

A FORGÁCSOLT FELÜLET ANALITIKUS MEGHATÁROZÁSA ROTÁCIÓS ESZTERGÁLÁSNÁL

Sztankovics István

tanársegéd, Miskolci Egyetem, Gyártástudományi Intézet
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: istvan.sztankovics@uni-miskolc.hu

Absztrakt

Ebben a cikkben a forgácsolt felületet határozom meg rotációs esztergálásnál. Az eljárás koordináta-geometriai modelljének meghatározását követően egy eseten keresztül bemutatom a definiált koordinátatranszformációkat. A forgácsolt felület paraméteres egyenletrendszeréből kiindulva meghatároztam a keresett egyváltozós függvényt.

Kulcsszavak: forgácsolt felület, koordináta-geometria, rotációs esztergálás

Abstract

The cut surface is determined in this paper in rotational turning. After the determination of the coordinate-geometrical model of the procedure I show the defined coordinate transformation on a given case. Based on the one parametric equation system of the cut surface, I determined the sought one-variable function.

Keywords: cut-surface, coordinate geometry, rotational turning

1. Bevezetés

A különböző megmunkáló eljárások kutatásának a gyakorlati kísérletek mellett szükséges lépése a megfelelő matematikai leírás. Ezzel a technológiai tervezéshez nélkülözhetetlen számító képleteket, összefüggéseket lehet feltárni, melyeket a gyakorlati kísérletekkel összevetve lehetséges többek között az eljárás ipari gyakorlatban való optimalása is [1,2]. Az elméleti érdeség meghatározásához és a forgácsoló erő tapasztalati képletek útján való számításához szükséges a forgácsolt felület matematikai úton való meghatározása a különböző eljárásoknál.

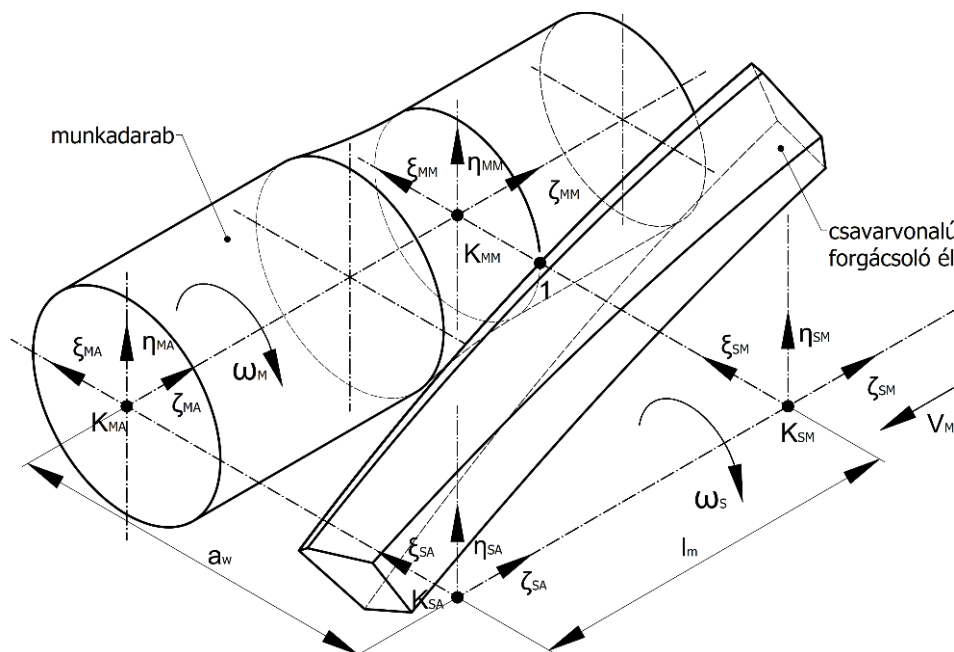
Rotációs esztergálásnál csavarvonal élgeometriájú szerszámmal végezzük a megmunkálást a munkadarab nagy és a szerszám kis forgási sebessége mellett [3,4]. A forgácsoló főmozgást a munkadarab kerületi sebessége jelenti, az előtoló mellékmozgást a szerszám körmozgása (körelőtolás) adja. Az eljárással köszörült minőségű felületek előállítására lehetséges határozott élgeometriájú szerszámmal. A komplex kinematika és geometria megnehezíti az egzakt matematikai leírást. Degen és társai [5] kutatásukban értelmeznek egy virtuális szerszámsugarat, melyet közelítéssel határoznak meg. Martikán és társai [6] ezen modellt vizsgálva megállapították, hogy az elméleti érdeség a megmunkált anyag keménysége szerint változik, amelyet a matematikai modell nem tud figyelembe venni.

