

HATÁRRÉTEG ÁRAMLÁS LEJTŐN

Vadászné Bognár Gabriella, Hriczó Krisztián

egyetemi docens, doktorandusz hallgató

Miskolci Egyetem, Analízis Tanszék, 3515 Miskolc-Egyetemváros

matvbg@uni-miskolc.hu, krisztian.hriczo@gmail.com

Összefoglalás

Ömlesztett anyagok vízszintes, lejtő- vagy emelkedőirányban történő szállításkor az anyagban kialakuló sebességeloszlást vizsgáljuk. A folyamatot határréteg áramlással modellezzük. A kontinuitási és a mozgásegyenletekhez peremfeltételek járulnak mind a mozgó síklap mentén mind a szállított anyag felületén. A sebességeloszlást különböző anyagjellemzők, állandó szállítószalag sebesség és különböző lejtőszög esetén vizsgáljuk.

Kulcsszavak: ömlesztett anyag, határréteg áramlás, hatvány törvény, nemnewtoni folyadék

Abstract

The velocity distributions on horizontal plane or an inclined plane are examined in the transport of bulk materials. This process is modelled by boundary layer flow. Boundary conditions are considered on the plane and on the surface of the transported material to the equations of continuity and motion. We examine the velocity distribution for different material properties, constant conveyor speed and different inclination angle.

Keywords: bulk material, boundary layer, power-law, non-Newtonian fluid

1. Bevezetés

A lejtőn való áramlás tulajdonságainak vizsgálata elméleti és gyakorlati jelentősége miatt sok kutató figyelmét felkeltette [1]-[3]. A folyamatosan áramló folyadék a gravitáció hatására állandósult lefelé történő mozgást végez, pl. a folyók áramlása. Ez a jelenség jelenik meg szállítószalagon való szállításkor és a kenélméletben is.

Granulált anyagok áramlásának leírása jelentős lehet geofizikai veszélyek, vagy ipari eljárások esetén ([3], [6], [8]-[11]). A szállítógépek az ömlesztett anyagot vagy darabárut, vízszintes, lejtő-, emelkedő- vagy függőleges irányban, általában folytonos anyagáramban és állandó üzemben továbbítják. A granulátumok áramlását leíró alapegyenletek határozzák meg, hogy hogyan mozog az anyag. Ezek az anyagok viselkedhetnek úgy mint szilárd anyag, vagy mint folyadék. A szemcsés folyadék jellemzői áramlás során függenek a nyírási sebességtől. Ebben az értelemben a granulált anyagok hasonlóságot mutatnak a klasszikus nem-newtoni folyadékokkal. Ebben a dolgozatban hatvány függvény szerinti összefüggést alkalmazunk a nyírási sebesség és nyírási feszültség között, a reológiai paramétereket kísérleti eredményekből határoztuk meg homok zagy esetén az [5] dolgozatban, agyagra pedig a Jiao és Sharma által publikált adatokat alkalmazzuk [8].

2. A folyamatot leíró egyenletek

Ömlesztett anyag szállítása során az anyagszemcsék mozgását határréteg áramlasként a Navier-Stokes egyenletekkel modellezzük (ld. [1], [3], [4], [6]-[12]). Viszkózus és összenyomhatatlan folyadékot tételezünk fel. Stacionárius megoldásokat keresünk. Az alapegyenletek a következők:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

a kontinuitási egyenlet és a Navier-Stokes egyenletből származtatott

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + g \sin \alpha, \quad (2)$$

mozgásegyenlet abban az esetben, ha nincs nyomásváltozás a folyamatban, ahol u és v a mozgó szállítószalag síkjával párhuzamos és arra merőleges sebesség komponenseket, ρ a szállított anyag sűrűségét jelöli, g a gravitációs gyorsulás, τ_{xy} pedig a feszültség tenzor megfelelő eleme, melyet a szállított anyagokra a hatványfüggvény törvény alkalmazásával a

$$\tau_{xy} = \gamma \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3)$$

alakban írunk fel, amelyben γ , n anyagjellemző konstansok. Az n kitevő értéke lehet egynél kisebb szám, mely pl. agyag esetén $n \approx 0,3$ [8], vagy lehet egynél nagyobb érték például homok [5], vagy száraz granulátum esetén, amikor ez az érték 2 körüli szám.

A feladathoz járuló peremfeltételek U konstans sebességgel lefelé mozgó szállítószalag esetén:

$$u|_{y=0} = U, \quad v|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=h} = 0. \quad (4)$$

A feltételben szereplő h az áramló réteg magasságát jelöli.

