szemcse „nagysága” egy jól meghatározható nagyságrendbe esik.

Szemcsének az tekintjük, ami vagy belefér a tenyerünkbe, tehát meg lehet markolni, vagy ujjunkkal ki lehet tapogatni és még szemmel látható. Ezért szemcsének tekintjük a kavicsokat, a homokszemeket, a homokliszt részeit, de talajmechanikai szempontból szemcsének tekinthetjük az iszapot és az agyagot alkotó részeket is.

1.2 A szemcse geometriai jellemzése

A szemcse, mint geometriai forma, a következő geometriai fogalmak segítségével jellemezhetők.

Összefüggés. A szemcsék alapvetően egyszeresen összefüggőek és tömörek.

Konvexitás. A szemcsék alapvetően konvexek. Sőt, szigorúan konvexek.

Simaság. A szemcsék felülete – élektől és pontoktól eltekintve – sima.

Az alak változása. A szemcsék felületének változása nem hirtelen, hanem lassú. Azaz a felületen egy, vagy két hullám, kiálló dudor, vagy bemélyedés, mint a görbület változása, nem túl hirtelen történik.

Izometria. A szemcsék kiterjedése minden irányban nagyjából azonos. Azaz a szabályos testek, a gömb, a háromtengelyű ellipszoid, ha a tengelyek aránya közel áll az egyhez, akkor szemcsének tekinthetők. A túlságosan lapos testeket, mint például a kártyák, vagy a túlságosan hosszúkásakat, mint például a gyufaszálak, nem tekintjük szemcsének.

Gömbölyítettség. A szemcséken ne legyenek éles sarkok, élek, csúcsok. Azaz egy kocka, vagy egy téglatest, vagy bármely poliéder nem „eléggé” szemcse. A már megkoptatott, legömbölyített formák viszont már a szemcsék közé tartoznak.

1.3 A szemcse intuitív definíciója

Definíció: szemcsének tekintjük az olyan, zárt felülettel határolt geometriai alakzatot, amely

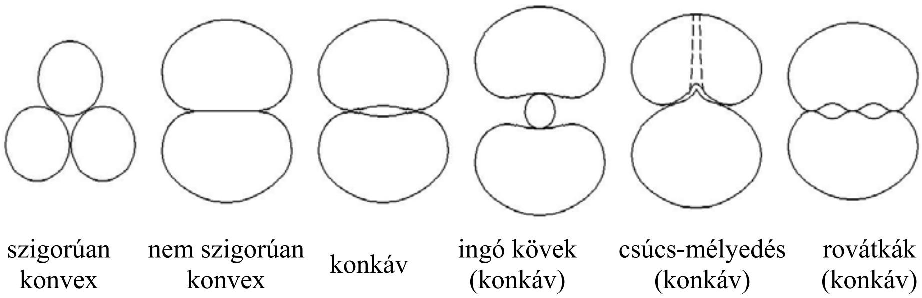
- kisebb, mint egy kavics, de nagyobb, mint egy kolloid részecske,
- egyszeresen összefüggő,
- konvex, vagy csak kis mértékben tér el egy konvex alakzattól,
- elegendően sima, vagy szakaszosan sima a felülete,
- felületének a változása elegendően lassú,
- jó közelítéssel izometrikusnak tekinthető,
- felülete kellően legömbölyített.

A definíciót intuitívnek tekintjük, mivel az 1.2 pontban ugyan áttekintettük a geometriai jellemzőket, de nem adtuk meg a precíz, matematikai definíciójukat.

1.4 A szemcse alakja és a hárompontos feltámaszkodás hipotézise

Egy szigorúan konvex szemcse feltámaszkodhat három másik (szigorúan konvex) szemcsére. Ezzel a szemcse egyensúlyba kerülhet (néhány további feltétel teljesülése esetén).