Koordinátagéometriai leírással lehetséges komplex geometriai és kinematikai viszonyok leírása matematikai úton, mint például fogaskerék [7] vagy csigahajtás [8] kapcsolódások meghatározása. Perepelica által leírt módszer [9] lényege, hogy a szerszám és a munkadarab viszonylagos mozgásának leírásához az él vektorikusan felírt egyenletének transzformált alakjával előállítható a megmunkált felület egyenlete. Ehhez alkalmasan fel kell venni a szükséges koordinátarendszereket és fel kell írni a köztük kapcsolatot teremtő egyenleteket.

Ebben a cikkben a rotációs esztergálás koordinátagéometriai modellje alapján meghatározom a forgácsolt felület térbeli egyenletét és annak alapsíkbeli metszetét.

2. A rotációs esztergálás koordinátagéometriai modellje

A forgácsolt felület matematikai leírásához szükséges koordinátagéometriai modell alapja korábbi munkáimban meghatározásra került [10,11]. A matematikai leíráshoz 4 koordináta rendszert határoztam meg az 1. ábrán látható módon. Az ábrán K_i -vel jelöltem az egyes koordinátarendszereket. Négy koordinátarendszer felvételére volt szükség, mivel a munkadarabhoz és a szerszámhoz is kellett kötni 1-1 álló és mozgó koordináta rendszert (i : SM – szerszám mozgó, SA – szerszám álló, MA – munkadarab álló, MM – munkadarab mozgó). A mozgó koordináta rendszerek az 1 felületképző ponttal együtt mozognak, az álló koordináta rendszerek a gép munkaterében tetszőlegesen felvett koordináta rendszerek. A ξ_i, η_i, ζ_i tengelyek jobbsodrású koordinátarendszereket képeznek a következő módon: ζ_i párhuzamos a munkadarab forgástengelyével, ξ_i a szerszám és a munkadarab forgástengelye által meghatározott síkon van és merőleges a ζ_i -re, η_i pedig az előző kettőre merőleges. Az ábrán látható egyéb paraméterek: ω_s – szerszám szögsebessége, v_s – szerszám axiális előtoló sebessége, ω_m – munkadarab szögsebessége, a_w – a munkadarab és szerszám szimmetriatengelyeinek távolsága, l_m – álló és mozgó koordináta-rendszerek felvett kiindulási távolsága.



1. ábra. A rotációs esztergálás koordinátagéometriai modellje

A rotációs esztergáláshoz az él vektoregyenletét a szerszám mozgó koordináta rendszerében kell megadni. Ezt követően koordinátatranszformáció segítségével adjuk meg a szerszám mozgó és álló koordináta-rendszerei között a szerszám forgómozgását és kiegészítő axiális eltolását egy forgatómátrix és egy lineáris eltolás vektor segítségével az 1. egyenlet szerint. A q paraméter az eltelt időnek felel meg. A 2. egyenletben a szimmetriatengelyek távolságának megadása látható egy lineáris eltolásvektor segítségével a szerszám és a munkadarab álló koordináta-rendszerei között.

$$\mathbf{r}_{S,A}(q) = \begin{bmatrix} \cos\omega_s q & -\sin\omega_s q & 0 \\ \sin\omega_s q & \cos\omega_s q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{S,M} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_m - v_s q \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_{M,A}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{S,A}(q) + \begin{bmatrix} -a_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

A kinematikai leírás a 3. egyenletben válik teljessé, ahol a munkadarab forgómozgását adjuk meg egy forgatómátrix segítségével.

