

## KÉPLÉKENY ALAKVÁLTOZÁS NEM ARÁNYOS TERHELÉS ALATT

**Ruszinkó Endre**

egyetemi docens, Óbudai Egyetem, Mechatronikai és Autótechnikai Intézet  
1081, Budapest, Népszínház u. 8, e-mail: ruszinko.endre@bgk.uni-obuda.hu

### **Összefoglalás**

Kutatásunk célja a képlékeny alakváltozás analitikai leírása nem arányos terhelésnél sík alakváltozás esetén, amikor a feszültségvektor hodográfja az Ilyushin feszültség-deviátor-térben nem egyenes, hanem törtvonal. Matematikai apparátusként a szintézis elméletet szolgál. Kutatásunk eredményképpen azt az arányos terheléstől való maximális eltérést határoztuk meg, amelynél a Hencky-Nádai-féle és szintézis elmélet szerinti eredmények még megegyeznek.

**Kulcsszavak:** képlékeny alakváltozás, nem arányos terhelés, szintézis elmélet

### **Abstract**

The paper concerns with the development of plastic strain in non-proportional loading, when the loading path is of two-segment nature, for the case of plane strain. The synthetic theory of irrecoverable deformation is taken as mathematical apparatus. The aim of the paper is to establish boundary deviations from the proportional loading at which the synthetic theory gives results identical with Hencky-Nadai deformation theory.

**Keywords:** plastics strain, non-proportional loading, synthetic theory

### **1. Bevezetés**

A képlékenységtanban [1-3] fontos szerepet játszik a nem arányos terhelés esete, amikor is az Ilyushin-féle feszültség-deviátor térben a feszültségvektor hodográfja törtvonalat ír le a képlékeny alakváltozás folyamata során. Olyan típusú terhelések bőven előfordulhatnak pl. a törésmechanika keretében [4], amikor a repedésterjedés folyamán a repedéscsúcs környezetében ébredő feszültség-növekmények különböző irányokban arányos, ill. nem arányos terhelést hoznak létre. A két terhelés éles megkülönböztetése nagy fontosságú, hiszen a terhelési típustól függően különböző elméletek használandók.

Célunk annak a vizsgálata, hogy (a) az arányos terheléstől való eltérés milyen hatással van a képlékeny alakváltozás növekményeire és (b) milyen eltéréseknél használhatók az arányos terhelésre alkalmas elméletek (pl. a Hencky-Nádai-féle [5,6] deformációs elmélet). A kitűzött célt a szintézis elmélet [7,8] keretében, síkbeli alakváltozási állapot esetében vizsgáltuk. Kutatásunk eredményképpen azt a maximális eltérést határoztuk meg, amelynél a Hencky-Nádai-féle és szintézis elmélet szerinti eredmények még megegyeznek.

Szélesebb értelemben, a cikk célja az arányos terhelés értelmezési tartományának bővítése a nem egyenes vonalú terhelési pályák esetére.

### 1.1. Képlékeny deformáció, síkbeli alakváltozási állapot esetében

Síkbeli alakváltozási állapotról beszélünk, ha az alakváltozástenzor azonos indexű három komponense (például  $z$ ) zérus:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (1)$$

A cikk keretében kizárólag kis képlékeny alakváltozásokkal foglalkozunk.

A Hencky-Nádai féle deformációs elmélet szerint a képlékeny alakváltozáskomponensek

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{3\gamma_0}{2\tau_0}(\sigma_{xx} - \sigma), & \varepsilon_{yy} &= \frac{3\gamma_0}{2\tau_0}(\sigma_{yy} - \sigma), & \varepsilon_{zz} &= \frac{3\gamma_0}{2\tau_0}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{3\gamma_0}{2\tau_0}\tau_{xy}, & \varepsilon_{xz} &= \frac{3\gamma_0}{2\tau_0}\tau_{xz}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{3\gamma_0}{2\tau_0}\tau_{yz} \end{aligned} \quad (2)$$

ahol  $\sigma$  hidrosztatikus feszültség,  $\gamma_0$  és  $\tau_0$  rendre a feszültség- és alakváltozástenzor második skalár invariánsa.