Az alábbi ábrák – két dimenzióban – mutatják a nem szigorúan konvex és a konkáv szemcsék esetén a különböző érintkezési módokat, amelyek nem teljesítik a hárompontos feltámaszkodás hipotézisét, ezért az egyensúly meghatározásához más feltételeket kell figyelembe venni (lásd az 1. ábrát).



1. ábra. *A szemcsék érintkezési viszonya a konvexitás-konkávitás függvényében*

1.5 A szemcsék leképezése

A szemcséket merev testnek tekintjük. Ennek megfelelően a leképezésük csak mérettartó (izometria) lehet. Ez az euklideszi térben az eltolás és az elforgatás.

2. A szemcsehalmazok geometriai és topológiai jellemzése

2.1 A szemcsehalmaz intuitív definíciója

Definíció: szemcsehalmaznak nevezzük a szemcsék olyan összességét, amelyben az egyes szemcséknek az érintkezési pontokon kívül más közös pontjuk nincs.

A definíció szerint szemcsék nem hatolhatnak egymásba. A szemcsék érintkezése megengedett, bár nem kötelező. A definíció a szilárd testekből, mint például a száraz kavicsokból álló halmazok tulajdonságát kellő pontossággal tükrözi vissza.

Végül érdemes kihangsúlyozni, hogy a vizsgálat tárgya – a szemcsék halmaza – alapvetően nem ponthalmaz, hanem véges tartományok összessége. Ezt nem csak érdemes, de szükséges is hangsúlyozni, mivel a ponthalmazok vizsgálatára jól kidolgozott matematikai diszciplínák sora – topológia, differenciálgeometria, differenciál- és integrálszámítás stb. – áll rendelkezésre, ugyanakkor a tartományok összességének a vizsgálatára a fenti matematikai eszközök minden megszorítás nélkül nem alkalmazhatók.

2.2 A szemcsék elrendezése a szemcsehalmazon belül

A szemcsét a halmazon belül jellemezhetjük a térbeli helyzetével, az érintkező szemcsék számával, az érintkezési pontok elhelyezkedésével, végül magát a szemcsehalmazt jellemezhetjük az érintkező szemcsék kapcsolatával (például mátrixként, vagy gráfként).

Térbeli helyzet; irányítottság

Egy merev (de a gyakorlatban egy deformálható szilárd) testet térben a helye és a helyzete határoz meg egyértelműen. Ehhez egyrészt egy referencia pontot, másrész egy referencia triédert kell a merev testhez rendelni. A gyakorlatban a súlypont és a főtehetetlenségi irányok alkotta kísérő triéder adja a szükséges referenciát. Szemcse esetén az átmérő, a másod- és harmadlagos átmérő metszéspontja és az átmérőkből alkotott triéder is adhatja a szükséges referenciát.

Érintkezési pontok száma: ez – értelemszerűen – azt adja meg, hogy hány szemcsével érintkezik az adott szemcse. Ha az érintkezési pontok száma kevesebb, mint 10-14, akkor annyi mondható, hogy az érintkező szemcsék átmérője nem lehet lényegesen nagyobb, mint a vizsgált szemcse átmérője. Ha csak néhány érintkezési pont van, és azok nagyjából egyenletes kiosztásban helyezkednek el a szemcse felületén, akkor az érintkező szemcsék lehetnek nagyobbak, azonos méretűek, vagy kisebbek. Ha 10-14-nél lényegesen több érintkezési pont van, akkor az érintkező szemcsék mérete jelentősen kisebb a vizsgált szemcse átmérőjénél. Ez akkor is igaz, ha ugyan az érintkezési pontok száma esetleg kevesebb 12-nél, de túl közel vannak egymáshoz.

Az érintkezési pontok eloszlása. A szemcsehalmaz egyensúlya szempontjából érdeklődésre számot tartó hárompontos hipotézis alapján hat, alul is és felül is három, az aktív érintkezési pontok száma, a kettő között lévő hat érintkezés nem aktív, esetleg nincs is, csak ott vannak a szemcsék a vizsgált szemcse körül (gondoljunk az egybevágó gömbök szabályos tetraéderes hálózatban való elhelyezkedésére).

