Miskolci Egyetem, Multidiszciplináris tudományok, 1. kötet (2011) 1. szám, pp. 103-110.

MÁTRIXALGEBRAI HIBAFA-ÉRZÉKENYSÉGELEMZÉS

Pokorádi László
egyetemi tanár
Debreceni Egyetem, Műszaki Kar, 4028 Debrecen, Ótemető u. 2-4.,
pokoradi@eng.unideb.hu

Összefoglalás
A tanulmány egy moduláris megközelítésű, könnyen algoritmizálható hibafa érzékenység elemzési módszert mutat be, mely repülőgép rendszerek és gázturbinás hajtóművek matematikai modellezési eljárásain alapszik. A tanulmány fő célja a lineáris matematikai diagnosztikai modellezési módszerek alkalmazásával a Lineáris Hibafa Érzékenységi Modell (LFTSM) módszertanának kidolgozása és egy példán keresztül az alkalmazási lehetőség szemléltetése

Kulcsszavak: *hibafa elemzés, érzékenység vizsgálat, LFTSM*

Abstract
In this paper, a modular approach, easy-useable fault tree sensitivity investigation method using matrix-algebraic method based upon the mathematical modelling of aircraft systems and gas turbine engines has been introduced. The main aim of this study is to show the adaptation of linear mathematical diagnostic modelling methodology for setting-up of LFTSM and its possibility of use to investigate Fault Tree sensitivity by a demonstrative example.

Keywords: *Fault Tree, Sensitivity analysis, LFTSM*

1. Bevezetés

Technikai rendszerek megbízhatósági vizsgálatainak egyik legelterjedtebb módszere a hibafa elemzés (FTA — Fault Tree Analysis). A hibafa-elemzés érzékenyvizsgálatának célja annak meghatározása, hogy az adott hibafa elemi események bekövetkezési valószínűségeinek változásaira milyen mértékben reagálnak — mennyire érzékenyek — a hozzá kapcsolódó közbülső események és a főesemény bekövetkezési valószínűségei.

A hibafa-elemzés során egy valós vagy feltételezett rendszerhibából, az úgynevezett főeseményből (Top Event) indulunk ki, és fokozatosan derítjük fel azokat az alkotóelem és részrendszer meghibásodási lehetőségeket, melyek az adott, nem kívánt esemény bekövetkezéséhez vezetnek vagy vezethetnek. Az elemző munkát fastruktúrájú gráf megjelenítés segíti, amit különböző, például megbízhatósági számításokkal is ki lehet egészíteni. Módszertanát a [3] és [4] szabványokból tudjuk megismerni. Számítógéppel segített hibafa-elemzés módszertanát ismerteti Ferdous, szerzőtársaival a [2] irodalomban.

A hibafa-érzékenységelemzések korábban alkalmazott módszere esetén a kiértékelést úgy végezzük el, hogy a hibafa egyik elemi eseményéhez nagy, majd kis értékű meghibásodási rátát rendelünk. Amennyiben a kiszámított rendszer-megbízhatósági paraméter, azaz a főesemény bekövetkezési valószínűsége, nem változott számottevően, akkor ez az elemi esemény nem bír nagy kockázati jelentőséggel. Viszont, ha a rendszer-megbízhatósági paraméter változása jelentős mértékűre adódott, akkor az adott elemi eseményt további megbízhatósági vizsgálatok alá kell helyezni.

Csiba elemzései során az érzékenységi együtthatók meghatározásához a csúcsesemény bekövetkezési valószínűségét leíró teljes függvény elemi események bekövetkezési valószínűségei szerinti parciális differenciál hányadosait képezte [1]. Ezen eljárás hátránya az, hogy egy nagyméretű, összetett hibafa esetén viszonylag nagy a hibázás lehetősége. Pokorádi [5] könyvében vizsgálta a technikai rendszerek lineáris érzékenységi modelljeinek felállítási és alkalmazhatósági lehetőségeit. A Szerző a repülőgép gépészeti rendszereinek lineáris diagnosztikai eljárásait alkalmazta a hibafa-elemzés relatív érzékenységvizsgálatára, valamint a Lineáris Hibafa Érzékenységi Modell (LFTSM — Linear Fault Tree Sensitivity Model) módszerét dolgozta ki [6].