3. Határréteg áramlás newtoni folyadékok áramlása során

Newtoni folyadékok áramlása esetén a (3) kifejezésben $n=1$ és γ a dinamikus viszkozitást jelöli. Lejtőn lefelé történő állandósult, teljesen kifejldött, lamináris áramlás esetén

$$\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \sin \alpha = 0. \quad (5)$$

A vizsgált szállítás során nincs nyomásváltozás. Meghatároztuk az (5) egyenlet megoldását a következőképpen:

$$u(y) = -\frac{\rho g}{\gamma} \sin \alpha \frac{y^2}{2} + Ay + B. \quad (6)$$

Az egyenlethez járuló feltételeket figyelembe véve az A és B integrációs konstansok meghatározhatóak, tehát

$$u(y) = \frac{\rho g}{\gamma} \sin \alpha \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) + U. \quad (7)$$

A (7) megoldás a Navier-Stokes egyenletből származtatott (5) egyenlettel modellezett newtoni folyadékok ferde szállítószalagon történő szállítása során, a szállítószalag felületén szállított anyagban létrejövő határréteg áramlást írja le h magasság és U szállítási sebesség esetén. A (7) általános megoldásból meghatározható a q lokális térfogatáram

$$q = \int_0^h u dy = \frac{\rho g \sin \alpha h^3}{\mu} + U h.$$

4. Határréteg áramlás nem-newtoni folyadékok esetén

Ostwald-de Waele-féle hatványtörvény szerinti nemnewtoni folyadék α ferdeszögű szállítószalagon való szállításakor a (2) mozgásegyenlet a (3) felhasználásával

$$\left(\gamma u_y^n \right)_y + \rho g \sin \alpha = 0 \quad (8)$$

alakban írható fel, ahol γ és n kifejezi a szállított anyag nemnewtoni tulajdonságát. A nyomást ebben az esetben is állandónak tekintjük. A feladathoz ugyanazok a peremfeltételek járulnak, azaz $u_y|_{y=h} = 0$ és $u|_{y=0} = U$, melyekkel a megoldás:

$$u(y) = U + \left(\frac{\rho g}{\gamma} \sin \alpha \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left[h^{\frac{1}{n}+1} - (h-y)^{\frac{1}{n}+1} \right]. \quad (9)$$

A térfogatáram a $q = \int_0^h u dy$ integrállal nemnewtoni folyadékokra

$$q = Uh + \left(\frac{\rho g}{\gamma} \sin \alpha \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2n+1} h^{\frac{2n+1}{n}}.$$

Itt jegyezzük meg, hogy vízszintes felületen ömlesztett anyag szállításakor a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2}$$

kontinuitási és mozgásegyenlet írja le a folyamatot, azaz $\alpha = 0$.

5. Sebességeloszlás alakulása

A ferde szállítoszalagon állandósult sebességű anyagszállítás során a határrétegbeli anyagban a sebesség változását a (9) összefüggés adja meg.

A (9) képlet négy paramétert tartalmaz, melyek a következők:

- U a szállítoszalag szállító sebessége, amelyet állandó értéknek tekintünk a folyamatos szállítás során. Futószalagok szállítási sebességére léteznek ajánlások, melyekben a sebesség függ a szállított anyag tulajdonságaitól (szemcseméret, sűrűség stb.), a heveder szélességétől és a szállítás irányától, azaz lejtőn, emelkedőn vagy vízszintesen történik a szállítás.
- α a szállítoszalag vízszintessel bezárt szöge, mely jellemzi a szállítás irányát, ha $\alpha = 0$, akkor vízszintesen szállítunk, ha $\alpha > 0$, akkor lejtőn vagy emelkedőn történik a szállítás. A szög nagysága nagyban függ a szállított anyag tulajdonságaitól, a gyakorlatban általában $0-20^\circ$ között változik.
- γ a nemnewtoni folyadékként modellezett ömlesztett anyagok egy fontos jellemzője. Ez a paraméter függhet az anyagra nehezedő nyomástól, az anyag sűrűségétől és a hőmérséklettől is [5], [8]. A vizsgálataink során γ értékét konstansnak tekintettük.
- n a hatványmodell kitevőjében szereplő paraméter, mely szintén a szállított anyagtól függően különböző értékeket vesz föl [5], [8].

Modellünkben feltesszük, hogy a szállítás állandó hőmérsékleten és állandó nyomáson történik, így a γ és n értéke csak az anyag fajtájától fog függeni.

5.1. Agyagmassza

Feltesszük, hogy 1m széles gumihevederen szállítunk agyagmasszát, így az $U = 2.5 \text{ m/s}$ szállítási sebességgel, $h = 5 \text{ mm}$ határréteg magassággal és $\rho = 1070 \text{ kg/m}^3$ sűrűséggel számolunk. Ezen rögzített paraméterek mellett vizsgáljuk, hogy az α , γ és n paraméterek változása a sebességeloszlásban milyen változást idéz elő a határrétegben. Számításaink során a [2], [8] dolgozatokban megadott paraméter értékeket alkalmazzuk agyagmassza esetén.