$$\mathbf{r}_{M,M}(q) = \begin{bmatrix} \cos\omega_m q & \sin\omega_m q & 0 \\ -\sin\omega_m q & \cos\omega_m q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{M,A}(q) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

3. A forgácsolt felület kétparaméteres egyenlete

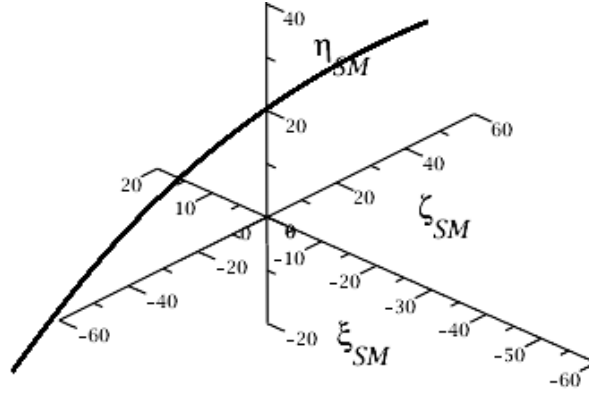
A koordinátageometriai leírás segítségével meghatározom a forgácsoló él munkadarabhoz kötött mozgó koordináta rendszerbeli egyenletét, amelyet az időben változtatva a forgácsolt felületet adja meg. A meghatározást lépésenként mutatom be, és az egyes lépések értelmezését diagramokon prezentálom. A vizualizációhoz az 1. táblázat értékeit használom, mely megfelel egy 80 mm átmérőjű darab rotációs esztergálásának egy 15°-os csavaremelkedési szöggel rendelkező, 32 mm átmérőjű szerszámmal, 0,31 mm munkadarab-fordulatonkénti előtolással és 290 m/min-es forgácsoló sebességgel. A példához az értékeket szakirodalmi ajánlások alapján állapítottam meg. A megoldásban szereplő, korábban nem definiált paraméterek: r_s – szerszám sugara, r_m – munkadarab megmunkált felületének sugara, λ_s – tere-lőszög, a csavarvonalú él emelkedését kifejező szög. A ξ_i , η_i , ζ_i vektorok ($i=SM,SA,MA,MM$) az adott koordináta tengelyek irányába eső egységvektorok.

1. táblázat. A leírás paraméterei az ábrázoláshoz

r_s	r_m	ω_s	ω_m	λ_s	l_m
16 mm	40 mm	0,1 1/s	120,77 1/s	15°	20 mm

Egy p paraméterű, ζ_{SM} szimmetriatengelyű, r_t sugarú és λ_s emelkedési szögű csavarvonal vektoregyenletét a 4. egyenlet szerinti alakban célszerű megadni. Az egyenletet az 2. ábrán mutatom be.

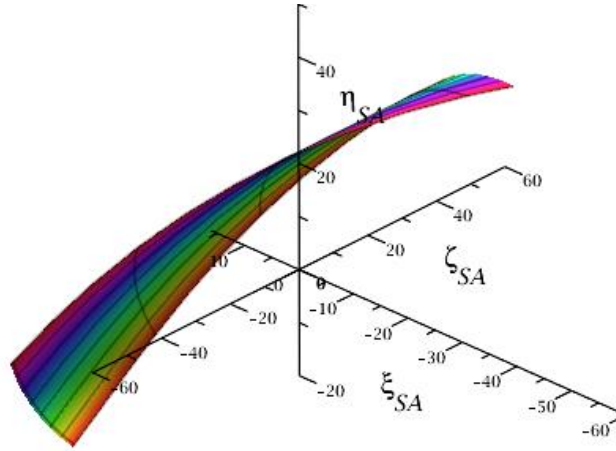
$$\mathbf{r}_{S,M}(p) = \mathbf{r}_{csavarvonal}(p) = r_t \cos(p) \xi_{SM} + r_t \sin(p) \eta_{SM} + r_t \cot(\lambda_s) p \zeta_{SM} \quad (4)$$



2. ábra. A forgácsolóél a szerszám mozgó koordináta rendszerében (K_{SM})

A 4. egyenletet az 1. egyenletbe beírva adjuk meg a szerszám kinematikai mozgását. Az eredményt az 5. egyenlet mutatja, mely $q = 0 - 0.01$ másodperc között a 3. ábrán látható. Az ábra jól prezentálja a forgácsoló él eltolását és ζ_{SA} tengely körüli elfordulását.