Jelen tanulmány a hibafa-elemzés érzékenységvizsgálatának, a fenti eljárástól eltérő, moduláris megközelítésű, mátrixalgebrai módszerét mutatja be a szerző által kidolgozott LFTSM alkalmazásával.

A tanulmány az alábbi részekből áll: A 2. fejezet a Hibafa-elemzést mutatja be röviden. A 3. fejezet az érzékenységvizsgálat teljes derivált módszerét írja le. A 4. fejezet egy egyszerű mintapéldán keresztül szemlélteti az előzőleg ismertetett módszer alkalmazását. Végül az 5. fejezet összegzi a tanulmány elkészítésekor szerzett tapasztalatokat és megfogalmazza a Szerző jövőbeli célkitűzéseit.

2. A Hibafa-elemzés

A hibafa-elemzés során egy feltételezett rendszerhibából, az úgynevezett főeseményből (Top Event) indulunk ki, és fokozatosan derítjük fel azokat az alkotóelem és/vagy részrendszer meghibásodási lehetőségeket, melyek az adott, nem kívánt esemény bekövetkezéséhez vezetnek vagy vezethetnek. Az elemző munkát fastruktúrájú gráf megjelenítés segíti, amit különböző, például megbízhatósági számításokkal is ki lehet egészíteni.

Egy (nem elemi) esemény bekövetkezési valószínűsége meghatározható az azt kiváltó események — melyek lehetnek elemi vagy alacsonyabb szintű közbülső események — bekövetkezési valószínűségeinek, illetve a kapcsolatot leíró logikai kapu ismeretében, azaz:

ÉS kapu — amikor a kimeneti esemény csak akkor következik be, hogyha az összes bemeneti esemény bekövetkezik — esetén:

$$P = \prod_{i=1}^{k} P_i \quad , \tag{1}$$

VAGY kapu — azaz, ha a kimeneti esemény akkor következik be, hogyha legalább egy bemeneti esemény bekövetkezik — esetén:

$$P = 1 - \prod_{i=1}^{k} \left(1 - P_i\right) \quad . \tag{2}$$

ahol:

P_i — az i-edik kiváltó esemény bekövetkezési valószínűsége;

$P_i \in [0,1] \subset \Re \;\; \forall \mathrm{i} \in \{1,2,...,\mathrm{k}\}$

$k \quad k \in \aleph$ — a kiváltó események száma.

3. Érzékenységi modell felállítása

A hibafa-elemzés érzékenyvizsgálatának célja annak meghatározása, hogy az elemi események bekövetkezési valószínűségeinek változásaira milyen mértékben reagál — mennyire érzékeny — a közbülső események és a főesemény bekövetkezési valószínűsége [6].

Az érzékenységi modell felállítása során mindegyik logikai kapuhoz kapcsolódó valószínűségi leírás — lásd (1) és (2) egyenletek — alapján a kimenő esemény bekövetkezési valószínűségének érzékenységi függvénye és együtthatói.

A Lineáris Hibafa Érzékenységi Modell (LFTSM — Linear Fault Tree Sensitivity Model) felállításához a logikai kapukat külön vizsgálva írjuk le azok érzékenységi függvényeit, és határozzuk meg együtthatóit.

Általánosan egy y kimenő jellemző x_i bemenő jellemzővel szembeni érzékenységi együtthatója a

$$K_{y;x_i} = \frac{\partial f(x_1;x_2;\ldots x_k)}{\partial x_i} \frac{x_i}{f(x_1;x_2;\ldots x_k)} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \tag{3}$$

parciális differenciálegyenlettel adható meg, amely egyenlet a paraméterek relatív változásai közti kapcsolatot — azaz a kimenő jellemző relatív érzékenységét — írja le [6].