A fenti képletek figyelembevételével, a síkbeli alakváltozás összenyomhatatlan anyagban ( $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0$ ) akkor áll elő, ha:

$$\sigma_{zz} = \sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (3)$$

Ebből a (2) egyenlet:

$$\varepsilon_{xx} = -\varepsilon_{yy} = \frac{3\gamma_0}{4\tau_0}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{3\gamma_0}{2\tau_0}\tau_{xy}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_z = 0. \quad (4)$$

A feszültség- és az alakváltozástenzor második skalár invariánsa:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}, \\ \gamma_0 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \end{aligned} \quad (5)$$

### 1.2 Síkbeli alakváltozási állapot a szintézis elmélet keretében

A (2) képlet alapján a szintézis elmélet keretében definiált feszültségvektor-komponensek [7,8]:

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}), \quad S_2 = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2}\tau_{xy}. \quad (6)$$

A feszültségvektor

$$\vec{S} = S_1\vec{q}_1 + S_2\vec{q}_2 + S_3\vec{q}_3 = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{q}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}_2 \right) + \sqrt{2}\tau_{xy}\vec{q}_3, \quad \vec{S} \in \mathbf{R}^3 \quad (7)$$

alakban írható fel, ahol  $\mathbf{R}^3$  az Ilyushin-féle háromdimenziós feszültség-deviátor tér [7,8]. Itt  $\vec{q}_i$  ( $i=1,2,3$ ) az  $S_1, S_2, S_3$  koordináta-rendszer bázisvektorai. A vektorok összeadásának szabályából következik, hogy a vektor

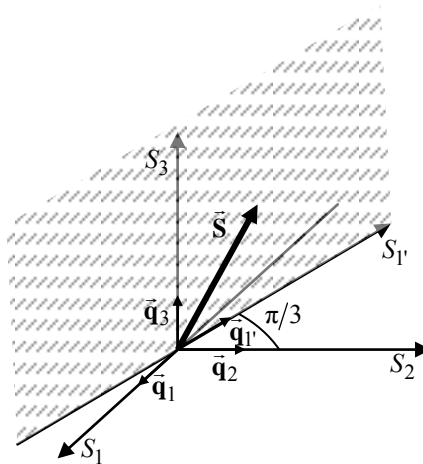
$$\bar{\mathbf{q}}_1' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\mathbf{q}}_1 + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}_2 \quad (8)$$

60°-os szöget zár be a  $\bar{\mathbf{q}}_2$  bázisvektorral (lásd az 1. ábrát). Továbbá,  $\bar{\mathbf{q}}_1' \cdot \bar{\mathbf{q}}_1' = 1$ , ami azt jelenti, hogy  $\bar{\mathbf{q}}_1'$  egységvektor és bázisvektornak tekinthető. Tehát, a feszültségvektor  $\bar{\mathbf{S}}$  a  $\bar{\mathbf{q}}_1'$  és  $\bar{\mathbf{q}}_3$  bázisvektor lineáris kombinációjaként felbontható:

$$\bar{\mathbf{S}} = S_1' \bar{\mathbf{q}}_1' + S_3 \bar{\mathbf{q}}_3 \quad (9)$$

ahol

$$S_1' = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2}\tau_{xz} \quad (10)$$



1. ábra. A feszültségvektor állása a síkbeli alakváltozási állapot esetén

A  $\bar{\mathbf{q}}_1'$  és  $\bar{\mathbf{q}}_3$  egység bázisvektorok alapján új koordináta rendszert vezetünk be ( $S_1', S_3$ ), amelyben további számításokat végzünk. Fontos megjegyezni, hogy  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  és  $\tau_{xy}$  komponensek értékétől függetlenül a feszültség vektor az  $S_1', S_3$  síkba esik (lásd a (9) képletet).

A szintézis elmélet keretében a folyási felület von-Mises gömb

$$S_1'^2 + S_2^2 + S_3^2 = 2\tau_S^2, \quad (11)$$

ahol  $\tau_S$  tiszta nyíráshoz tartozó folyáshatár. A folyási felület valamennyi pontjában érintőt húzunk, így a folyási felület az érintő síkok belső burkolatfelületének tekinthető. Megjegyzendő, hogy a (11) gömb minden pontján áthaladó érintőnek párhuzamos síkok végtelen halmaza felel meg; ezek a síkok folytonosan kitöltik az  $\mathbf{R}^3$  feszültségteret [7,8].

A síkok fizikai értelmezése az, hogy mindegyik síkhoz meghatározott csúszási rendszer rendelhető hozzá. Ezen a tényen alapul a képlékeny alakváltozás modellezése. Az  $\bar{\mathbf{S}}$  feszültségvektor eltolja végpontján azokat a síkokat, amelyeket elér a terhelés folyamán. A

feszültségvektor végpontján lévő egy sík elmozdulása a megfelelő csúszási rendszeren belüli képlékeny alakváltozást jellemzi [7,8].