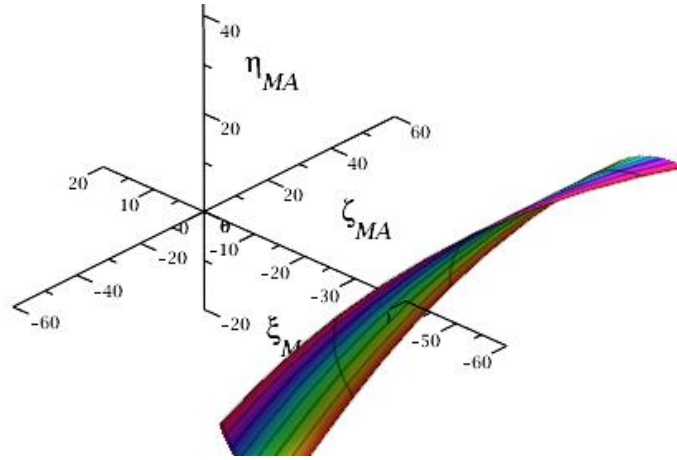
$$\mathbf{r}_{S,A}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = r_t [\cos(p)\cos(\omega_t q) - \sin(p)\sin(\omega_t q)] \boldsymbol{\xi}_{SA} + r_t [\cos(p)\cos(\omega_t q) - \sin(p)\sin(\omega_t q)] \boldsymbol{\eta}_{SA} + (r_t \cot(\lambda_S) p + l_m - v_t q) \boldsymbol{\zeta}_{SA} \quad (5)$$



3. ábra. A forgácsolóél által érintett felület a szerszám álló koordináta rendszerében (K_{SA})

A 6. egyenletben látható a 2. egyenlet szerinti transzformáció eredménye, amely a 4. ábrán látható módon egy tengelytávnyival tolja el a forgácsoló él mozgását.

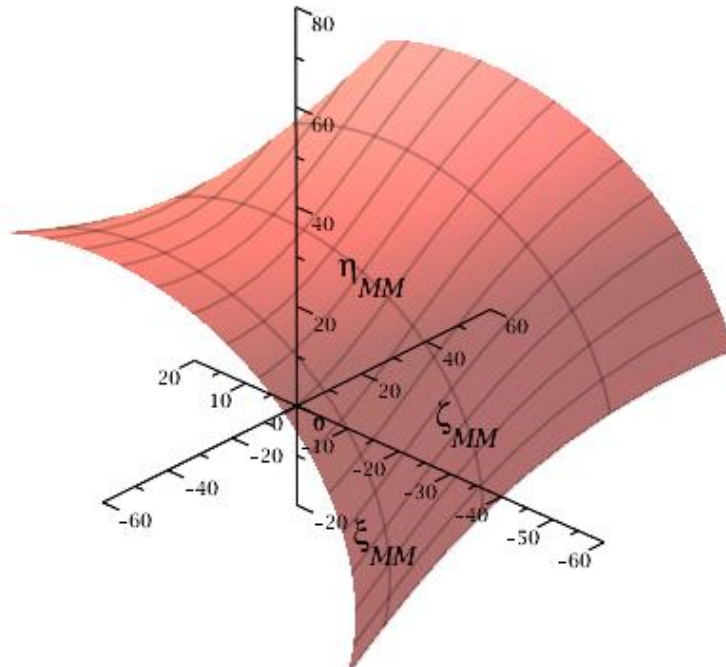
$$\mathbf{r}_{M,A}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (r_t [\cos(p)\cos(\omega_t q) - \sin(p)\sin(\omega_t q)] - (r_t + r_w)) \boldsymbol{\xi}_{MA} + r_t [\cos(p)\sin(\omega_t q) - \sin(p)\cos(\omega_t q)] \boldsymbol{\eta}_{MA} + (r_t \cot(\lambda_S) p + l_m - v_t q) \boldsymbol{\zeta}_{MA} \quad (6)$$