A hibafa elemzéseknél alkalmazott logikai kapuk érzékenységi együtthatóit az alábbiak szerint határozhatjuk meg:

ÉS kapu esetén:

$$K_i = 1 \qquad \forall i \in \{1,2,...,k\} \quad . \tag{4}$$

VAGY kapu esetén:

$$K_j = \frac{P_j}{P} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \left(1 - P_i\right) \quad . \tag{5}$$

Következő lépésként különválasztjuk a vizsgált hibafa eseményeit az elemi és nem-elemi (közbülső és fő-) eseményekre, mivel az utóbbiak mindegyike valamelyik logikai kapu kimenő (függő) változója. Az elemi és nem-elemi események bekövetkezési valószínűségeit az $\mathbf{x} \in \Re^{m \times 1}$, illetve $\mathbf{y} \in \Re^{n \times 1}$ vektorokba rendezzük. Ekkor a bekövetkezési valószínűségek

$$\delta y = \frac{dy}{y} \approx \frac{\Delta y}{y}$$

relatív változásai közti kapcsolat az

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{y} = \mathbf{B}\delta\mathbf{x} \tag{6}$$

mátrixegyenlettel tudjuk leírni, ahol:

$\mathbf{A} \in \Re^{n \times n}$	—	nem elemi események együttható mátrixa;
$\mathbf{B} \in \Re^{n \times m}$	—	elemi események együttható mátrixa;
$n \in \aleph$	—	nem elemi események száma
$m \in \aleph$	—	elemi események száma.

A $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \in \Re^{n \times m}$ (7)

mátrixalgebrai összefüggést felhasználva, a hibafa-elemzés **D** relatív érzékenységi mátrixát kapjuk meg, és a (6) egyenlet a

$$\delta\mathbf{y} = \mathbf{D}\delta\mathbf{x} \tag{8}$$

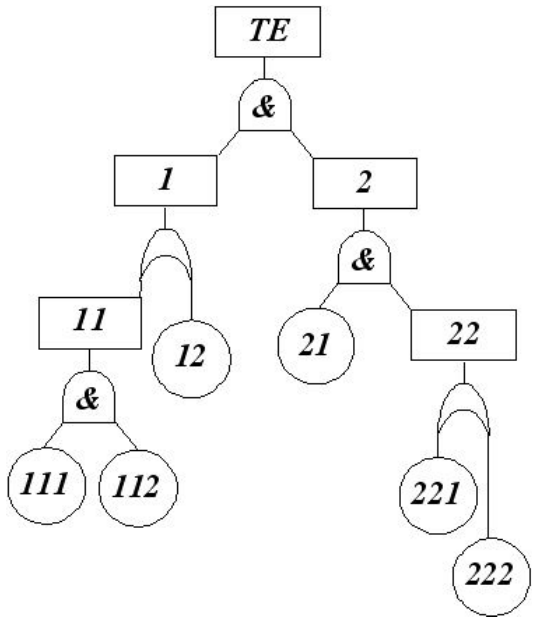
alakúra módosul.

A relatív érzékenységi mátrix *i*-edik sorának *j*-edik eleme azt mutatja meg, hogy az *i*-edik nem elemi esemény bekövetkezési valószínűségének relatív változását milyen mértékben befolyásolja a *j*-edik elemi esemény bekövetkezési valószínűségének relatív változása.

A mátrix első sora különösen fontos lehet, mivel az a főesemény bekövetkezési valószínűségének az elemi események bekövetkezési valószínűségeivel szembeni érzékenységi együtthatókat adja meg. A **D** mátrix ezen sorát, mint relatív érzékenységi (sor)vektort kezelhetjük, és $\mathbf{d}^T$ -vel jelöljük.

4. Érzékenységvizsgálat (Mintapélda)

Az 1. ábra az elemzéseink során alkalmazott hibafát szemlélteti.