Mint ahogy a feszültségvektor pálya (hodográf) az  $S_1', S_3$  síkba esik, az általa elmozdított síkok halmaza az  $S_1', S_3$ -síkra szimmetrikus az eredeti koordináta rendszerben ( $S_1, S_2, S_3$ ). Ebből következik, hogy a képlékeny alakváltozásvektor [7,8] ( $\bar{\mathbf{e}}^S$ ) szintén az  $S_1', S_3$  síkba esik és

$$\bar{\mathbf{e}}^S = e_1' \bar{\mathbf{q}}_1' + e_3 \bar{\mathbf{q}}_3 \quad (12)$$

alakban írható fel. Az  $\bar{\mathbf{e}}^S$  vektor komponensei ( $e_1$  és  $e_2$ ) az eredeti koordináta rendszerben:

$$e_1 = -e_1' \cos \frac{\pi}{6} = -e_1' \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e_2 = e_1' \cos \frac{\pi}{3} = \frac{e_1'}{2}. \quad (13)$$

Az alakváltozástenzor komponensei [7,8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= -\frac{e_1}{\sqrt{6}} - \frac{e_2}{\sqrt{2}} = \frac{e_1'}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{e_1'}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = 0, \\ \varepsilon_{xx} &= \sqrt{\frac{2}{3}} e_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} e_1' \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_1', \end{aligned} \quad (14)$$

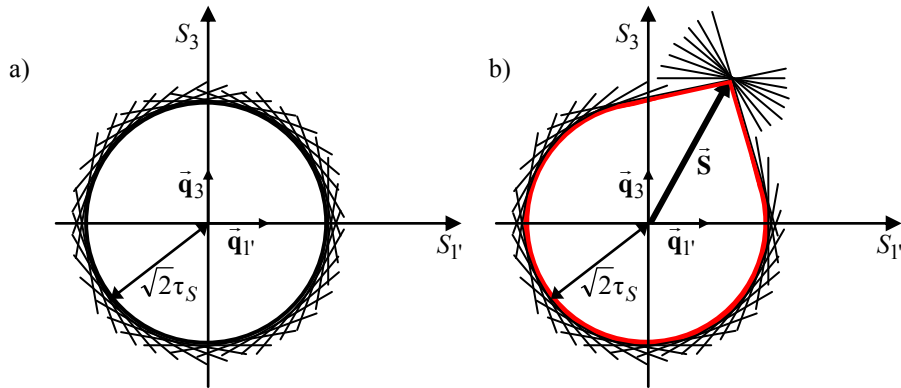
$$\varepsilon_{yy} = -\frac{e_1}{\sqrt{6}} + \frac{e_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} e_1' \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1' = -\varepsilon_{xx}, \quad \gamma_{xy} = \frac{e_3}{\sqrt{2}}.$$

Mivel (13) és (14) képlet tetszőleges  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  feszültségre érvényes, síkbeli képlékeny-alakváltozási állapot kialakulásáról beszélhetünk.

Egyszerűsítés kedvéért a (11) gömbhöz érintő síkok közül csak az  $S_1', S_3$ -ra merőleges síkokat vesszük figyelembe. Ebben az esetben a háromdimenziós feszültségtérhez tartozó gömb (11) és hozzá érintő síkok helyett

$$S_1'^2 + S_3^2 = 2\tau_S^2 \quad (15)$$

körrel és annak érintő egyeneseivel foglalkozhatunk az  $S_1', S_3$  síkban (lásd a 2. ábrát).



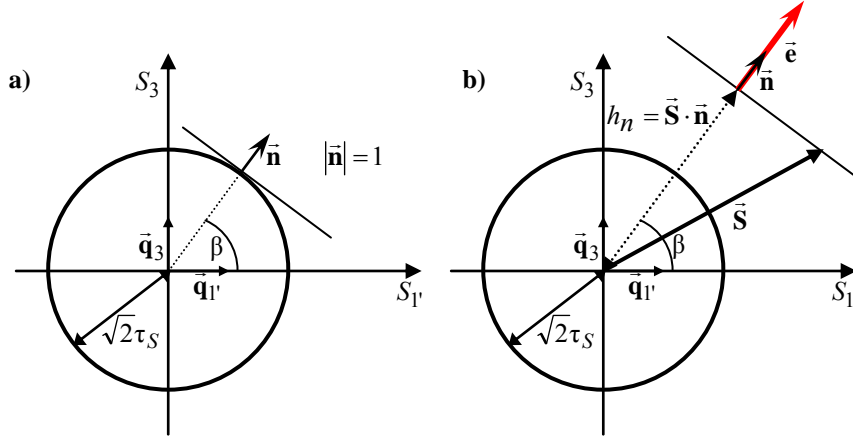
2. ábra. Folyási felület kezdeti állapotban (a) és terheléskor (b)

