

## TOKMÁNYBA FOGOTT FÚRÓSZÁR SZABAD REZGÉSEINEK MÉRÉSE LÉZER DOPPLER MÓDSZERREL

**Béres Miklós**

mérnök-tanár, Miskolci Egyetem, Fizikai és Elektrotechnikai Intézet  
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: [mechbere@uni-miskolc.hu](mailto:mechbere@uni-miskolc.hu)

**Jenyó Tamás**

villamosmérnök, Miskolci Egyetem, Fizikai és Elektrotechnikai Intézet  
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: [fizjetam@uni-miskolc.hu](mailto:fizjetam@uni-miskolc.hu)

**Paripás Béla**

egyetemi tanár, Miskolci Egyetem, Fizikai és Elektrotechnikai Intézet  
3515 Miskolc, Miskolc-Egyetemváros, e-mail: [fizpari@uni-miskolc.hu](mailto:fizpari@uni-miskolc.hu)

### **Absztrakt**

Lézer Doppler interferométerrel (LDV) tokmányba fogott és megpendített fúrószárok keresztirányú rezgéseit tanulmányoztuk. Megállapítottuk, hogy a szabad rezgéseket általában két közeli (néhány %-on belüli) frekvenciájú komponens szuperpozíciójából származó lebegés dominálja, amelyek a fúrószárok horonyvég irányú és az arra merőleges, keresztirányú rezgéséhez tartoznak. A hangvilla modell a 9mm átmérőjű fúrószár szabad rezgéseinek frekvenciáit pár százalékon belüli pontossággal megadja, a vastagabb (10 és 12mm-es) fúrószárok esetében viszont 15-20%-kal felülbecsli. Vizsgáltuk a fúróvég megtámasztásának, a fúrószár tokmányból kintebb húzásának és a koppintás típusának (tompá vagy éles) hatását is a rezgési spektrumra.

**Kulcsszavak:** Lézer Doppler rezgésmérés, fúrószár rezgések, Fourier-analízis

### **Abstract**

The transverse vibrations of drill bits held in a chuck and plucked were studied using a laser Doppler interferometer (LDV). We found that free vibrations are generally dominated by a beat originating from the superposition of two components with similar frequencies (within a few percent), which belong to the transverse vibrations of the drill bits in the direction of the groove end and perpendicular to that. The tuning fork model gives the frequencies of the free vibrations of the 9mm diameter drill bit with an accuracy of a few percent, while in the case of thicker (10 and 12mm) drill bits it overestimates by 15-20 percent. We also examined the effect of supporting the drill bit, pulling the drill bit further out of the chuck, and the type of tapping (blunt or sharp) on the vibration spectrum.

**Keywords:** Laser Doppler vibrometry, drill bit vibrations, Fourier analysis

### **1. Bevezetés**

A Miskolci Egyetem Fizikai Tanszékén lévő lézer Doppler elven működő LDV (Laser Doppler Vibrometer) interferométer készüléket már évek óta használjuk a mérnöki gyakorlatban felmerülő különböző rezgési problémák tanulmányozására. Ezek között előkelő helyen szerepel a gépipari fúrások közben fellépő rezgések vizsgálata, amely témában több publikációnk is megjelent (M. Béres & Paripás, 2018;

Miklós Béres & Paripás, 2017b, 2018). A kapott rezgési képek és spektrumok igen összetettek, elemzésük nehéz feladat. Ehhez segítség lehet a már tokmányba fogott, de még fúrást nem végző fúrószerű rezgéseinek pontos ismerete. Jelen munkánkkal ezt a hiányt kívánjuk pótolni.

## 2. Mérési módszer

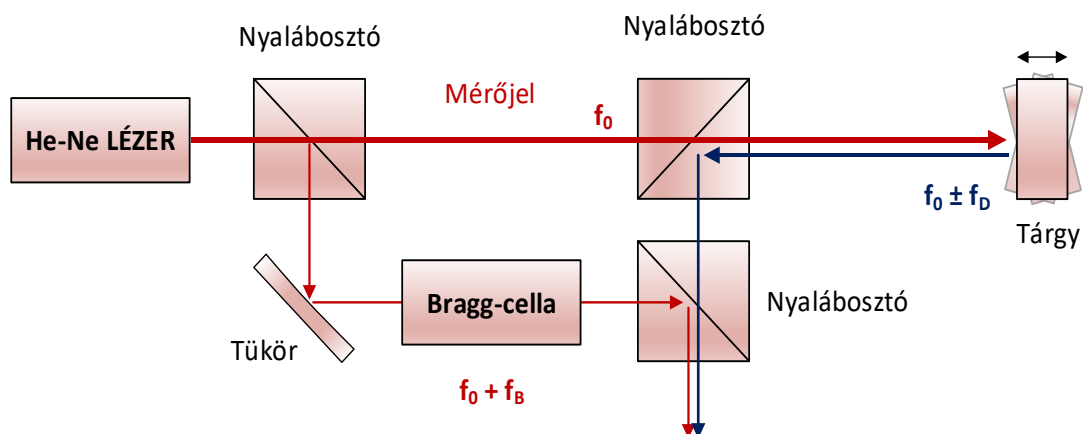
Az LDV készülék lézersugarát a vizsgálni kívánt objektum felületének adott pontjára kell fókuszálni, melynek rezgési sebességének amplitúdójára és frekvenciájára lehet következtetni a visszavert lézertény frekvenciája segítségével, a Doppler-effektus alapján. A Doppler-effektus lényegét fejezi ki az (1) összefüggés, mely szerint, ha egy hullámforrás és egy megfigyelő egymáshoz képest elmozdul, akkor a megfigyelő a hullámot más frekvenciájúnak érzékeli. Ez az effektus képezi a sebességmérés alapját. Az akusztikai Doppler effektusnál a közeghez képest a megfigyelő és a hullámforrás is mozoghat  $v_m$ , illetve  $v_f$  sebességgel. A  $v$  sebességgel közeledő tárgy esetén visszaverő hullám detektálásakor a következő összefüggés érvényes:

$$f = f_0 \frac{c + v}{c - v} \quad (1)$$

Az LDV egy két (He-Ne) lézersugaras Mach-Zehnder interferométer, ami méri a frekvencia különbséget a belső referencia nyaláb és a mérőszugár között. A céltárgyról szóródott fényt először összegyűjtjük, majd a fénydetektoron interferáltatjuk a referencia sugárral. A két lézersugár között alap esetben is  $f_B=20\text{MHz}$  eltolás van, amit egy Bragg-cella hoz létre. Ennek segítségével tudjuk a mechanikai rezgéseknek megfelelő (alacsony) frekvenciákat detektálni, továbbá a sebesség irányítását azonosítani (Béres és Paripás, 2017a). A 2. ábrán látható a vibrométer vázlatos felépítése. A referencia frekvenciát  $f_0$ , a Bragg frekvenciát  $f_B$ , a Doppler eltolódást pedig  $f_D$  jelöli. Végeredményül a (3) összefüggést kapjuk.