1. ábra *Hibafa (mintapélda)*

Az ábrából leolvasható, hogy az 1; 2; 11 és 22 kódú események a közbülső események, míg a 12; 21; 111; 112; 221 és 222 számú események pedig elemi események. A vizsgált hibafa valószínűségi modellje:

$$P_{TE} = P_1 P_2 \tag{9}$$

$$P_1 = P_{11} + P_{12} - P_{11} P_{12} \tag{10}$$

$$P_2 = P_{21} P_{22} \tag{11}$$

$$P_{11} = P_{111} P_{112} \tag{12}$$

$$P_{22} = P_{221} + P_{222} - P_{221} P_{222} \tag{13}$$

További vizsgálatunkhoz először az elemi események — névleges (átlagos, jellemző) bekövetkezési valószínűségeit kell meghatároznunk, melyeket az 1. táblázat tartalmazza. Ezek alapján, a (13) – (9) egyenletek felhasználásával (visszafelé haladva) meghatározhatók a közbülső események, valamint a főesemény névleges bekövetkezési valószínűsége (2. táblázat).

1. táblázat *Kiinduló adatok*

P_{12} = 0,10	P_{21} = 0,20	P_{111} = 0,15
P_{112} = 0,25	P_{221} = 0,3	P_{222} = 0,10

2. táblázat *Számított (névleges) valószínűségi értékek*

P_{22} = 0,370	P_{11} = 0,03750
P_{2} = 0,074	P_{1} = 0,11375
P_{TE} = 0,0098975	

Az 1. ábrán szemléltetett hiba-fa, a (9) – (13) egyenletekkel leírt, valószínűségi elemzésének érzékenységi függvényei és együtthatói a következők:

$$\delta P_{TE} = K_1 \delta P_1 + K_2 \delta P_2$$
$$K_1 = 1 \qquad K_2 = 1 \tag{14}$$

$$\delta P_1 = K_{11} \delta P_{11} + K_{12} \delta P_{12}$$
$$K_{11} = (1 - P_{12}) \frac{P_{11}}{P_1} = 0{,}1525 \qquad K_{12} = (1 - P_{11}) \frac{P_{12}}{P_1} = 0{,}8305 \tag{15}$$

$$\delta P_2 = K_{21} \delta P_{21} + K_{22} \delta P_{22}$$
$$K_{21} = 1 \qquad K_{22} = 1 \tag{16}$$

$$\delta P_{11} = K_{111} \delta P_{111} + K_{112} \delta P_{112}$$
$$K_{111} = 1 \qquad K_{112} = 1 \tag{17}$$

$$\delta P_{22} = K_{221} \delta P_{221} + K_{222} \delta P_{222}$$
$$K_{221} = (1 - P_{222}) \frac{P_{221}}{P_{22}} = 0{,}4118, \; K_{222} = (1 - P_{221}) \frac{P_{222}}{P_{22}} = 0{,}4118 \tag{18}$$

Következő lépésként külön kell választanunk vizsgált hibafa eseményeit a — 12; 21; 111; 112; 221 és 222 — elemi és — TE; 1; 2; 11 és 22 — nem-elemi (fő- és közbülső) eseményekre, és ezek bekövetkezési valószínűségeit a

$$\mathbf{x}^T = [P_{12}; P_{21}; P_{111}; P_{112}; P_{221}; P_{222}] \quad , \tag{19}$$

$$\mathbf{y}^T = [P_{TE}; P_1; P_2; P_{11}; P_{22}] \tag{20}$$

vektorokba rendezzük.