Az érintő egyenes állását az egyenesre merőleges normális egységvektor ( $\vec{n}$ ) és az egyenes és origó közötti távolság ( $h_n$ ) határozza meg. A normális irányát  $\beta$  szög adja meg (3. ábra), amelyet  $S_1'$  tengelytől mérjük, így  $0 \leq \beta \leq 2\pi$ . A feszültségvektor végpontján lévő egyenes elmozdulása képlékeny alakváltozást jellemez, amelyet az egyenesre merőleges vektor ( $\vec{e}$ ) reprezentál (3. ábra [7,8]). Jelöljük  $d\vec{e}$ -vel elemi képlékeny alakváltozásvektort, amely az egyenesek elemi halmazának elmozdulása miatt jön létre. Az elemi halmazon azokat az egyeneseket értjük, amelyek normálisa elemi  $d\beta$  tartományba esik. Az elemi képlékeny alakváltozásvektor

$$d\vec{e} = \varphi_n d\beta \vec{n}, \quad (16)$$

ahol  $\varphi_n$  un. képlékeny alakváltozás intenzitása. Normális  $\vec{n}$  komponensei  $\cos \beta$  és  $\sin \beta$ , tehát

$$\vec{n} = \cos \beta \vec{q}_1 + \sin \beta \vec{q}_2. \quad (17)$$



3. ábra. Normális iránya (a) és a képlékeny alakváltozás vektor  $\vec{e}$  (b)

A  $d\vec{e}$  vektor  $S_1'$  ill.  $S_3$  irányába eső vetületei:

$$de_{1'} = \varphi_n \cos \beta d\beta \quad (18)$$

$$de_3 = \varphi_n \sin \beta d\beta$$

Összegezzük a képlékeny alakváltozásvektor komponenseit azokban az irányokban, ahol az egyenesek elmozdulásokat szenvednek a feszültségvektor végpontján. Ez a művelet

$$e_{1'} = \frac{1}{r} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \varphi_n \cos \beta d\beta \quad (19)$$

$$e_3 = \frac{1}{r} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \varphi_n \sin \beta d\beta$$

integrálokkal kifejezhető, ahol az integrálási határok, szögek  $\beta_1$  és  $\beta_2$ , elválasztják a mozdatlan síkok normálisait azoktól a normálisoktól, amelyek a feszültségvektorral eltolt egyenesekhez tartoznak;  $r$  anyag konstans,  $[r] = 1/\text{Pa}$ .

A szintézis elmélet keretében, az anyag keményedése két paraméterrel határozható meg: az alakváltozás intenzitásával  $\varphi_n$  és az egyenes távolságával  $h_n$ , amelyek

$$\varphi_n = h_n - \sqrt{2}\tau_s \quad (20)$$

kapcsolatban állnak. Az egyenesek távolsága elmozdulásuk előtt egyenlő a (15) kör sugarával,  $\sqrt{2}\tau_s$ , ami a  $\varphi_n = 0$  egyenlőséget eredményezi. Terhelés folyamán, ha a feszültségvektor eltolt egy síkot  $\vec{n}$  normálvektorával, akkor a sík távolsága (3. ábra)

$$h_n = \vec{S} \cdot \vec{n}. \quad (21)$$

Ebből az alakváltozás intenzitása

$$\varphi_n = \vec{S} \cdot \vec{n} - \sqrt{2}\tau_s. \quad (22)$$

Abban az esetben, amikor a feszültségvektor nem ér el egy síkot, akkor

$$\vec{S} \cdot \vec{n} < h_n \quad (23)$$

és képlékeny deformáció nem képződik rajta:  $\varphi_n = 0$ .

### 1.3 Síkbeli alakváltozási állapot a szintézis elmélet keretében: arányos terhelés

Feltételezzük, hogy  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  és  $\tau_{xy}$  feszültségek egyenesen arányosak. Ekkor, a (6) képlet alapján, a feszültségvektor komponensei szintén arányosak, amiből az következik, hogy a terhelési pálya egyenes a feszültség deviátor térben. Legyen  $\beta_0$  az a szög, amelyet az  $\vec{S}$  vektor bezár az  $S_1$  tengellyel

$$\tan \beta_0 = \frac{S_3}{S_1} = \frac{2\tau_{yz}}{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}, \quad S_1 = S \cos \beta_0, \quad S_3 = S \sin \beta_0, \quad (24)$$

$$S = |\vec{S}| = \sqrt{S_1^2 + S_3^2} = \sqrt{2/3}\tau_0. \quad (25)$$

Ha a feszültségvektor a folyási határ értékét meghaladja ( $S > \sqrt{2}\tau_s \Rightarrow \tau_0 > \sqrt{3}\tau_s$ ), akkor az  $\vec{S}$  vektor eltolja az érintő egyeneseket kezdeti helyüktől a (15) körtől  $M$  pontba (ún. terhelési pont, lásd 4. ábrát). A határegyenesekre, amelyek az  $\vec{S}$  vektor végpontján helyezkednek el,