$$f = f_0 \frac{c + v}{c - v} @ f_0 \left(1 + 2\frac{v}{c}\right) = f_0 + f_D \quad (2)$$

$$f_D = 2f_0 \frac{v}{c} = 2\frac{v}{\lambda} \quad (3)$$

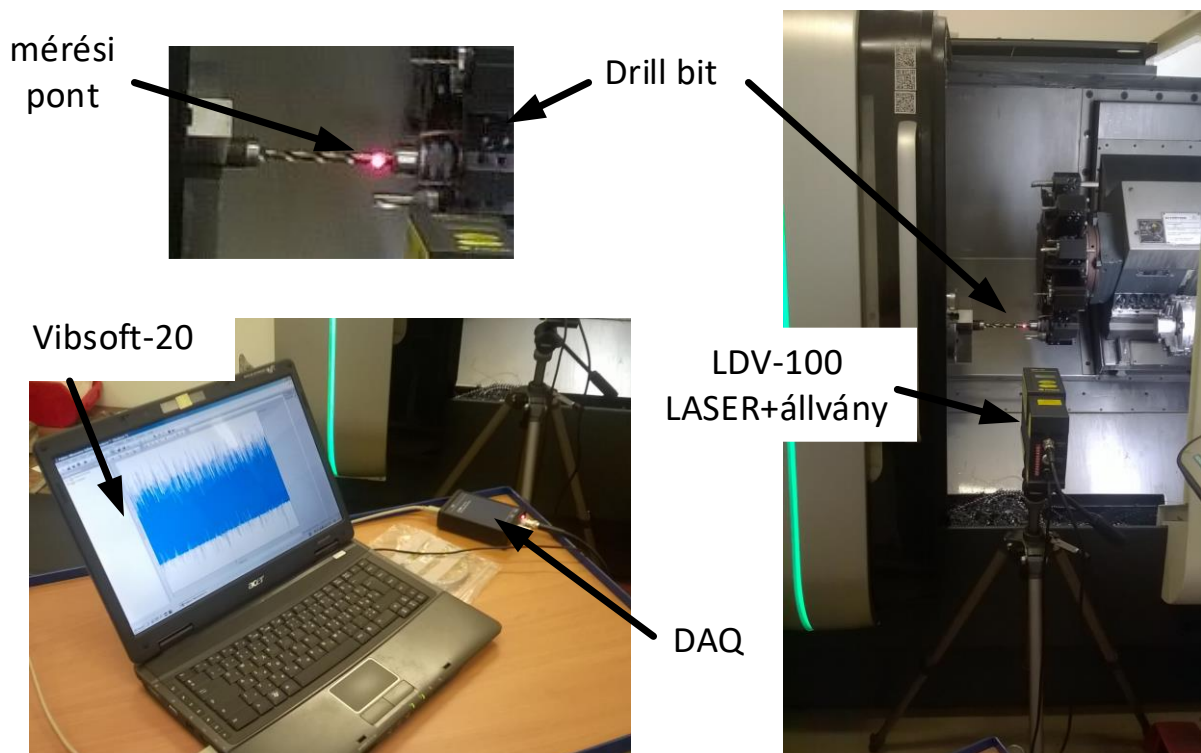


1. ábra. Az LDV optikai jelfeldolgozása

Természetesen csak akkor igaz a fenti eredmény, ha a lézersugár és a sebességvektor párhuzamos. A fotodetektor kimenete egy immár frekvencia-modulált (FM) jel a Bragg-cella vivőfrekvenciájával és a Doppler-frekvenciával, mint modulációs frekvenciával. Az általunk alkalmazott LDV berendezés egy Polytec PDV-100 (Portable Digital Vibrometer) vibrométer .

### 3. Mérési körülmények

Méréseinket egy DMG CPX Alpha500 CNC esztergán végeztük a Miskolci Egyetem Szerszámgépezeti és Mechatronikai Intézet Szerszámgépek Tanszéke (SZGT) műhelyében. Mivel a fúrás közbeni rezgés-mérés során a fúró állt, miközben a munkadarab forgott, így ezeket méréseket is álló fúróon végezhetjük. Az LDV-vel a fúrósár megadott pontjának translációs rezgéseit mértük, a szerszámgépen kívülről (2. ábra). A mérések során a tokmányba befogott fúrósárákat a lézersugár a befogott végüknél, a horony végétől kb. 1cm-re érte el, hasonlóan a fúrás közbeni mérésekhez.



2. ábra. A mérés elrendezése

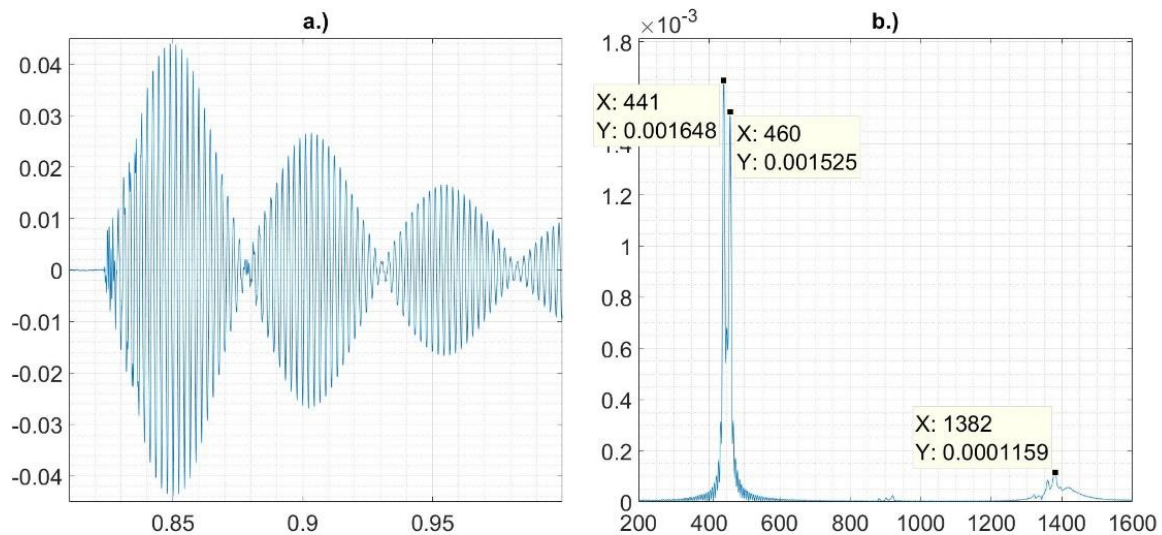
### 4. Mérési eredmények

Az impulzusgerjesztésre adott válaszok vizsgálatakor a fúrót először (tokmányba) mereven befogva koppintottuk meg. Ezután a fúró csúcsát nekitoltuk a munkadarabnak, s így gerjesztettük a szerszámot. A tompa ütés gumivégű fém ütővel, míg az éles ütés egy hengeres fémszár segítségével történt.

#### 4.1. A fúró hegye szabad, a koppintás tompa

A szabad rezgések méréséhez a fúrószerűkat egy kis keresztirányú ütessel, „koppintással” hoztuk rezgésbe, amely a másik végükhöz közel, attól kb. 1cm-re történt. Igyekeztünk mindig azonos erősséggel koppintani, de ennek erősségét nem tudtuk mérni. Mivel a lézersugár irányába eső mozgást mérjük, elsősorban az ilyen irányú (tehát párhuzamos) koppintás után várunk nagyobb amplitúdójú rezgést. Az első mérési sorozatban a fúrók másik vége (a hegye) teljesen szabad volt, és a koppintás gumialapáccsal történt. A mérések többségében tisztán látszott, hogy a rezgéseket nem egy, hanem két közeli frekvencia jellemzi, amelyek szuperpozíciója lebegést eredményez (3. ábra).