4. ábra. A forgácsolóél által érintett felület a munkadarab álló koordináta rendszerében (K_{MA})

Végül a 3. egyenlet szerinti utolsó transzformáció elvégzését követően a 7. egyenlet szerinti megoldást kapjuk. Ez a vektoregyenlet írja le a munkadarab és a szerszám kinematikai és geometriai viszonyainak komplex rendszerét, amelynek eredményeként az 5. ábrán látható a forgácsoló él által súrolt felület az idő függvényében.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{M,M}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = & (r_t[\cos(p - \omega_w q + \omega_t q) - \cos(\omega_w q)] - \cos(\omega_w q)r_w)\boldsymbol{\xi}_{MM} \\ & + (r_t[\sin(p - \omega_w q + \omega_t q) + \sin(\omega_w q)] + \sin(\omega_w q)r_w)\boldsymbol{\eta}_{MM} \\ & + (r_t \cot(\lambda_s)p - v_t q)\boldsymbol{\zeta}_{MM} \end{aligned} \quad (7)$$



5. ábra. A forgácsolóél által érintett felület a munkadarab mozgó koordináta rendszerében (K_{MM})

4. A forgácsolt felület alapsíkbeli metszetének egyenlete

A forgácsolt felület kétparaméteres egyenletéből (7. egyenlet) származtatható az alapsíkbeli metszet, amely szükséges többek között az elméleti érdekesség és a forgácskeresztmetszet meghatározásához.

Az alapsík a ζ_{MM} és ξ_{MM} tengelyek által kifeszített sík. Úgy kapjuk meg a 7. egyenlet ezen síkbeli metszetét, amikor az η_{MM} irányú összetevője nullával egyenlő. Ez a feltétel látható a 8. egyenletben.

$$\eta = r_t [\sin(p - \omega_m q + \omega_s q) + \sin(\omega_m q)] + \sin(\omega_m q) r_m = 0 \quad (8)$$

A 8. egyenlet feltétele alapján meg tudom adni a p paramétert a q időparaméter függvényében:

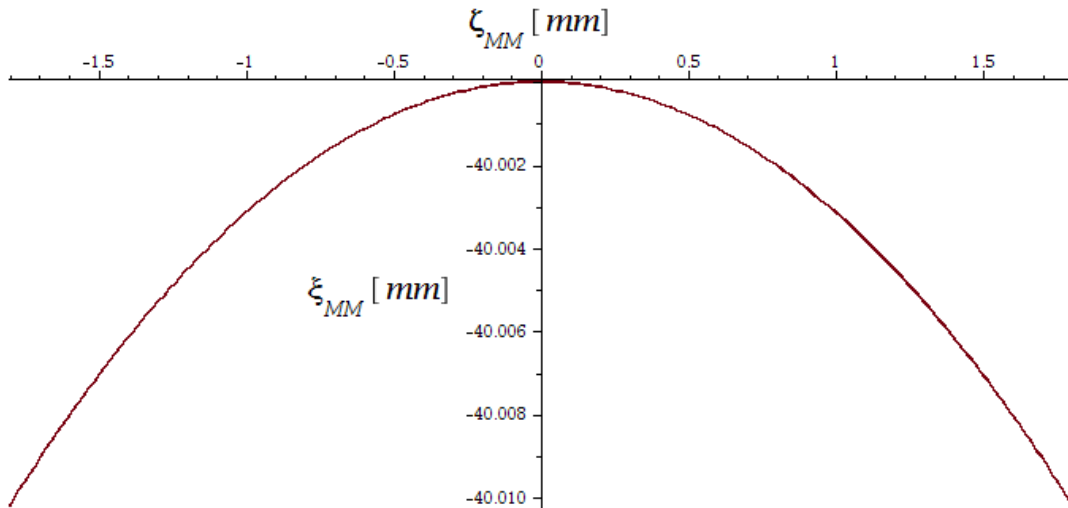
$$p(q) = -\arcsin \left[\frac{\sin(\omega_m q)(r_s + r_m)}{r_s} \right] + \omega_m q - \omega_s q \quad (9)$$