$$\sin \beta_3 = \cos \beta_4 = \sqrt{2}\tau_s / S \quad (26)$$

összefüggések jellemzők. Skalárszorzatból

$$\vec{S} \cdot \vec{n} = (S_1 \vec{q}_1 + S_3 \vec{q}_3) (\cos \beta \vec{q}_1 + \sin \beta \vec{q}_3) = S_1 \cos \beta + S_3 \sin \beta \quad (27)$$

valamint a (22) és (27) képletekből, a képlékeny alakváltozás intenzitása kapható:

$$\varphi_n = S_1 \cos \beta + S_3 \sin \beta - \sqrt{2}\tau_s. \quad (28)$$

A (19) és (28) képletek alapján, a képlékeny alakváltozásvektor ( $\vec{\epsilon}$ ) komponensei

$$\begin{aligned}
 re_1 &= S_1 \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos^2 \beta d\beta + \frac{S_3}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin 2\beta d\beta - \sqrt{2}\tau_s \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta \\
 re_3 &= \frac{S_1}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin 2\beta d\beta + S_3 \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin^2 \beta d\beta - \sqrt{2}\tau_s \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta
 \end{aligned} \tag{29}$$

ahol az integrálási határok:

$$\beta_1 = \beta_0 - \beta_4, \quad \beta_2 = \beta_0 + \beta_4. \tag{30}$$

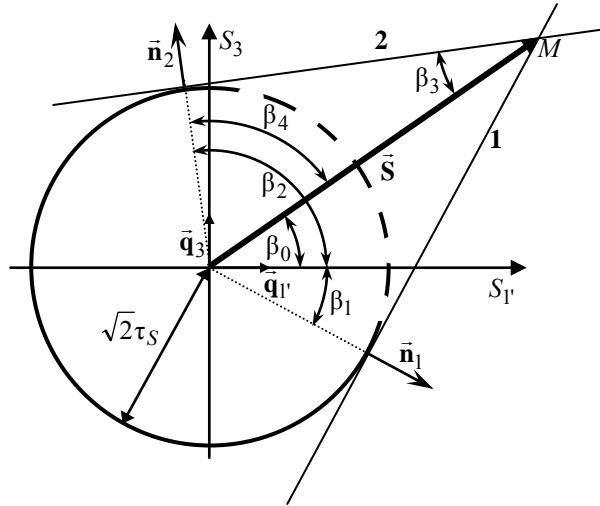
A (29) kifejezésekben szereplő integrálok kiszámításából, (24), (26) és (30) képlet alapján, képlékeny alakváltozásvektor komponensei adódnak:

$$\begin{aligned}
 re_1 &= S_1 \left( \beta_4 - \frac{1}{2} \sin 2\beta_4 \right) \\
 re_3 &= S_3 \left( \beta_4 - \frac{1}{2} \sin 2\beta_4 \right)
 \end{aligned} \tag{31}$$

Az alakváltozástenzor második skalár invariánsa [7,8]:

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\bar{\mathbf{e}}| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{e_1^2 + e_3^2} = \frac{2}{3r} \tau_0 \left( \beta_4 - \frac{1}{2} \sin 2\beta_4 \right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{3\gamma_0}{2\tau_0} &= \frac{1}{r} \left( \beta_4 - \frac{1}{2} \sin 2\beta_4 \right)
 \end{aligned} \tag{32}$$

Ha a (2) összefüggésekben álló funkciót  $\gamma_0/\tau_0$  a (32) alakban vesszük fel, akkor, a (6), (14), (25), (26), (30) képlet figyelembevételével, a (31) és (2) képletek azonosak.



4. ábra. Feszültségvektor és a folyási gömb határi érintői: 1 és 2

### 1.4 Nem arányos terhelés

Tekintsük az 5. ábrán vázolt terhelési pályát az  $S_1, S_3$  koordináta-síkban: a) vonal  $OM$ , azaz az  $\vec{S}$  vektor komponenseire  $S_1/S_3 = \text{áll.}$  összefüggés érvényes; tegyük fel, hogy  $|\vec{S}| > \sqrt{2}\tau_s$ , b) feszültségvektor növekménye  $d\vec{S}$ , amelynek iránya eltér az  $\vec{S}$  vektorétól. Határozzuk meg a  $d\vec{S}$  vektor okozta képlékeny alakváltozás növekményét. Az  $OM$  szakasz mentén a feszültségvektor eltolja az egyeneseket az  $M$  pontig; a határegyenesek normálisai  $\vec{n}_1$  és  $\vec{n}_2$  (lásd az 5b. ábrát). Továbbá tegyük fel, hogy mindazok az egyenesek, amelyek az  $\vec{S}$  vektor végpontján helyezkednek el, folytatják mozgásukat a  $d\vec{S}$  vektor hatására is. Teljes terhelésnövekménynek nevezzük ezt az esetet. Ha a vektor-növekmény  $d\vec{S}$  az egyenes további elmozdulását eredményezi, akkor az alábbi egyenlőség érvényes:

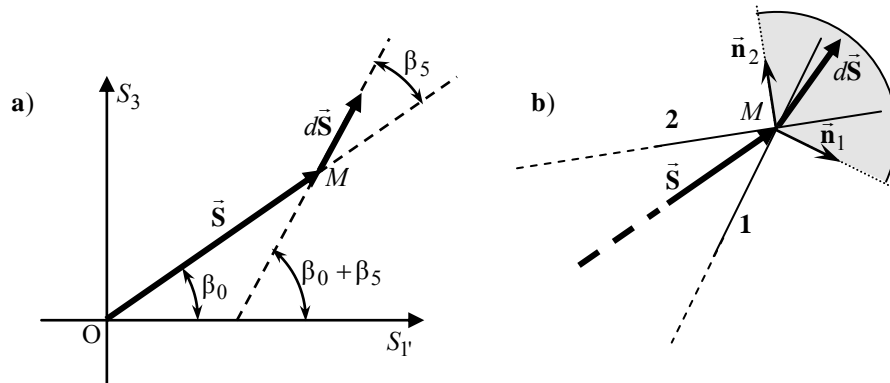
$$(\vec{S} + d\vec{S}) \cdot \vec{n} > h_n, \quad (33)$$

ahol  $h_n$  az  $\vec{S}$  vektorhoz tartozó egyenes távolsága. Tekintettel arra, hogy az  $M$  pontban lévő egyenesekre  $\vec{S} \cdot \vec{n} = h_n$  összefüggés áll,

$$d\vec{S} \cdot \vec{n} > 0. \quad (34)$$

egyenlőtlenségre jutunk.

Tehát ha egy egyenes elmozdul az  $\vec{S}$  vektor hatására, akkor elmozdulása sem szűnik meg  $d\vec{S}$ -nél, ha a növekmény  $d\vec{S}$  hegyes szöget zár be az egyenes normálisával.



5. ábra. Nem arányos terhelés paramétereit (a) és  $d\vec{S}$  vektor végpontján lévő egyenesek halmaza (b)



Tegyük fel, hogy  $d\vec{S}$  vektor **1** és **2** határegyenesek közé esik. Ebben az esetben a  $d\vec{S}$  vektor hegyes szöget zár be az összes egyenessel, amelyek az **1** és **2** egyenesek között helyezkednek el. Más szóval a teljes terhelésnövekmény feltétele teljesül. A (28) képlet figyelembevételével, a képlékeny alakváltozás intenzitása az  $\vec{S} + d\vec{S}$  terhelés hatására:

$$\varphi_n + d\varphi_n = (S_1 + dS_1) \cos \beta + (S_3 + dS_3) \sin \beta - \sqrt{2}\tau_s \quad (35)$$

és a  $\varphi_n$  növekményét, (28) alapján,

$$d\varphi_n = dS_1 \cos \beta + dS_3 \sin \beta \quad (36)$$

alakban kapjuk. A  $d\vec{S}$  vektor okozta képlékeny alakváltozásvektorok növekménye a (19) képletből:

$$rde_1 = \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\varphi_n \cos \beta d\beta$$

$$rde_3 = \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\varphi_n \sin \beta d\beta \quad (37)$$

ahol  $\beta_1$  és  $\beta_2$  a (30) képlettel meghatározható, hiszen az  $\vec{S}$  vektor végpontján lévő síkok folytatják elmozdulásukat a  $\vec{S} + d\vec{S}$  hatására is. Tekintettel (36)-re

$$rde_1 = dS_1 \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos^2 \beta d\beta + \frac{dS_3}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin 2\beta d\beta$$

$$rde_3 = \frac{dS_1}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin 2\beta d\beta + dS_3 \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin^2 \beta d\beta \quad (38)$$

Innen

$$rde_1 = \left( \beta_4 + \frac{1}{2} \sin 2\beta_4 \cos 2\beta_0 \right) dS_1 + \frac{1}{2} \sin 2\beta_0 \sin 2\beta_4 dS_3$$

$$rde_3 = \frac{1}{2} \sin 2\beta_0 \sin 2\beta_4 dS_1 + \left( \beta_4 - \frac{1}{2} \sin 2\beta_4 \cos 2\beta_0 \right) dS_3 \quad (39)$$