A két rezgési módus amplitúdójának nagysága a koppintás iránya mellett a fúrószerű pozíciójától is függött. Ez utóbbi azt jelenti, hogy nem volt mindegy, hogy a horony vége és a lézerfolt a fúrószerű ugyanazon oldalán volt-e ( $0^\circ$ -os pozíció), vagy ehhez képest valamelyest elfordítva. Mi a  $90^\circ$ -os elfordítást preferáltuk.

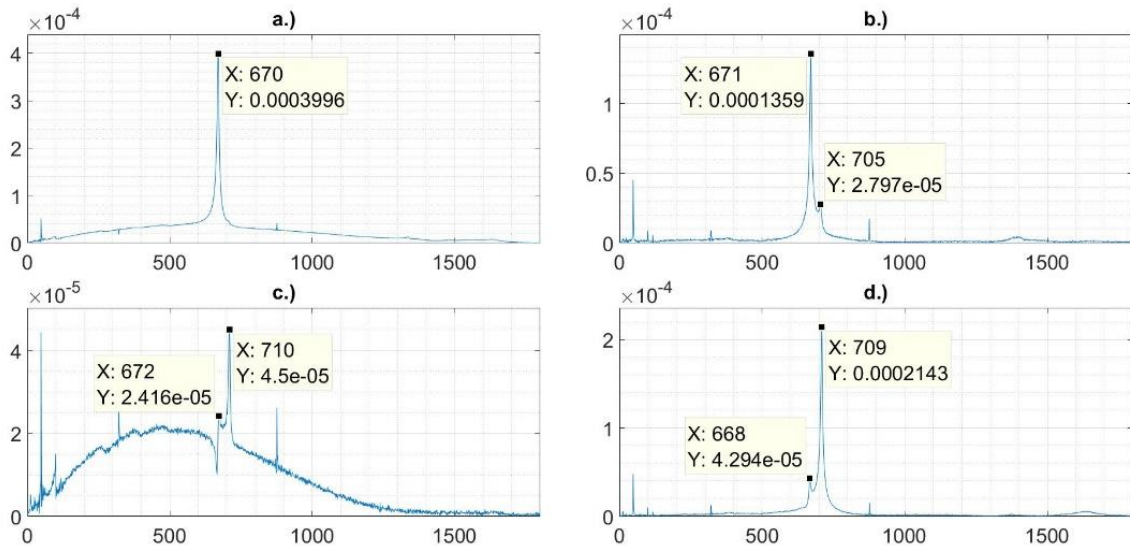


**3. ábra.** A tokmányba fogott 12mm átmérőjű fúrószerű lézersugárra merőleges koppintás utáni rezgése: a.) időspektrum (sebesség [m/s] az idő függvényében); b.) FFT spektrum (amplitúdó a frekvencia függvényében)

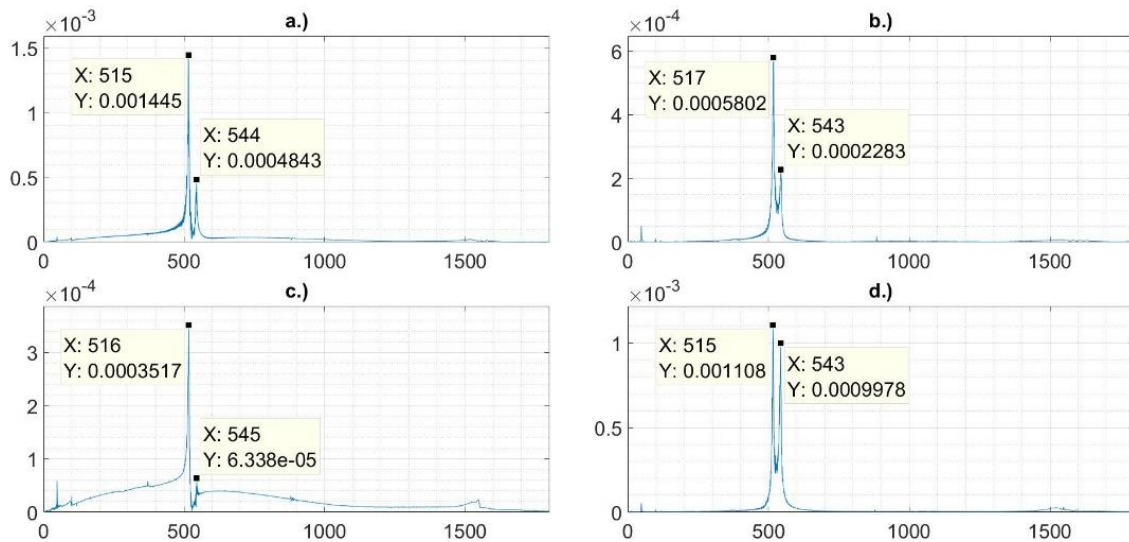
A három fúró (a 9mm, a 10mm és a 12mm átmérőjű fúró is) nagyon hasonló rezgési spektrumokat adott. Különbség volt viszont a módusok frekvenciáiban. A legvékonyabb fúrót 668 ( $\pm 1$ ) és 709 ( $\pm 1$ )Hz, a közepeset 517 ( $\pm 1$ ) és 545 ( $\pm 1$ )Hz, a legvastagabb fúrót 442 ( $\pm 1$ ) és 462 ( $\pm 1$ )Hz-es módusok jellemzik (4. - 5. és 6. ábra). Az FFT spektrumok hasonlóságait az alábbiakban foglalhatjuk össze:

- a lézersugárra merőleges koppintás esetén az FFT spektrumban mindkét frekvencia jól látszott, a lézersugár irányú koppintás esetén néha ( $90^\circ$ -os pozícióban) csak az egyik,
- a fúrószerűk két különböző pozíciójában (a  $0^\circ$ -os és a  $90^\circ$ -os) különböző frekvenciák domináltak (kivéve a 10-es fúrót, ahol minden spektrumban a kisebb frekvencia dominált)
- a lézersugár irányú koppintás esetén jelentősen megnövekedett a folytonos háttér is az FFT spektrumban. Később kiderült, hogy ennek az az oka, hogy a lézersugár irányú koppintás utáni első rezgések nagyon anharmonikusak, közelítőleg sem írhatók le harmonikus függvényekkel;

d) a vastagabb fúrók esetében az alapfrekvencia háromszorosa környékén megjelent egy kisebb csúcs, ami nem a háttérzajtól származik (a háttérspektrum a 10. ábrán látható).