A 9. egyenletet a 7 egyenletbe visszaírva kapom meg a forgácsolt felület alapsíkbeli egyenletrendszerét a q időparaméter függvényében:

$$\xi_{MM}(q) = r_s \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\omega_m q)(r_s + r_m)}{r_s} \right)^2} - \cos(\omega_m q) \right] - r_m \cos(\omega_m q) \quad (10)$$

$$\zeta_{MM}(q) = r_s \cot(\lambda_s) \left(\omega_m q - \omega_s q - \arcsin \left[\frac{\sin(\omega_m q)(r_s + r_m)}{r_s} \right] \right) - v_s q \quad (11)$$

A 10-11. egyenleteket ábrázolom a 6. ábrán. Látható, hogy a szerszám éle az alapsíkban a $\zeta_{MM} = 0$ ponttól távolodva növekvő távolságra kerül a munkadarab sugarának megfelelő $\xi_{MM} = r_m = 40$ mm egyenestől.



6. ábra. A forgácsolt felület alapsíkbeli metszete paraméteres egyenletrendszerrel leírva

A 6. ábra szerint meghatározható az elméleti érdesség és a forgácskeresztmetszet is. Azonban a forgácsot jellemző paraméterek közül a forgácsszélesség matematikai-analitikai meghatározásához a függvény ívhosszának számításához (többek között) integrálást is végre kell hajtani. Ezért a $\xi_{MM}(q)$, $\zeta_{MM}(q)$ paraméteres egyenletrendszer alak helyett célszerűbb a $\xi_{MM}(\zeta_{MM})$ egyváltozós függvény alak használata. A q paraméter kifejezése az előbbi kettő egyenletekből azonban nem ad a műszaki gyakorlatban is jól kezelhető összefüggést, mivel a q paraméter többszörösen összetett függvények is tartalmazzák. Ezért közelítés alkalmazása mellett döntöttem.

A forgácsolt felület függvényének közelítéséhez a rendelkezésre álló lehetőségek közül Taylor-sor szerinti hatványsorba fejtés alkalmazása mellett döntöttem, mivel trigonometrikus és hiperbolikus jellegű függvények kis hiba mellett közelíthetőek. A hiba minimalizálásának érdekében nem a teljes függvényt, hanem annak csak egy tagját közelítettem. Ez a kiválasztott tag a 11. egyenletben látható arcsin-os tag lett. A tárgyalt tag $q = 0$ környezetében vett másodrendű Taylor-sorba fejtésének eredménye a 12. egyenletben, a negyedrendű sorba fejtés eredménye a 13. egyenletben látható. A rendűség növelésével csökken a hiba értéke, azonban nő a közelítés komplexitása, ahogy a két egyenlet alapján egyértelműen látható. A továbbiakban a másodrendű közelítés eredményét alkalmazom.

$$\arcsin \frac{\sin(\omega_m q)(r_s + r_m)}{r_s} = \frac{\omega_m q(r_s + r_m)}{r_s} \quad (12)$$

$$\arcsin \frac{\sin(\omega_m q)(r_s + r_m)}{r_s} = \frac{\omega_m q(r_s + r_m)(6r_s^2 + 2\omega_m^2 r_m r_s q^2 + \omega_m^2 r_m^2 q^2)}{6r_s^3} \quad (13)$$