Fordítsunk különös figyelmet egy fontos, a (31) és (39) képletből levonható következtetésre. A (31) képlet alapján számítsuk ki az alakváltozás növekményeit,  $de_1$  és  $de_3$ , amelyek az  $S_1$ ,  $S_3$  és  $\beta_4$  függvényei,

$$de_1 = \frac{\partial e_1}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial e_1}{\partial \beta_4} \left( \frac{\partial \beta_4}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial \beta_4}{\partial S_3} dS_3 \right)$$

$$de_3 = \frac{\partial e_3}{\partial S_3} dS_3 + \frac{\partial e_3}{\partial \beta_4} \left( \frac{\partial \beta_4}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial \beta_4}{\partial S_3} dS_3 \right) \quad (40)$$

A fenti képletekben lévő parciális deriváltak a (31) és (26) képletből adódnak

$$\frac{\partial e_1}{\partial S_1} = \frac{\partial e_3}{\partial S_3} = \beta_4 - \frac{1}{2} \sin 2\beta_4, \quad (41)$$

$$\frac{\partial e_j}{\partial \beta_4} = (1 - \cos 2\beta_4) S_j, \quad \sin \beta_4 \frac{\partial \beta_4}{\partial S_j} = \frac{\sqrt{2} \tau_s S_j}{S_3}, \quad j = 1', 3. \quad (42)$$

Behelyettesítve a (41)-(42) alattiakat a (40) összefüggésekbe, a (39) kifejezéseket nyerjük. Összefoglalva, a két úton kiszámított képlékeny alakváltozás növekményei megegyeznek, íme, a) egyenesvonalú terhelési pályára jellemző (31) egyenlet deriválásából és b) törtvonalú terhelési trajektória elemzéséből. Tehát a szintézis elméletből következik, hogy a Hencky-Nádai-féle deformációs elmélet nem csak egyenesvonalú terhelési pályákra alkalmazható, hanem bizonyos eltérések esetére is – ha a (34) feltétel teljesül.

Tekintsük most azt az esetet, amikor  $d\vec{S}$  vektor  $\beta_5$  szöget zár be az  $\vec{S}$  vektorral:

$$\beta_3 \leq \beta_5 \leq \pi - \beta_3, \quad (43)$$

azaz a  $d\vec{S}$  vektor állását a 6a. ábra szemlélteti. Húzzunk az  $M$  ponton át az  $\vec{S}$  vektorra merőleges szaggatott vonalat. Azok az egyenesek, amelyeknek a normálisa az ábrán látható sraffozott tartományba esnek, folytatják elmozdulásaikat a  $d\vec{S}$  vektor hatására, hiszen normálisaik hegyes szöget zárnak be a  $d\vec{S}$  vektorral. Azok az egyenesek pedig, amelyeknek a normálisa a sraffozott tartományon kívül esik ( $\vec{n}_1$  és  $\vec{n}_2$  között), mozdulatlaná válnak, mert rájuk  $d\vec{S} \cdot \vec{n} < 0$  érvényes (tompaszög). Ilyen feszültségvektor növekménye un. nem teljes extra-terhelést jellemez.

A képlékeny alakváltozásvektor növekménye a (29) képletekből kiszámolható, ahol a felső integrálási határ  $\beta_2$ , az alsót pedig a 6b. ábrán látható szaggatott vonal határozza meg. Minthogy a  $d\vec{S}$   $\beta_0 + \beta_5$  szöget zár be az  $S_{1'}$  tengellyel, a szaggatott vonal iránya, más szóval az integrálási alsó határ, a következő

$$\beta_1 = \beta_0 + \beta_5 - \frac{\pi}{2}, \quad (44)$$

és

$$\frac{dS_3}{dS_{1'}} = \tan(\beta_0 + \beta_5). \quad (45)$$

A (29) alatti integrálásból – ahol az alsó integrálási határ a (44) képlettel határozható meg – a (45) figyelembevételével az alábbi alakváltozás-növekményeket nyerjük