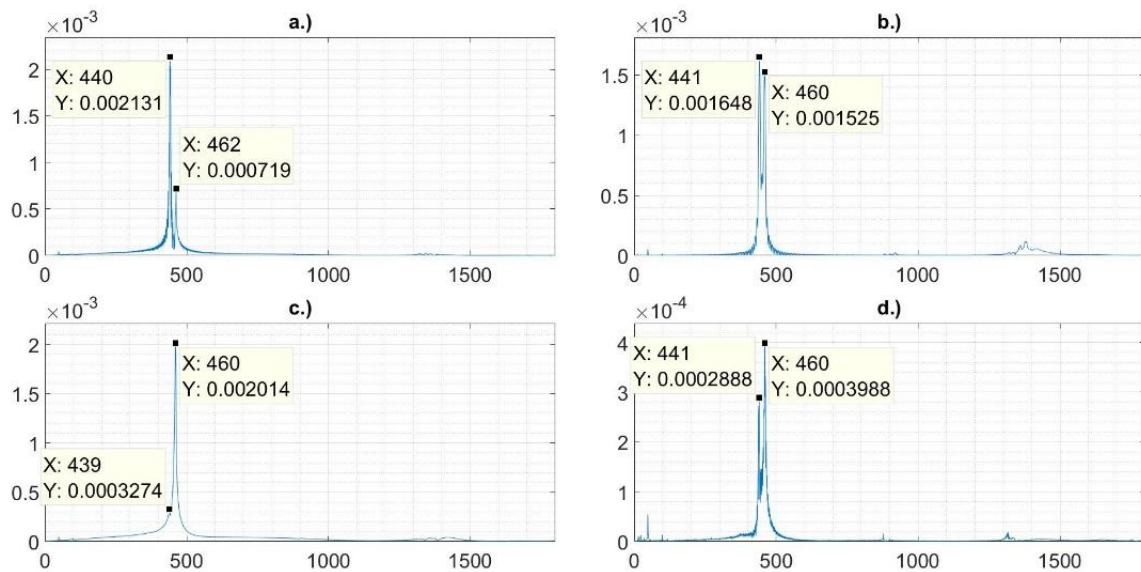


**4. ábra.** A tokmányba fogott 9mm átmérőjű fúrósár rezgési spektrumai (FFT) különböző fúrósár pozíciókban és koppintási irányok esetén: a.) eredeti ( $0^\circ$ -os) pozíció, lézersugár irányú koppintás; b.) eredeti pozíció, lézersugárra merőleges koppintás; c.)  $90^\circ$ -os pozíció, lézersugár irányú koppintás; d.)  $90^\circ$ -os pozíció, lézersugárra merőleges koppintás



**5. ábra.** mint az előző ábrán, de itt a fúrósár átmérője 10mm





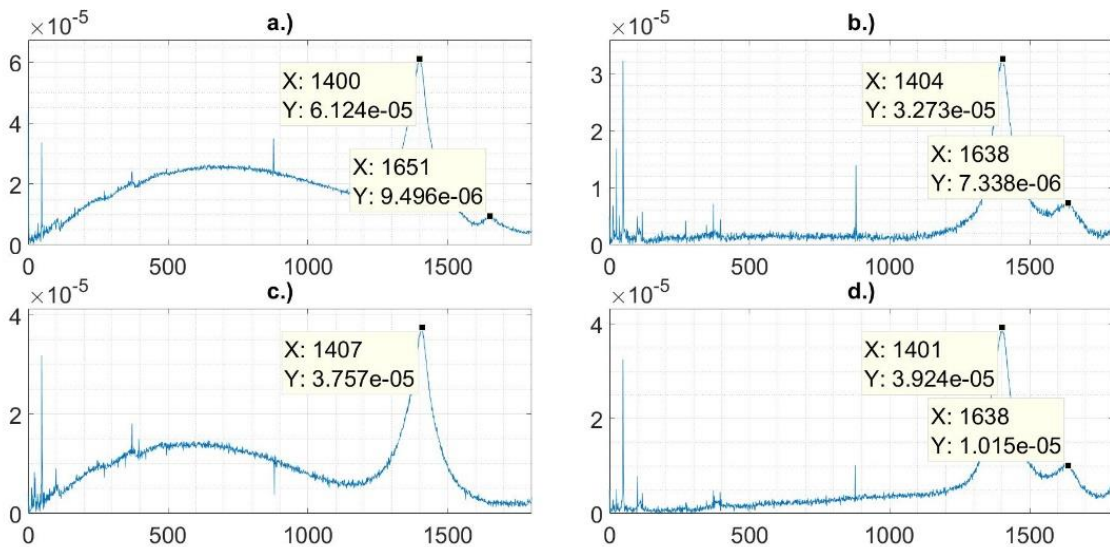
6. ábra. mint az előző ábrán, de itt a fúrószár átmérője 12mm

#### 4.2. A fúró hegye a munkadarabhoz szorul

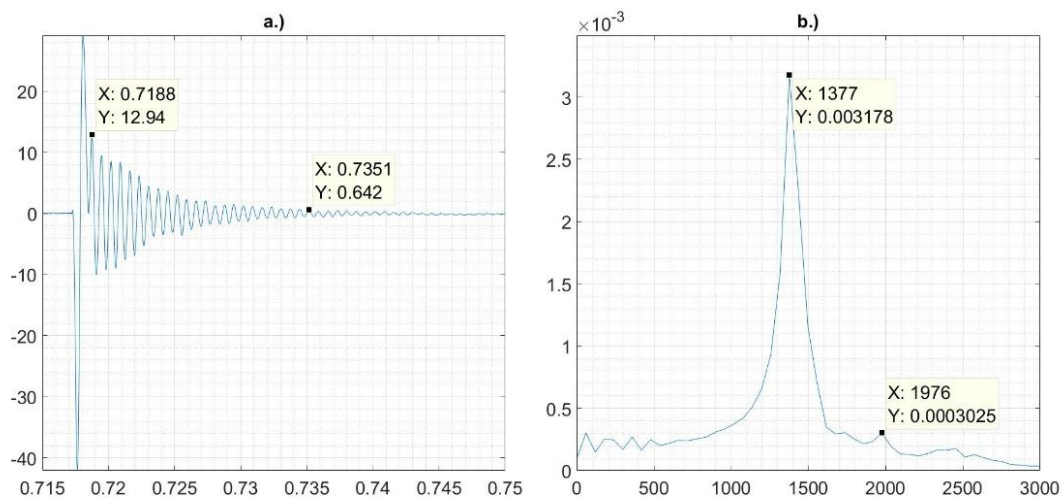
Egy másik mérési sorozatban úgy vizsgáltuk meg a 9 mm-es fúró rezgéseit, hogy a fúró csúcsa sem volt szabad (a fúró a 90°-os pozícióban állt), azaz „pontoszerű” módon meg volt fogva. Ezt úgy értük el, hogy nekiktoltuk a fúrót egy álló munkadarabnak. Először éppen csak nekikoccantottuk, később nagyobb erővel toltuk neki (a fúrón még +0,04mm-t toltunk). Tapasztalataink szerint (7. ábra) a feszítő erő megváltoztatása alig volt hatással a rezgési spektrumra. Minden spektrumban domináns volt viszont egy kb. 100Hz szélességű (FWHM), kb. 1405Hz középfrekvenciájú rezgési módus. Jelentősen befolyásolta azonban a rezgési spektrumot a pendítés iránya. A lézersugár irányú pendítés igen magas, középen kipúposodó folytonos háttérrel eredményezett az 1kHz alatti tartományban. Ez a háttér a merőleges pendítés esetén szinte teljesen hiányzott.