2.3 Konvex burok és átlagképzés a szemcsehalmazban

Tekintsünk egy egyszeresen összefüggő részhalmazt a szemcsehalmazban, és tekintsük ennek a konvex burkát (lásd a 2. a.) ábrát). Amennyiben a konvex burok és a részhalmaz közötti térbe (2. b.) ábra) a szemcsehalmaz eredeti elrendezése szerint belefér valamely szemcse, vagy szemcsék, úgy azt, vagy azokat vegyük a részhalmazhoz (2. c.) ábra). Ekkor azt mondjuk, hogy a konvex burkon belül maximális számú szemcse található, illetve egy konvex burkon belüli maximális részhalmazról beszélünk.

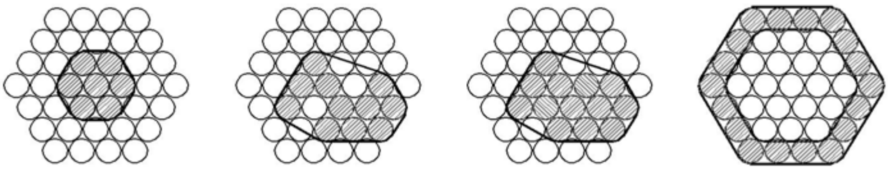
Definíció: ha egy részhalmaz konvex burka a részhalmazt kívülről érintő szemcsékből azoknak csak elenyészően kicsiny részét (mondjuk ⅓-adot) metszi el, akkor a részhalmazt konvex részhalmaznak nevezzük.

Megjegyezzük, hogy konvex részhalmazok egyesítése nem feltétlen konvex.

Definíció: egy konvex részhalmaz elsőrendű konvex környezetének azt a konvex részhalmazt nevezzük, amelynek a konvex burka és a (vizsgált) konvex részhalmaz (konvex) burka között a szemcséknek legalább egy rétege található.

Magyarán: az elsőrendű konvex környezet burka sosem simul rá a konvex részhalmaz konvex burkára, hanem a kettő között ott van egy, vagy néhány szemcséből álló „réteg”.

Az elsőrendű konvex környezet elsőrendű konvex környezete az eredeti konvex részhalmaz másodrendű konvex környezete. A továbbiakban – ennek mintájára – használni fogjuk az n-ed-rendű konvex környezet kifejezést is.



a.) konvex részhalmaz b.) nem konvex részhalmaz c.) egy konvex burkon belüli maximális részhalmaz d.) konvex környezet

2. ábra. *Konvex burok*

A fenti definíció alapján van egy szemcsének, illetve egy részhalmaznak első-, másod-, n-ed-rendű konvex környezete.

A szemcsehalmazban a ponthalmaz mintájára – a véges szemcseszám miatt – határátmenet nem képezhető. Ellenben az első-, másod- és n-ed-rendű konvex környezet segítségével egy-egy nagyobb tartományra nézve átlagos mennyiségek értelmezhetők.