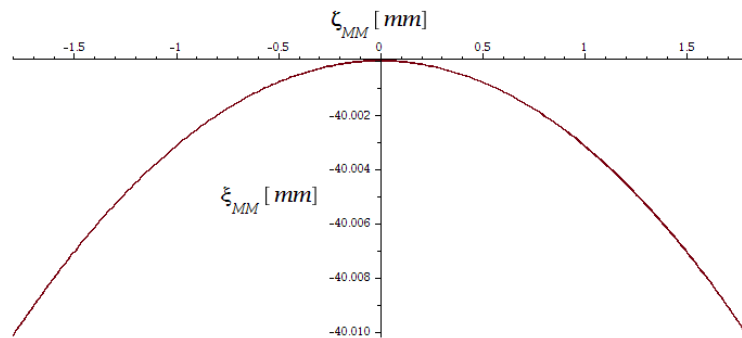
A 12. egyenlet szerinti helyettesítést a 11. egyenletbe beírva kifejezem a q paraméter értékét a ζ_{MM} függvényében az alábbi szerint:

$$q(\zeta_{MM}) = - \frac{\zeta_{MM}}{\cot(\lambda_s)\omega_m r_m + \cot(\lambda_s)\omega_s r_s + v_s} \quad (14)$$

A 14. egyenletet a 10. egyenletbe helyettesítve megkapom a keresett egyváltozós függvényalakot:

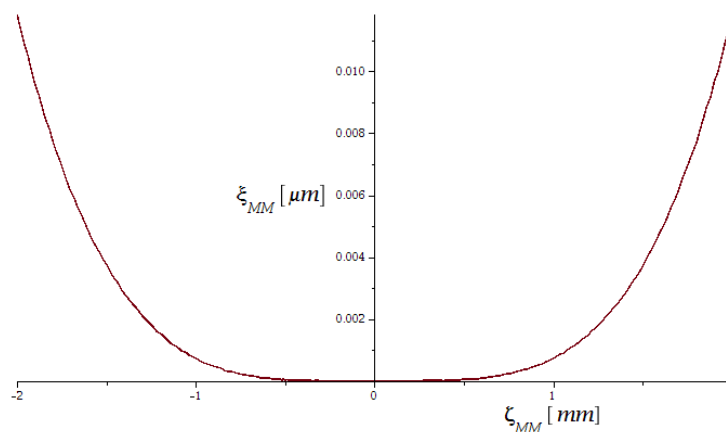
$$\xi_{MM}(\zeta_{MM}) = r_s \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega_m}{\cot(\lambda_s)\omega_m r_m + \cot(\lambda_s)\omega_s r_s + v_s} \zeta_{MM}\right)(r_s + r_m)}{r_s} \right)^2} - \cos\left(\frac{\omega_m}{\cot(\lambda_s)\omega_m r_m + \cot(\lambda_s)\omega_s r_s + v_s} \zeta_{MM}\right)(r_s + r_m) \quad (15)$$

A 15. egyenlet által leírt görbét mutatja a 7. ábra.



7. ábra. A forgácsolt felület alapsíkbeli metszete egyváltozós függvénnyel leírva

A 6. és 7. ábrákat vizsgálva megállapítom, hogy a közelítés jól sikerült. A 10-11. egyenletekben meghatározott egyaraméteres egyenletrendszer és a 15. egyenlet egyváltozós függvénye közötti különbséget a ζ_{MM} függvényében az 1. táblázat értékeinél a 8. ábra mutatja.



8. ábra. A paraméteres egyenletrendszerrel leírt és az egyváltozós egyenlettel leírt függvények közötti különbség ζ_{MM} függvényében

Látható, hogy a megadott értékek esetén az 1. ábrán jelölt „1” pontnál ($\zeta_{MM} = 0$) a hiba 0, hiszen a Taylor sor ezen érték körül került kifejtésre. Ettől a ponttól pozitív és negatív irányban növelve, illetve csökkentve ζ_{MM} értékét már számolhatunk hibával, ami $-2 < \zeta_{MM} < 2$ tartományon belül századmikron nagyságrendű eltérést mutat. Amennyiben a 13. egyenlet szerinti 4-edrendű közelítést alkalmazzuk, a hiba nagyságrendje a vizsgált tartományon százezredmikron nagyságrendű. Innen is látszik, hogy a közelítés rendiségének növelésével csökkenthető a hiba nagysága. Ugyanakkor az utóbbi esetben a 15. egyenlettel összetettebb alakot kapunk, ami a műszaki gyakorlatban való alkalmazhatóságát kérdőjelezi meg. Kutatásom folytatásaként célszerű megállapítani a rotációs esztergálást meghatározó geometriai és kinematikai paramétereknél, hogy milyen értékek esetén lehet a másodrendű közelítést alkalmazni, és mikor van szükség ettől pontosabb közelítésre.