Megvizsgáltuk, hogy a 7/a és c ábrákon (lézersugár irányú pendítés) miért olyan magas a folytonos háttér az 1kHz alatti tartományban. A 8/a ábrán a 7/c ábrán bemutatott FFT spektrumhoz tartozó időspektrumot láthatjuk. Ez a pendítés pillanatában hirtelen indul egy erősen anharmonikus szakasszal. Ha ezt kivesszük az FFT kiértékelésből, akkor eltűnik a folytonos háttér nagy része is (7/b ábra).

Tehát az FFT spektrumok folytonos háttére egyértelműen az első egy-két erősen anharmonikus periódus következménye. Nemcsak a 7/a és c ábrákon igaz ez, hanem a többi a) és c) ábrán is, ahol a koppintás lézersugár irányú. A szabad hegyű fúrószár rezgései azonban lassabban csengenek le, így az első egy-két erősen anharmonikus periódus hatása a teljes lecsengési szakaszra számított FFT spektrumra kisebb lesz. A lézersugárra merőleges koppintás esetén a lézerrel mért (tehát lézersugár irányú) rezgések lassan alakulnak ki (3/a ábra), így az elején erősen anharmonikus periódusokat nem tartalmaznak, és így hiányzik az FFT spektrumok folytonos háttére is.



**7. ábra.** A tokmányba fogott 10mm átmérőjű fúrószerű rezgési spektrumai (FFT) úgy, hogy a fúró csúcsát „pontoszerű” módon megfogtuk: a.) megfogás „normál” erővel, lézersugár irányú koppintás; b.) megfogás „normál” erővel, lézersugárra merőleges koppintás; c.) megfogás megnövelt erővel, lézersugár irányú koppintás; d.) megfogás megnövelt erővel, lézersugárra merőleges koppintás

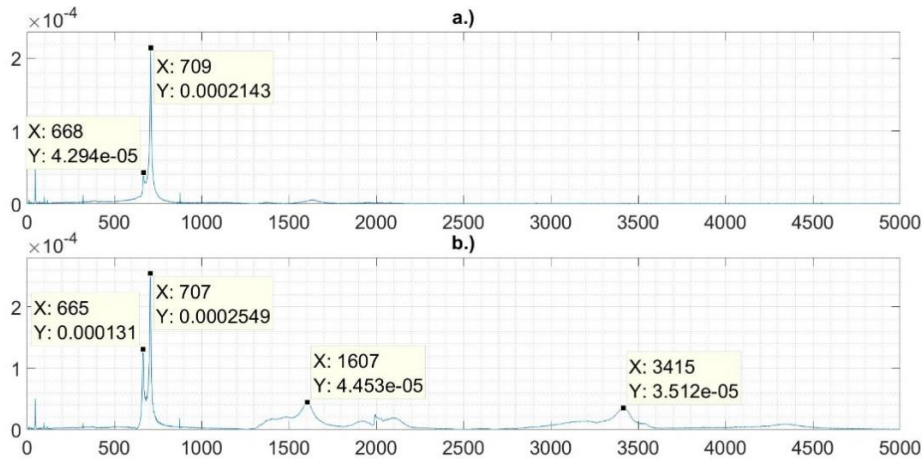


**8. ábra.** A 7/c ábrán bemutatott FFT spektrumhoz tartozó időspektrum (sebesség [m/s] az idő függvényében) és a megjelölt két pont közötti rész FFT spektruma

### 4.3. Szabad hegyű fúró éles koppintása

Az előző fejezetekben a fúrószerűt tompa koppintással hoztuk rezgésbe. A gyakorlatban ez egy gumikalapáccsal történő ütést jelentett, ami a fúrószerű alprezgéseit generálta. A fúrás közben azonban a fúrót más fémekkel történő érintkezés hozza rezgésbe, indokolt tehát az ilyen típusú rezgések vizsgálata is.

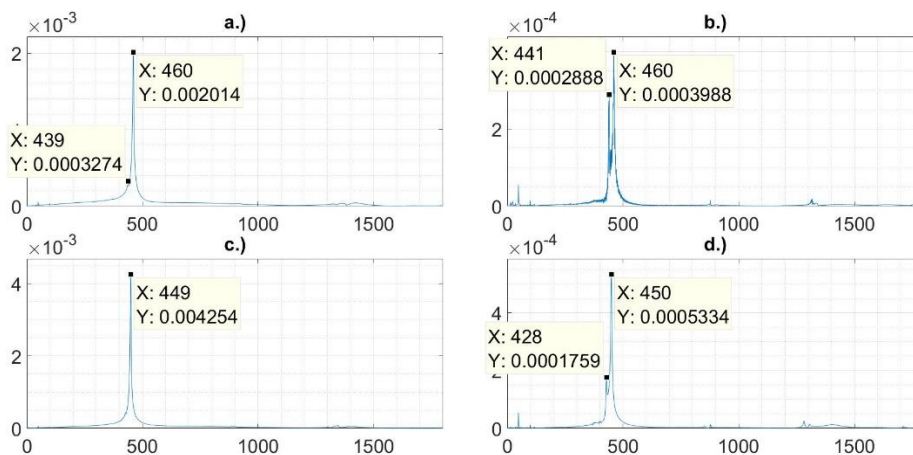
A 9. ábrán azt mutatjuk be, hogy egy másik fúrószerűvel történő (éles) koppintás (b) milyen komplex frekvencia spektrumot eredményez a gumikalapáccsal történő (tompá) koppintás után mért (a) egyszerű spektrumhoz képest.



9. ábra. A 9mm átmérőjű tokmányba fogott 90°-os pozíciójú fúrószerű (lézersugárra merőleges koppintás) rezgési spektrumai (FFT: a.) gumikalapáccsal; b.) másik fúrószerűvel történő koppintást követően

#### 4.4. Kiegészítő mérések

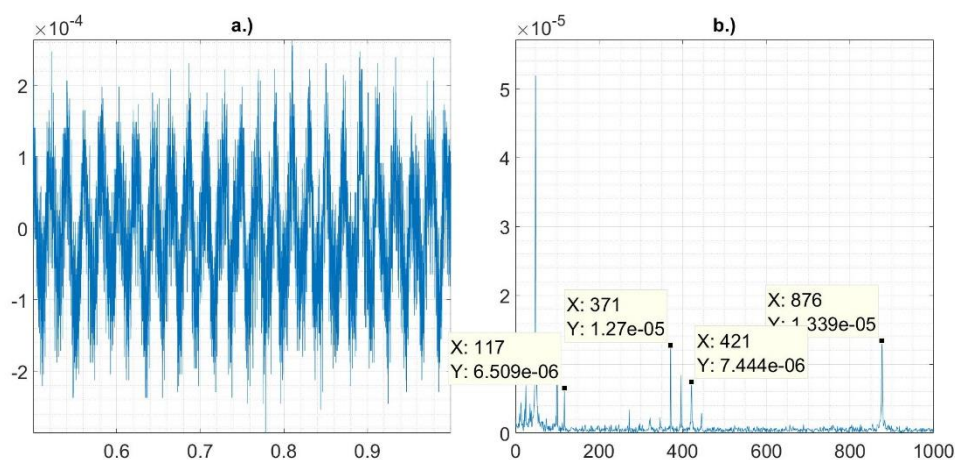
A vastagabb fúró esetén megmértük, hogy milyen hatása van a rezgési spektrumra annak, hogy ha a fúrót a tokmányból 3mm-rel kintebb húzzuk. Ez a fúró tokmányon kívüli hosszát kb. 2,5%-kal növeli meg ( $l' = 1,025l$ ). A 10. ábrából látható, hogy a kihúzás a rezgési frekvenciákat 10-11Hz-cel csökkenti, ami kb. 2,5% csökkenést jelent. Ennek az értelmezésére az 5. fejezetben még visszatérünk.