A fenti vektorok ismeretében, valamint a (14) – (18) egyenletek alapján meghatározzuk a bekövetkezési valószínűségek relatív változásainak együttható mátrixait:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -K_1 & -K_2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -K_{11} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -K_{21}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -0{,}2523 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}; \qquad (21)$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & K_{21} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & K_{111} & K_{112} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{221} & K_{222}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}7196 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7297 & 0{,}1892\end{bmatrix} \qquad (22)$$

A relatív érzékenységi együttható mátrix:

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0{,}7196 & 1 & 0{,}2523 & 0{,}2523 & 0{,}7297 & 0{,}1892\\ 0{,}7196 & 0 & 0{,}2523 & 0{,}2523 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}7297 & 0{,}1892\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7297 & 0{,}1892\end{bmatrix}, \qquad (23)$$

illetve a relatív érzékenységi vektor:

$$\mathbf{d}^T=\begin{bmatrix}0{,}7196 & 1{,}0000 & 0{,}2523 & 0{,}2523 & 0{,}7297 & 0{,}1892\end{bmatrix}. \qquad (24)$$

Matematikailag megfogalmazva, a relatív érzékenység vektor elemei megmutatják, hogy az elemi események bekövetkezési valószínűségeinek relatív értékcsökkenése vagy növekedése a főesemény bekövetkezési valószínűségének milyen mértékű relatív csökkenését, illetve növekedését okozzák. Másképpen értelmezve: mely elemi esemény bekövetkezési valószínűségének változása bír a legnagyobb hatással a főesemény bekövetkezési valószínűségére.

Mérnöki szempontból ez azt mutatja meg, mely elemi eseményt létrehozó rendszerelem megbízhatóságának növelésével tudjuk a legnagyobb, mértékben javítani a teljes rendszer megbízhatóságát. Azaz, mely elemi események bekövetkezési valószínűségének csökkentését (például a konstrukciójának változtatását) célszerű elvégezni. A fenti eredmények műszaki, szakmai elemzése (például Pareto-elemzés alkalmazása) már túlmutat jelen tanulmány keretein.

5. Összefoglalás

A Szerző az utóbbi években kutatómunkát folytat annak feltárására, hogy a széles értelemben vett modellezési és rendszer bizonytalanság, valamint rendszerérzékenység elemzés és kezelés milyen módon oldható meg a leghatékonyabb formában. A kutatási program keretében készült ez a tanulmány is, mely egy új, könnyen algoritmizálható mátrixalgebrai módszert mutat be a hibafák érzékenységi elemzéséhez. A cikk egy egyszerű mintapéldán keresztül szemlélteti és igazolja az LFTSM (Linear Fault Tree Sensitivity Model — Lineáris Hibafa Érzékenységi Modell) eljárás használhatóságát. Az elemzőmunka egyértelműen bizonyította, hogy a repülőgépészeti rendszerek diagnosztikai elemzéseinél alkalmazott rendszerérzékenységi modellvizsgálati eljárások jól alkalmazhatóak a hibafa elemzések érzékenységvizsgálatához.

A Szerző további tudományos kutatómunkája során olyan tanulmányok elkészítését tűzte ki célként, amelyek leírják a modell- és rendszerbizonytalanságokat, illetve rendszer érzékenységeket, értelmezik, vizsgálják és szemléltetik azok elemzési módszereit.

6. Felhasznált irodalom

[1] Csiba J.: *Sensitivity Analysis of the Reliability Computed by Using the Failure Tree Method*, Proc. Of the 11th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies, 2008., Budapest, 749–760.

[2] Ferdous R., et al. *Methodology for Computer-Aided Fault Tree Analysis*, Trans IChemE Part B, Process Safety and Environmental Protection, 2007, 85 (B1): 70-80.

[3] I*EC (1990), Standard IEC 1025 Fault tree analysis (FTA)*, International Electrotechnical Commission, 39.

[4] *MSZ EN 1050 1999, Gépek biztonsága. A kockázatértékelés elvei*, Magyar Szabványügyi Testület, Budapest, 1999., pp. 22.

[5] Pokorádi L.: *Rendszerek és folyamatok modellezése*, Campus Kiadó, Debrecen, 2008., 242.

[6] Pokorádi L.: *Sensitivity Investigation of Fault Tree Analysis with Matrix-Algebraic Method*, Theory and Applications of Mathematics & Computer Science (ISSN: 2067-2764), 2011 Spring (April), Volume 1, Number 1, p. 34-44.