5. Összefoglalás

A különféle megmunkáló eljárások kutatásánál a gyakorlati kísérletek mellett szükség van a vizsgálandó paraméterek elméleti értékeinek meghatározására. Ennek módja az eljárást jellemző geometriai és kinematikai paraméterek leírása matematikai alapokon. Rotációs esztergálásnál a csavarvonal geometriájú forgácsoló él, a munkadarab és a szerszám forgó mozgása, valamint a szerszám esetenkénti axiális irányú előtolása komplex feladattá teszi az elméleti leírást. Az eljárás koordináta geometriai modelljének segítségével meghatározásra került a forgácsolt felület paraméteres egyenletrendszere. Alkalmas közelítés választásával lehetségessé vált a forgácsolt felület alapsíkbeli egyenletének egyváltozós alakban való megadása. Ezen egyenlet segítségével analitikai alapokon számíthatóvá válnak az elméleti érdekesség paraméterei és a forgácsot jellemző paraméterek (keresztmetszet, szélesség, vastagság).

6. Köszönetnyilvánítás

A cikkben ismertetett kutató munka az EFOP-3.6.1-16-2016-00011 jelű „Fiatalodó és Megújuló Egyetem – Innovatív Tudásváros – a Miskolci Egyetem intelligens szakosodást szolgáló intézményi fejlesztése” projekt részeként – a Széchenyi 2020 keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Irodalom

- [1] Shaw, M. C.: *Metal Cutting Principles*, Oxford University P, New York, 651 p., 2005
- [2] Kundrák, J., Markopoulos, A. P., Makkai, T., Nagy, A.: *Theoretical and Experimental Analysis of the Effect of Chip Size Ratio on Cutting Forces in Face Milling of Steel*. International Journal Of Mechanical Engineering 3:1. pp. 29-35. 2018 <https://doi.org/10.21062/ujep/117.2018/a/1213-2489/MT/18/3/431>
- [3] J.G. Weisser Söhne GmbH & Co: Patent Anmeldung, St.Georgen, Germany, 2004
- [4] Kundrák, J., Gyáni, K., Deszpoth, I., Sztankovics, I.: *Some topics in process planning of rotational turning*. Engineering Review 34:1. pp. 23-32. 10 p., 2014
- [5] Degen, F., Klocke, F., Bergs, T., Ganser, P.: *Comparison of rotational turning and hard turning regarding surface generation*. Prod. Eng. Res. Devel. 8. pp.309-317. 2014 <https://doi.org/10.1007/s11740-014-0530-6>
- [6] Martikán, P., Czán, A., Holubják, J., Varga, D., Martinček, J., Czánová T.: *Verification of New Method of Determining the Roughness Parameters for Rotational Turning with Non-linear Cutting Edge*, Procedia Engineering 192. pp.563-568. 2017 <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.06.097>
- [7] Litvin, F. L., Fuentes, A.: *Gear Geometry and Applied Theory (second ed.)*. Cambridge University Press, p. 800, 2004 <https://doi.org/10.1017/CBO9780511547126>
- [8] Dudás, I.: *The Theory and Practice of Worm Gear Drives*. Penton Press, London, 2000, p. 314
- [9] Perepelica, B. A.: *Osznovü Teoriji proektyiroványija rézsusih insztrumentov*. Harkov, p. 55, 1974
- [10] Sztankovics, I., Kundrák, J.: *Mathematical description of machining external cylindrical surface in case of rotational turning*. Rezanie I Instrumenty V Tekhnologicheskikh Sistemah 82. pp. 264-269. 2012
- [11] Sztankovics, I., Kundrák, J.: *Mathematical Model of Machined Surfaces in Rotational Turning and Skiving*. Proceedings of the Thirteenth International Conference on Tools: ICT 2012. University of Miskolc, pp. 83-88. 2012