10. ábra. A 9mm átmérőjű tokmányba fogott 90°-os pozíciójú fúrószerű rezgési spektrumai (FFT) az eredeti (a tokmányba teljesen betölt), ill. 3mm-rel kihúzott állapotában: a.) eredeti állapot, lézersugár irányú koppintás; b.) eredeti állapot, lézersugárra merőleges koppintás; c.) kihúzott állapot, lézersugár irányú koppintás; d.) kihúzott állapot, lézersugárra merőleges koppintás



Az eddigi időspektrumok és FFT spektrumok a fúrószerű minden rezgését mutatták, nemcsak azokat, amelyeket a koppintás okozott. Tapasztalataink szerint a fúrószerűnek a szabad rezgések lecsengése után is maradnak rezgései (11. ábra). Ezeket az állandósult rezgéseket különböző környezeti hatások, elsősorban a műhelyben folyamatosan bekapcsolva tartott elektromos berendezések gerjesztik. Ezek közül a viszonylag zajos kompresszort emeljük ki (48Hz, 876Hz). Amikor minden fogyasztót kikapcsoltunk, a háttér teljesen fehérré vált, az FFT spektrum azonosítható frekvenciákat nem tartalmazott. A háttér spektrum több vonala azonosítható a korábban bemutatott FFT spektrumokban. Különösen igaz ez a 7. ábrára, ahol a megtámasztott csúcsú fúró kis amplitúdójú rezgései nem tudták a háttérrel teljesen elnyomni.



11. ábra. A háttér rezgések időspektruma (sebesség [m/s] az idő függvényében) és FFT spektruma.

## 5. A befogott fúrószerűk rezgéseinek leírása

### 5.1. Az egy oldalon befogott hengeres rudak rezgésének egyszerű modellje

A fúrószerűk rezgési frekvenciáinak pontos levezetése – a fúrószerűk bonyolult geometriája miatt – reménytelen feladatnak tűnik. Ehelyett tekintsünk egy tokmányba fogott kör keresztmetszetű hengeres rudat, amelynek a méretei egyeznek a fúró befoglaló méretével. A vékonyabb fúrót tehát egy  $d=9\text{mm}$  átmérőjű  $l=94\text{mm}$  hosszú (a fúró tokmányból kiálló hossza) egyik végén befogott húrnak tekintettük. Tudjuk, hogy ha a tömeg nélküli húr végére egy  $m$  tömeget rögzítünk, akkor a kialakuló rezgés körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{D/m}, \quad (4)$$

ahol  $D$  a húr „rúgóállandója”. A mi esetünkben a tömeg nem koncentrált, hanem a húr mentén van elosztva, hisz az magának a húrnak a tömege. Közelítésként vegyük úgy, hogy az a húr közepére koncentrált, azaz lényegében egy  $l/2$  hosszú húrt tekintsünk!

Az irodalomból (Hack et al., 1988) ismert, hogy az egyik végén befogott húr lehajlása:

$$s = \frac{1}{3E} \times \frac{l^3}{I} F, \quad \text{ahol} \quad I_{\text{kör}} = \frac{\pi}{4} R^4 \quad (5)$$

és  $F$  az alkalmazott erő. Kifejezve az erőt

$$F = \frac{3E\pi R^4}{4l^3} s \quad \text{amiből a "rugóállandó"} \quad D = \frac{3E\pi R^4}{4l^3}. \quad (6)$$

Az acél rugalmassági modulusát  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Pa értéknek véve a megadott adatokkal  $D = 1,86 \cdot 10^6$  N/m adódik. Az acél sűrűségét  $7800 \text{ kg/m}^3$ -nek véve a húr tömegére pedig  $m = 0,0466$  kg adódik. (A fúró tokmányból kilógó része a horony miatt ennél kisebb tömegű, de mi most a modellünket tekintjük.) Mindezekkel a körfrekvenciára  $\omega = 6315$  1/s, a frekvenciára pedig  $f = 1005$  Hz adódik. Ez kb 50%-kal meghaladja a kísérletileg talált 668 Hz és 709 Hz értékeket. Ezen a ponton még nem volt világos, hogy az eltérés a hengeres rúd rossz modellezése, vagy a hengeres rúd és a fúró („hornyozás” miatti) különbözőségének tulajdonítható-e inkább. A „hornyozás” hatása nyilvánvalóan ilyen irányú, mert a fúróban a horony jobban csökkenti a  $D$  értékét (az  $R^4$  függés miatt – lásd (6)), mint a tömeget (ami  $R^2$ -tel arányos). Tehát a modellre számított frekvenciának biztosan nagyobbak kellett adódnia, mint a fúró rezgésének tényleges frekvenciái.

A legvastagabb fúró adatai:  $l = 121$  mm,  $d = 12$  mm. Ezekkel az adatokkal (változatlan rugalmassági modulusot és sűrűséget feltételezve) a  $D$  értéke 1,482-szeresére, a tömeg 2,288-szörösére adódik, tehát csupán a modell pálcák geometriai adatai miatt is csökkennie kell a frekvenciának bő 19,5%-kal. Ha a közepes fúró adatait ( $l = 104$  mm,  $d = 10$  mm) tekintjük, akkor pedig 9,3%-kal kisebb frekvenciát várunk, mint a legvékonyabb fúró esetében.

## 5.2. A hangvilla modellje

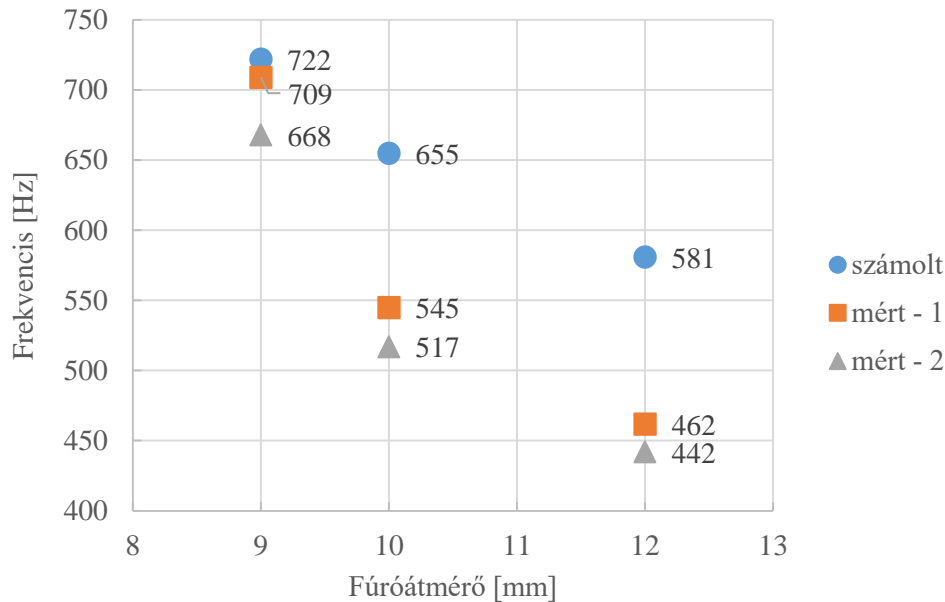
Az irodalomban találtunk valóságos tömegeloszlású hangvilla modell elméleti leírását is. Ez az elmélet henger alakú villaágak esetére (Han at al., 1999; *Tuning fork*, 2021):

$$\omega = \frac{1,875^2 R}{2l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (7)$$