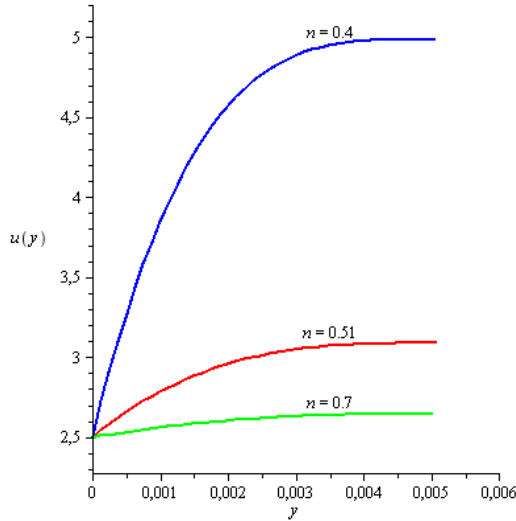
A vizsgált három paraméterből kettőt rögzítve, a harmadikat változtatva megvizsgáljuk az egyes paraméterek hatását a sebességeloszlásra.

Először az n hatványkitevő hatását tekintjük, amikor $\alpha = 15^\circ$ és $\gamma = 0,7 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{-n}$.

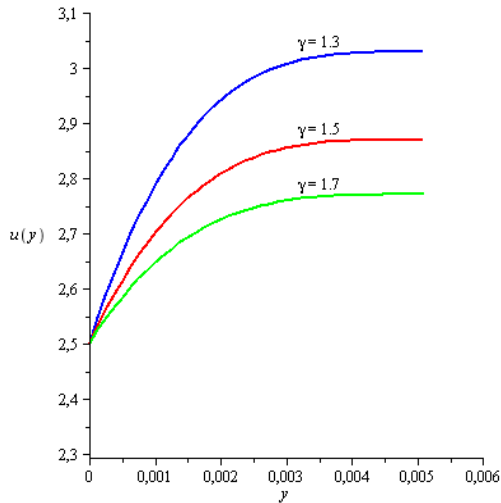
Az 1. ábrából egyértelműen leolvasható, hogy n értékének növelése a határrétegben bekövetkező sebességeloszlás maximumának csökkenéséhez vezet.

Következő vizsgált paraméter γ , az $\alpha = 15^\circ$ és $n = 0,4$ értékek rögzítettek.

Azt tapasztaltuk (lásd 2. ábra), hogy a γ paraméter értékének növelésével a sebességeloszlás maximum értéke csökken, de hatása kevésbé jelentős, mint az n paraméteré.

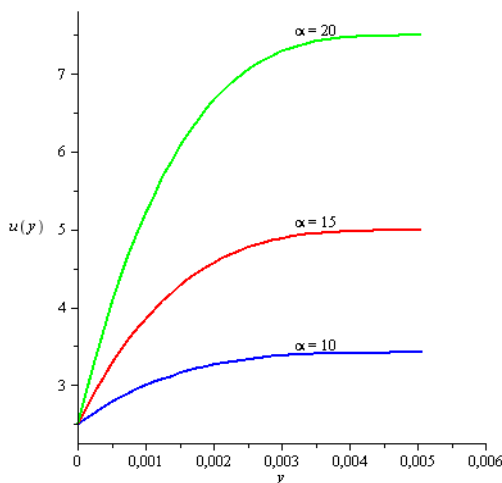


1. ábra.
Az n hatványkitevő hatása



2. ábra.
A γ paraméter hatása

Végül az α paraméter hatását vizsgáltuk meg, amikor $n = 0,4$ és $\gamma = 0,7 Pa \cdot s^{-n}$. A szállítószalag ferdeségének szögét változtatva, azt tapasztaltuk, hogy a határrétegben a sebességeloszlás maximuma nő, ha az α értékét növeljük, azaz meredekebb lejtőn szállítunk. Tehát összegezve a tapasztalatainkat, az α paraméter hatása az előző két paraméter, azaz n és γ hatásának az ellentettje.



3. ábra.
Az α paraméter hatása

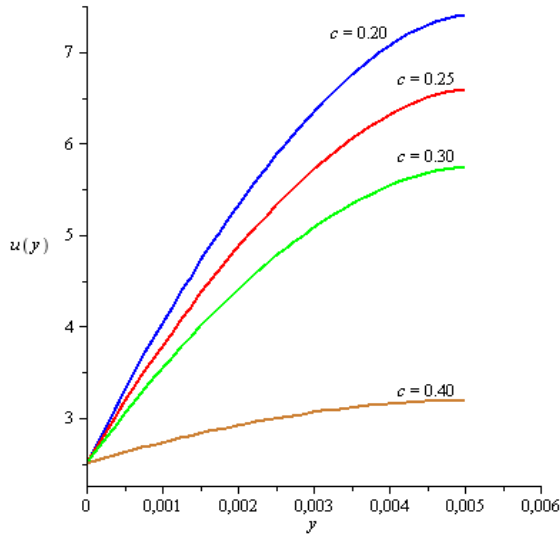
5.2. Homok zagy

A vizsgálatainkat az előző pontbeli feltételekkel folytatjuk, de γ és n paraméterekre a [5] dolgozatban ismertetett értékeket alkalmazzuk 25%-40% térfogat koncentráció esetén (lásd 1. táblázat).