Legyen például egy részhalmaz térfoga V_0, az elsőrendű környezetéé V_1 stb. Ekkor vizsgálható a V_1/V_0, V_2/V_0, …, V_n/V_0 sorozat, bár határátmenetről nem beszélhetünk, mivel a szemcsék mérete véges. Ezért valamiféle vizsgálatnak akkor van értelme, hogy ha a $(V_{i+1} - V_i)/V_i$ arány az 1 mellett elhanyagolható. Ha ez teljesül, és a fenti sorozat elemeinek egymástól való eltérése kicsi, akkor azt mondjuk, hogy a V_0 térfogat alkalmas *növekvő* konvex környezetekkel kvázi-konvergencia vizsgálatra. Azt is mondhatjuk, hogy a V_0 térfogat növekvő konvex környezetekkel kvázi-konvergens, vagy homogén tartomány. A V_1 mintájára értelmezhető a V_0, résztartományon belüli elsőrendű környezet, amelyet jelöljön V_{-1} stb. Ekkor, a növekvő konvergencia mintájára értelmezhető a V_{-1}/V_0, V_{-2}/V_0, …, V_{-n}/V_0 sorozat, és annak kvázi-konvergenciája: a $(V_{-i} - V_{-i-1})/V_{-i}$ arány az 1 mellett elhanyagolható. Ha ez teljesül, és az imént említett sorozat elemeinek egymástól való eltérése kicsi, akkor azt mondjuk, hogy a V_0 térfogat alkalmas *csökkenő* konvex környezetekkel kvázi-konvergencia vizsgálatra. Azt is mondhatjuk, hogy a V_0 térfogat csökkenő konvex környezetekkel kvázi-konvergens, vagy homogén tartomány. Végül, ha a V_0 térfogat mind csökkenő, mind növekvő konvex környezetekkel konvergens, akkor a V_0 térfogat alkalmas *változó peremű* konvex környezetekkel kvázi-konvergencia vizsgálatra, azaz a V_0 térfogat *változó peremű* konvex környezetekkel kvázi-konvergens, vagy homogén tartomány.

A V_0 – a kvázi-konvergencia bevezetéséből következően – nagyságrendben nagyobb, mint a szemcsék mérete. Azaz nem zárható ki, hogy ugyan a V_0 térfogat *változó peremű* konvex környezetekkel kvázi-konvergens, vagy homogén tartomány, azaz a peremek „kifelé”, illetve „befelé” történő kismértékű módosításával a tartomány jellege nem változik, de a vizsgált tartományon belül a konvex környezetek jellege eltér a V_0-ra vetített értéktől. Ezért csak a V_0 konvex környezetekkel értelmezett kvázi-konvergencia alapján nem lehet a V_0 térfogatot általában véve kvázi-konvergensnek, vagy homogénnek tekinteni. Magyarán egy tartomány fent bevezetett kvázi-konvergenciájának, illetve homogenitásának a vizsgálata arról ad felvilágosítást, hogy a peremhez közel, a peremen kívül és/vagy belül, nincsenek-e az eloszlást zavaró harások. Ezért a kvázi-konvergencia, azaz a homogenitás további két feltételét kell vizsgálni: az egyik a homogenitásnak a tartomány eltolásával, a másik a tartomány elforgatásával szemben mutatott invarianciája. A részleteket mellőzve: a fenti kvázi-konvergenciához hasonlót vizsgálunk, de nem a tartomány méretét növeljük, illetve csökkentjük, hanem a vizsgált tartományt toljuk el, illetve forgatjuk el. Ha a kvázi-konvergencia ezekben az esetekben is fennáll, akkor azt mondjuk, hogy fennáll az *eltolt* konvex környezetre, illetve *elforgatott* konvex környezetre vonatkozó kvázi-konvergencia.

Amennyiben egy V_0 térfogat *változó peremű*, *elforgatott* és *eltolt* konvex környezetekkel egyidejűleg kvázi-konvergencia vizsgálatra alkalmas, azaz kvázi-konvergens, vagy homogén tartomány, akkor az mondjuk, a tartomány kvázi-konvergencia vizsgálatra alkalmas, azaz kvázi-konvergens, vagy homogén.

A továbbiakban vizsgálni szükséges a szemcsehalmaz különbözőképpen történő lefedését konvex tartományokkal – hasonlóan ahhoz, ahogyan a differenciálható sokaságban a térképékekből atlasz áll elő. Ennek részletezéstől eltekintünk.