Az előző pontban leírt egyszerűsített modell alapján is kifejezhetjük hasonló alakban a körfrekvenciát. Ehhez a (4) egyenletbe be kell írni a (6) egyenletből a  $D$ -t (figyelembe véve, hogy itt  $l$  helyébe  $l/2$  írandó) és be kell írni a tömeget ( $m = R^2 \pi \cdot l \cdot \rho$ ) is a teljes  $l$ -l:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{24ER^2}{4l^4 \rho}} = \frac{\sqrt{6}R}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (8)$$

A (7) eredmény a (8)-nál 28,2%-kal kisebb, azaz  $\omega(7) = 0,718 \omega(8)$ . Vagyis az egyszerű modellünkben használt koncentrált tömeg kb. 40%-kal nagyobb ( $\omega(8) = 1,393 \omega(7)$ ) frekvenciákra vezet, mint a homogén tömegeloszlásból levezetett érték. A hangvilla modellel a (7) egyenlet alapján a legvékonyabb fúrónak megfelelő hengeres hangvilla ágakra számított frekvencia 722 Hz lesz, ami még közelebb van a kísérletileg talált 668 Hz és 709 Hz értékekhez. Azt gondoljuk, hogy ez a pár százalékos eltérés már tényleg csak a „hornyozás” következménye lehet. Ahogy fentebb is írtuk, a hornyozásnak mindenképpen csökkentenie kell a hengeres rúd rezgési frekvenciáját. A másik két fúróra a hangvilla modell 655 Hz ( $d = 10$  mm), illetve 581 Hz ( $d = 12$  mm) sajátfrekvencia értékeket ad.



**12. ábra.** A fúrósárak mért rezgési frekvenciáinak összevetése az egyező méretű hengeres rudak számított frekvenciáival (növekvő frekvencia szerint a 12mm, a 10mm és a 9mm átmérőjű fúrósárak)

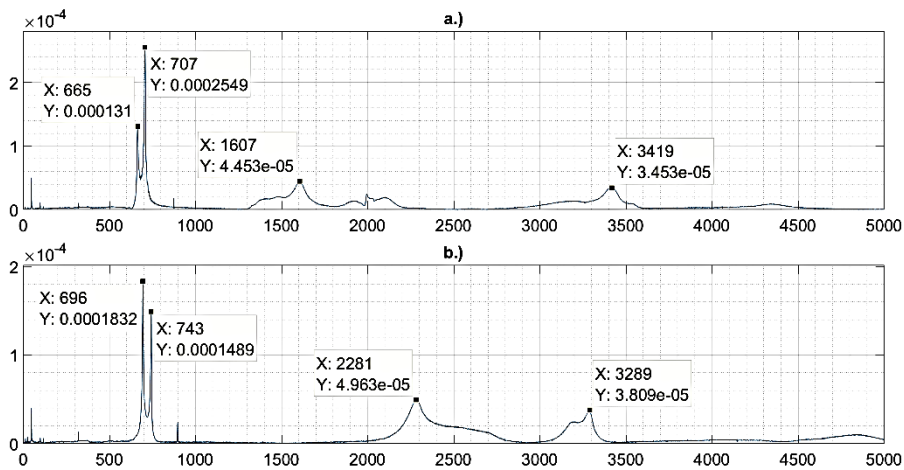
Ha ezeket a számított frekvencia értékeket összevetjük a fúrósár rezgések mért frekvenciáival (12. ábra), akkor láthatjuk, hogy az eltérés erős függvénye a fúrósár átmérőjének. A nagyobb mért frekvencia érték a 9mm-es fúró esetén csak kb. 2%-kal van a hengeres rúdra számítottak. Viszont a 10mm-es fúró esetén az eltérés már 16,8%-os, a 12mm-es fúró esetén pedig 20,5%-os. Ezt a tendenciát minden bizonnyal az okozza, hogy a horony méretei (mélysége és szélessége is) relatíve gyorsabban nőnek, mint a fúrósár átmérője. Tehát a vastagabb fúróból relatíve is több anyag van kimarva, mint a vékonyabból.

Megjegyezzük, hogy a befogott hengeres rúd egyszerű modelljére levezetett (8) képlet akkor egyezne a hangvillára érvényes (7) képlettel, ha az előbbiben  $l$  helyére  $l' = 1,180l$ -t íránk. Ez azt jelenti – mivel a modellünkben a koncentrált tömeget középre, azaz a  $0,5l$  pozícióba tettük – hogy a  $0,59l$  pozícióba tett koncentrált tömeggel adódik ki hangvillára levezetett képlet.

A 10. ábrán láttuk, hogy milyen hatása van a rezgési spektrumra annak, hogy ha a fúrót a tokmányból-reel kintebb húzzuk, azaz a fúró tokmányon kívüli hosszát kb. 2,5%-kal megnöveljük ( $l' = 1,025l$ ). Láttuk, hogy a kihúzás a rezgési frekvenciákat 10-11Hz-cel csökkenti, ami kb. 2,5% csökkenést jelent. A (7) és (8) egyenletek szerint az  $1/l^2$ -es függés miatt a modell alapján azonban kb. 5%-os frekvencia csökkenést várnánk. A különbség minden bizonnyal abból adódik, hogy a kihúzással nem csupán a fúrósár hosszát, hanem ezen belül a fúrósárnak a horony nélküli hosszát is megnöveltük. Vagyis egy picit közelítettük a fúrósárat a hengeres rúd modellhez, aminek viszont kb. 10%-kal nagyobb a rezgési frekvenciája. Tehát az 5%-os csökkenés felét a modellhez való közeledés kompenzálhatta.

Az egy oldalon befogott hengeres rudak rezgésének első felharmonikusát úgy kapjuk, hogy a (7) képletben az  $1,875^2$  helyett  $4,69^2$ -et írunk [8,9]. Ez azt jelenti, hogy a felharmonikus frekvencia az alapképváltoztatás 6,26-szorosa. Ez a 9mm-es fúró esetében 4,18kHz és 4,44kHz felharmonikus (mért) frekvenciákat jelent. A 9/b ábrán ezen a környéken látunk is egy kisebb csúcsot. Mindazonáltal az ábrán látható többi, az alapképváltoztatás fölötti frekvencia hengeres rúd rezgésként való értelmezése nem lehetséges. Ezek

nem csupán a hornyozástól, hanem a fúrószerű befogás módjától is függenek. A 13. ábrán azt mutatjuk be, hogy a különböző tokmányok – ugyanazt a fúrót ugyanolyan körülmények között mérve – hogyan befolyásolják a rezgési spektrumot. Látható, hogy a tokmány típusa pár százalék erejéig hatással van az alulfrekvenciákra is. A hajtott tokmány – ugyanolyan fúrókilógás mellett – rövidebb szabad fúrószerűt jelent, azaz vélhetően hosszabban vagy „kintebb” fogja meg a fúrószerűt. A magasabb frekvenciájú komponensek azonban teljesen különböznek, bár a fenti modellekben szereplő adatokban nem történt változás.