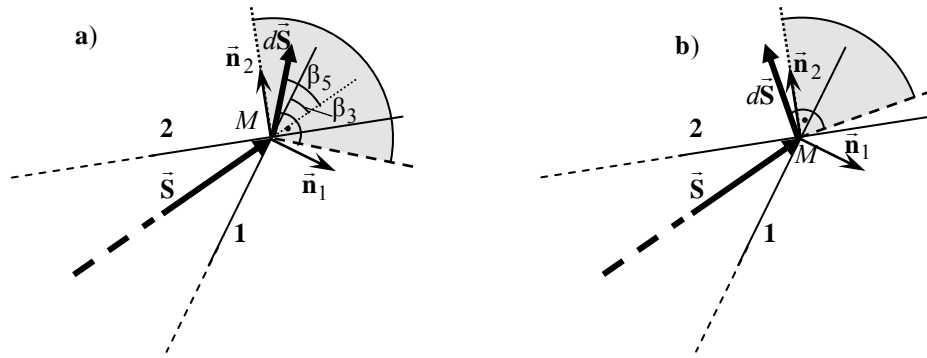
$$\begin{aligned} de_{1'} &= \frac{1}{2r} \left[ \left( \beta_4 - \beta_5 + \frac{\pi}{2} \right) dS_{1'} + \frac{1}{2} \sin 2\beta_2 dS_{1'} + \sin^2 \beta_2 dS_3 \right] \\ de_3 &= \frac{1}{2r} \left[ \left( \beta_4 - \beta_5 + \frac{\pi}{2} \right) dS_3 - \cos^2 \beta_2 dS_{1'} - \frac{1}{2} \sin 2\beta_2 dS_3 \right] \end{aligned} \quad (46)$$

A fenti összefüggések differenciálisan nemlineárisak, mert a bennük lévő  $\beta_5$  szög a  $dS_{1'}$  és  $dS_3$  nemlineáris függvénye (lásd a (45) képletet), míg a (40) összefüggések differenciálisan lineárisak.

A teljes extra-terheléstől való eltérés esetén a Hencky-Nádai-féle deformációs elméletből eredő képletek (39) nem egyeznek meg a (46) képletekkel.

A fent elmondottakból megállapítható a Hencky-Nádai-féle deformációs elmélet alkalmazhatóságának határa az  $\vec{S}$  és  $d\vec{S}$  közötti szög függvényében. Mégpedig, teljes járulékos

feszültségnövekménynél – amikor a  $d\vec{S}$  vektor eltolja mindazokat az egyeneseket, amelyek az  $\vec{S}$  vektor végpontján helyezkednek el – a Hencky-Nádai-féle deformációs elmélet alkalmazható. Ellenkező esetben viszont az  $\vec{S}$  és  $d\vec{S}$  vektorral eltolt egyenesek halmaza eltér egymástól és a Hencky-Nádai-féle deformációs elmélet csak bizonyos irányokban érvényes, addig, amíg  $\beta_5 \leq \beta_3$  a 6. ábrából.



6. ábra. Nem arányos terhelés:  $d\vec{S}$  vektor végpontján lévő egyenesek halmaza

Ez utóbbi feltételből a (26) képlet alapján a  $d\vec{S}$  vektor maximálisan megengedhető eltérése kifejezhető:

$$\sin \beta_5 \leq \frac{\sigma_s}{\tau_0}, \quad (47)$$

amely mellett a Hencky-Nádai-féle deformációs elmélet még alkalmazható.

## 2. Összefoglalás

A szintézis elmélet alapján a síkbeli képlékeny alakváltozási állapot elemzését végeztük el. Két esetet vizsgáltunk meg: arányos és nem arányos terhelést. Attól függően, hogy a feszültségnövekmény-vektor mekkora szöveget zár be a kezdeti vektorral, két lehetőség adódik: a) a Hencky-Nádai-féle deformációs elmélet és a szintézis elmélet azonos eredményeket adnak, b) amennyiben az eltérés túllép egy meghatározott határértéken, a két elmélet elvi különbséget mutat.

## 3. Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Prof. Dr. Ruzinkó Konstantinnak és Prof. Dr. Várkonyi-Kóczy Anamáriának a cikk elkészítésében nyújtott segítségéért és rendkívül értékes tanácsaiért.

#### 4. Irodalom

- [1] Kaliszky, S.: *Képlékenységtan-Elmélet és mérnöki alkalmazások*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
- [2] Chen, W.F., Han, D.J.: *Plasticity for structural engineers*, New York, 1988.
- [3] Ilyushin, A.: *Plasticity*, Moscow, 1963.
- [4] Anderson, T.: *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, CRC Press, 1995.
- [5] Hencky, H.: Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hergerufenen Nachspannungen, ZAMM, 1924.
- [6] Nádai, A.: *Der bildsame Zustand der Werkstoffe*, Berlin, 1927.
- [7] Rusinko, A., Rusinko, K.: *Plasticity and Creep of Metals*, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg, 2011.
- [8] Rusinko, A., Rusinko, K.: Synthetic theory of irreversible deformation in the context of fundamental bases of plasticity, *Int. J. Mech. Mater.*, 2009, Vol. **41**, 106-120.