Megjegyzés: a fent leírt eljárás – a konvex környezetekkel kvázi-konvergencia vizsgálatra alkalmas tartomány bevezetése – alapvetően a ponthalmazok topológiája és a topológiai sokaságok értelmezésnek egyes lépéseit vette alapul. Rá kell arra is mutatni, hogy a topológiai sokaság esetén az a tény, hogy a sokaság minden pontjának van olyan környezete, amely homeomorf az Euklideszi tér egy környezetével, eleve garantálja, hogy a topológiai sokaságon a konvergencia biztosított legyen. Ráadásul nem tartományokként, hanem pontonként. A konvergenciának a szemcsehalmazban tapasztalt hiánya teszi szükségessé, hogy a szemcsehalmazokat diszkrét rendszerként vizsgáljuk. Végül jelezzük, hogy a kvázi-konvergens tartományon lehet a szemcsehalmazra nézve átlagos mennyiségeket értelmezni.

2.4 Konvex burok és érintkezés, mint topológia a szemcsehalmazban

A véges szemcsékből álló halmaz esetén nyílt és zárt halmazt – a ponthalmazban értelmezett nyílt és zárt halmazok mintájára – nem lehet értelmezni: a nyíltság és zártság a torlódási pont fogalmával van kapcsolatban. Ezért a környezet fogalmát felhasználva teszünk javaslatot topológia értelmezésére a szemcsehalmazon belül. Ehhez a konvex környezetet és az érintkezési hálózatot használjuk föl.

A konvex burokkal megadható egy szemcséknek egymáshoz való viszonya. Pontosabban a konvex burokkal értelmezett konvex részhalmazt a részhalmazban lévő minden szemcse környezetének tekintünk. A konvex szemcsehalmazok metszete konvex. Mivel két konvex részhalmaz egyesítés nem konvex, ezért a konvex részhalmazokat minden egyes szemcsére, annak első-, másod-, n-ed-rendű konvex burkát értelmezve állítjuk elő. Ezzel a szemcsék egymáshoz való viszonyát rögzítjük. Ez a környezeti rendszer – a ponthalmazokban megszokott értelemben – nem topológia, ugyanakkor a szemcsék egymáshoz viszonyított rendjét – mint a ponthalmazban a topológia – rögzíti.

Az érintkezéssel egy másfajta rend adható meg.

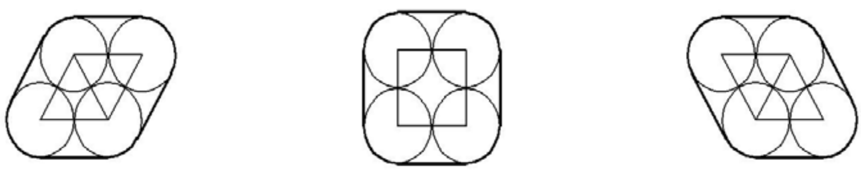
Definíció: érintkező szemcsék részhalmazának érintkezéssel értelmezett elsőrendű környezetének nevezzük az adott részhalmaz és annak szemcséit közvetlenül érintő szemcsék összességét.

Az érintkezéssel értelmezett elsőrendű környezet érintkezéssel értelmezett elsőrendű környezete az eredeti részhalmaz érintkezéssel értelmezett másodrendű környezete.

Ezen definíció alapján van egy szemcsének és egy részhalmaznak érintkezéssel értelmezett első-, másod-, n-ed-rendű környezete.

Az érintkezéssel értelmezett részhalmazok metszése és egyesítése, ez utóbbi esetben, ha legalább van egy közös elemük, érintkezéssel értelmezett részhalmaz, így az érintkezéssel értelmezett környezet fogalma átvihető a metszettel és az egyesítéssel értelmezett részhalmazokra is.

Megjegyezzük, hogy az érintkezéssel és a konvex burokkal értelmezett környezeti rendszer nem azonos. Erre példát a 3. ábrán mutatunk be.