13. ábra. A 9mm átmérőjű, rögzített és „hajtott” típusú tokmányba fogott fúrószerű (lézersugárra mérőleges fémcsúspontítás) rezgési spektrumai (FFT): a.) 3-pofás tokmányba fogott, rögzített fúró, b.) hajtott, befogóperselyes tokmányba fogott fúró

### 5.3. A befogott és a fúrószerű csúcsánál megtámasztott fúrószerű modellezése

Amikor a befogott fúró csúcsát nekitoltuk az álló munkadarabnak, akkor azt a véget pontszerű módon fogtuk meg. Ez a helyzet leginkább az egyik végén befogott, a másik végén csuklósan megfogott rúddal modellezhető. Nyilvánvaló, hogy a megtámasztás és a csuklósan megfogás nem pontosan ugyanazt jelenti, de talán nincs közte nagy különbség. Különösen, ha figyelembe vesszük, hogy a támasztáskor alkalmazott erőnek nem volt hatása a rezgési spektrumra.

A különbözőképpen befogott egyenletes tömegeloszlású rudak rezgési analitikusan is tárgyalhatók (Bosznay, 1962). Az egyik végén befogott, a másik szabad szabályos hengeres rudak rezgéseire a (Tyihonov & Szamarszkij, 1956) irodalomban megadott képlet a (7) képlettel azonos alakra hozható. (Valójában a  $1,875^2$  helyett  $1,87^2$  áll, de ez minden bizonnyal csak kerekítési eltérés.) Az egyik végén befogott, a másik végén csuklósan megfogott hengeres rúd rezgéseit leíró képletben fellépő együttható értéke a (Bosznay, 1962) irodalom szerint  $3,92^2$ , ami a szabad végű rúddal képest  $4,37$ -szer nagyobb frekvenciát eredményezne. A mérések viszont csak  $2,73$ -szor ( $=1405/515$ ) adtak nagyobb frekvenciát. Egészen pontosan a 10mm-es fúrószerű befoglaló adatainak megfelelő egyenletes tömegeloszlású egyik végén befogott, a másik végén csuklósan megfogott hengeres rúd számított sajátfrekvenciája 2570Hz, míg a fúrószerű mért sajátfrekvenciája csak 1405Hz. Ez a nagy eltérés is minden bizonnyal a hornyozás következménye.

## 6. Összefoglalás, következtetések

Megállapítottuk, hogy a tokmányba fogott és megpendített fúrószerűk keresztirányú szabad rezgéseit általában két, egymáshoz közeli (néhány %-on belüli) frekvenciájú komponens szuperpozíciójából származó lebegés dominálja, amelyek a fúrószerűk horonyvég irányú és az arra merőleges keresztirányú rezgéséhez tartoznak. Ez főleg a fúrószerű lézersugárra merőleges koppintás utáni rezgése esetén igaz, ekkor a rezgések harmonikusak. Lézersugar irányú koppintás esetén az első rezgések erősen anharmonikusak.

A fúrószerűkat egyik végén befogott kör keresztmetszetű hengeres rudaknak tekintve modelleztük a rezgéseket. A hangvilla modell a 9mm átmérőjű fúrószerű szabad rezgéseinek frekvenciáit pár százalékon belüli pontossággal megadja, a vastagabb (10 és 12mm-es) fúrószerűk esetében viszont 15-20%-kal felülbecsli. Ennek az oka minden bizonnyal a vastagabb fúrók (relatív értelemben is) nagyobb horony mérete.

A fúróvég megtámasztása (amit úgy értük el, hogy nekitoltuk a fúró egy álló munkadarabnak) a rezgési frekvenciát kb. 2,7-szeresére növelte, szemben a hengeres rudakra elméletileg levezetett 4,37-szeres értékkel. A fúrószerű tokmányból kintebb húzása csökkentette a rezgési frekvenciákat kb. olyan arányban, ahogy a fúró tokmányon kívüli hossza növekedett.

A koppintás típusa is jelentős hatással volt a rezgési spektrumra. A tompa koppintás (gumikalapács) eredményezte a fentebb tárgyalt alulfrekvenciákat. Az éles koppintás (másik fúrószerűvel) számos további magasabb frekvenciájú rezgést is eredményezett, amelyeket a hengeres rúd modellel nem tudunk értelmezni.

## 7. Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki a Miskolci Egyetem Szerszám-gépezési és Mechatronikai Intézet Szerszám-gépek Intézeti Tanszékének, hogy műhelyében lehetőséget biztosított a cikkben szereplő kísérletek elvégzéséhez. Külön köszönet illeti Máté Bálintot, aki a kísérletek lebonyolításában, a szerszám-gép kezelésében sok segítséget nyújtott.

Ezen a helyen kíván köszönetet mondani Béres Miklós az NKFI-125117 számú projekt Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatásának, melynek révén a kísérletek a K\_17 pályázati program finanszírozásában valósultak meg.

## Irodalom

- [1] Béres, M., Paripás, B.: *Fúrószerű rezgéseinek mérése lézer Doppler módszerrel*, 2017 Multiscience – XXXI. microCAD International Multidisciplinary Scientific Conference, C2: Natural Sciences, ISBN 978-963-358--132-2, University of Miskolc (C2/4)
- [2] Béres, M., Paripás, B. (2018). Measurement of vibration by laser Doppler method in the course of drilling. In K. Jármái, B. Bolló (Eds.), Series Title: Lect. Notes Mechanical Engineering, Book Title: *Vehicle and Automotive Engineering 2*, Book Subtitle: Proceedings of the 2nd VAE2018, (pp. 199-208). Miskolc, Hungary, ISBN: 978-3-319-75676-9, Springer [https://doi.org/10.1007/978-3-319-75677-6\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-319-75677-6_16)
- [3] Béres, M., Paripás, B. (2018). *Measuring of drill bit vibration by laser Doppler methods*. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 448 <https://doi.org/10.1088/1757-899X/448/1/012068>



- [4] Béres, M., Paripás, B. (2017). *Comparison of two laser interferometric methods for the study of vibrations*. In Jármai K., Bolló B. (Eds.), *Vehicle and Automotive Engineering*. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-51189-4\\_20](https://doi.org/10.1007/978-3-319-51189-4_20)
- [5] Polytec GmbH: PDV-100 Portable Digital Vibrometer Datasheet, 2012
- [6] Hack, F., Kugler, S., Radnai, Gy., Tóth, G. (1988). *Négyjegyű függvénytáblázatok. Matematikai, fizikai, kémiai összefüggések*. Tankönyvkiadó, Budapest, ISBN 963 18 0844 0
- [7] [https://en.wikipedia.org/wiki/Tuning\\_fork](https://en.wikipedia.org/wiki/Tuning_fork)
- [8] Han, S. M., Benaroya, H., Wei, T. (1999). *Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories*. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5), 935-988. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2257>
- [9] Bosznay, Á. (1962). *Műszaki rezgésstan*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- [10] Tyihonov, A. N., Szamarszkij, A. A. (1956). *A matematikai fizika differenciálegyenletei*. Akadémiai kiadó, Budapest