1. táblázat. Paraméter értékek különböző koncentrációk esetén

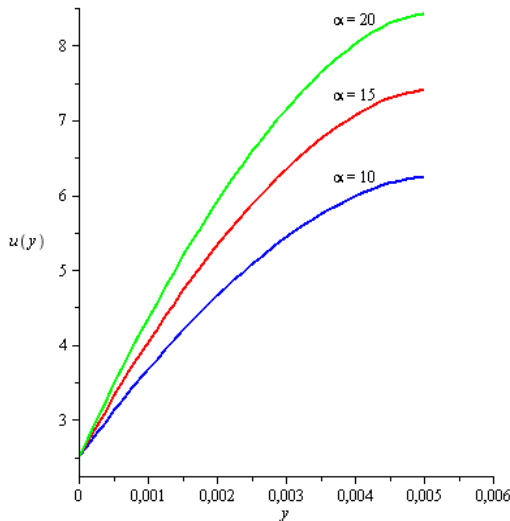
Víz-homok keverék térfogat koncentrációja c	γ	n	ρ [kg/m ³]
20 %	0.000313	1.475	1340
25 %	0.000538	1.444	1425
30 %	0.001388	1.360	1510
40 %	0.026902	1.211	1680

Először a c térfogat koncentráció hatását vizsgáljuk a víz-homok keverék esetén.



4. ábra

A sebesség eloszlás különböző koncentrációk esetén



5. ábra

Az α lejtőszög hatása a sebesség eloszlásra 20% térfogat koncentráció esetén

A numerikusszámításokat itt is a MAPLE 12 program csomaggal végeztük. A sebesség eloszlásokat a 4-5. ábrák szemléltetik. A számítások alapján a sebesség maximuma nagyobb koncentráció esetén csökken. Az α lejtőszög hatását elemezve az 5. ábra alapján megállapítható, hogy a sebesség maximuma nagyobb szög esetén megnő.

6. Köszönetnyilvánítás

A bemutatott kutatómunka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

7. Felhasznált irodalom

- [1] Ancey, C., *Flow down inclined channel as a discriminating experiment*, Research Riport 2003.
- [2] Benedetto, D., Caglioti, E., and Pulvirenti, M., *A kinetic equation for granular media*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 31, 5(1997), 615-641. Erratum in M2AN Math. Model. Numer. Anal. 33, 2 (1999), 439-441.
- [3] Benedetto, D., and Pulvirenti, M., *On the one-dimensional Boltzman equation for granular flows*, Phys. Fluids 16, 12 (2004), 4235-4247.
- [4] Bobylev, A. V., Cercignani, C. and Toscani, G., *Proof of an asymptotic property of self-similar solutions of the Boltzman equation for granular materials*, J. Statist. Phys. 111, 1-2 (2003), 403-417.
- [5] Bognár, G., Hriczó K., Gombkötő I.: *Non-Newtonian fluid flow down an inclined plane*, Proc. of the 9th ASME/WSEAS International Conference on Fluid Mechanics & Aerodynamics, Florence Italy August 23-25, 2011.
- [6] Cercignani, C., *Shear flow of a granular material*, J. Statist. Phys. 102, 5-6 (2001), 1407-1415.
- [7] Haff, P., *Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon*, J. Fluid. Mech. 134 (1983), 401-430.
- [8] Jiao, D., Sharma M. M., *Investigation of Dynamic Mud Cake Formation: The Concept of Minimum Overbalance Pressure*, SPE 26323, Proceedings of the SPE 68th Annual Technical Conference & Exhibition, Houston, TX, October 3-6, 1993.
- [9] Li, H., and Toscani, G., *Long-time asymptotics of kinetic models of granular flows*, Arch. Ration. Mech. Anal. 172, 3 (2004), 407-428.
- [10] Toscani, G., *Kinetic and hydrodynamic models of nearly elastic granular flows*, Monatsh. Math. 142, 1-2 (2004), 179-192.
- [11] Villani, C., *Topics in optimal transportation*, vol. 58 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [12] Villani, C., *Mathematics of granular materials*, J. Statist. Phys. 124 (2006), 781-822.