3. ábra. *Az érintkezés és konvex burok szerinti topológia*

2.5 A szemcsehalmaz leképezése

A szemcsehalmaz leképezésénél abból indulunk ki, hogy szemcsék merev testek. Ennek megfelelően a szemcséket csak izometrikusan lehet leképezni. Ezt figyelembe véve a szemcsehalmaz leképezését a következőképen jellemezhetjük.

A szemcsehalmazban a szemcsék elrendezését a helyzetével, az érintkezéssel és a konvex burokkal értelmezett topológia jellemzi. A sorrend egyúttal „beágyazást” jelöl, a később említett csak úgy változhat, ha az „előtte” lévők változnak. Ennek megfelelően négy lehetőség van. Változatlan, egy, két, illetve mindhárom jellemző változik:

- izometrikus (identikus) leképezés, azaz minden változatlan (az egész halmaznak a merevtestszerű elmozdulásától eltekintve),
- a szemcséknek az érintkezésen alapuló topológiai rendje nem változik meg, legfeljebb egyes szemcsék helye és helyzete kis mértékben változik meg (két érintkező szemcse érintkező marad, az érintkezési pontok vándorolnak odébb),

- a szemcséknek a konvex burkolókon alapuló topológia rendje nem változik meg, legfeljebb néhány érintkezési viszony megszűnik, és néhány újabb keletkezik, továbbá az egyes szemcsék helye és helyzete kis mértékben változik meg,
- a szemcsék átrendeződével járó leképezés, amikor is mind az érintkezésen, mind a konvex burkolón alapuló topológiája megváltozik, ezzel együtt az egyes szemcsék helye és helyzete jelentősen megváltozik.

3. Összefoglalás

A tanulmányban áttekintettük a szemcsék és a szemcsehalmazok geometriai és topológiai jellemzőit. Megadtuk a szemcse és szemcsehalmaz intuitív definícióját. A szemcsehalmazban értelmeztünk konvex burokképzéssel és érintkezéssel egy-egy környezetet. Rámutattunk arra, hogy egyik sem vezet a ponthalmazokban megszokott topológiához, mivel a szemcsehalmaz véges számosságú. A konvex burkoló segítségével értelmezetünk egy kvázi-konvergencia fogalmat a szemcsehalmazokban. A környezetek segítségével osztályoztuk a szemcsehalmazok leképezéseit.

4. Irodalomjegyzék

[1] Bagi K., *Stress and strain is granular assembles* = Mech. Mater. Vol. 22. N. 3. pp. 165-177. 1996.

[2] Bagi K., *Szemcsehalmazok mikroszerkezetének vizsgálata*. Akadémiai Doktori Értekezés (Kézirat), Budapest, 2005.

[3] Budó Á.,. *Mechanika.* Ötödik kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

[4] Császár Á., *Bevezetés a topológiába*. Akadémia Kiadó, Budapest, 1970.

[5] Császár Á., *Valós analízis. I.-II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[6] Lámer G.: *Symmetry and asymmetry, or regularity and irregularity in the force distribution in the heaped bodies*. Culture and Science. Ed.: Darvas Gy. 17:221–233, 2006.

[7] Lámer G.: *Száraz, vizes, kötött szemcsék és a folytonos közeg, avagy a szemcsétől kontinuumig*. In: Török Á. – Vásárhelyi B. szerk., Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008. Konferencia (Budapest, 2008. november hó 26.), [A Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtára 7. kötet], pp. 271-286. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.

[8] Lámer G.: *Egy szemcse egyensúlya: kinematikai (túl)határozatlanság és statikai határozottság*. In: Pokorádi László szerk., Műszaki Tudomány az Észak-Alföldi régióban 2010. (Nyíregyháza, 2010. május hó 19.), pp. 53-58, Debreceni Akadémia Bizottság Műszaki Szakbizottsága, Debrecen 2010.

[9] Lámer G.: *Szemcsék halmaza és a talaj oldalnyomása.* In Geotechnika 2010. (Ráczkeve, 2010. október hó 26-27.): Közháló